

1. Feladat (3+5+5=13 pont)

- (a) Valós számsorozatokra mondja ki és igazolja a rendőr-elvet!
 (b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^{3n+2} - 5n^3 + 3}{3^n + 7}} = ?$$

2. Feladat (3+12=15 pont)

- (a) Mikor mondjuk, hogy az egyváltozós, valós f függvény határértéke az $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban $A \in \mathbb{R}$? Adja meg a definíciót!
 (b) Hol és milyen típusú szakadásai vannak az $f(x) = \frac{\sin(5x) \cdot |x+3|}{x(x^2-9)}$ függvénynek? A szakadási pontokban határozza meg a függvény bal- és jobb oldali határértékét!

3. Feladat (12 pont)

$$\int_{x=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x+2}(x+11)} dx = ? \quad (u = \sqrt{x+2} \text{ helyettesítéssel})$$

4. Feladat (12 pont)

Írja föl azt a legalacsonyabb rendű homogén lineáris, állandó (valós) együtthatós differenciálegyenletet, melynek megoldása az $y(x) = 5e^{3x}(\cos(2x) - 7)$ függvény! Írja fel a differenciálegyenlet általános megoldását is!

5. Feladat (3+5=8 pont)

- (a) Legyen az f függvény $(n+1)$ -szer differenciálható az $I = (x_0 - a, x_0 + a)$ intervallumon ($a > 0$), és legyen $x \in I$. Írja fel $f(x)$ értékét az x_0 középpontú, n -edrendű Taylor-polinom és a Lagrange-féle maradéktag segítségével! (Mondja ki a tanult tételt!)
 (b) Adja meg $\sin(1/3)$ origó középpontú, hatodrendű Taylor-polinommal számolt közelítését, és adjon felső becslést ennek hibájára!

6. Feladat (9+6=15 pont)

- (a) Ismertesse a gömbi polár-koordinátákat egy rajzon, és számolja ki a Jacobi-determinánst!
 (b) Határozza meg az $R \geq 0$ sugarú gömb térfogatát!

7. Feladat * (13 pont)

Legyen $f(x) = \operatorname{sgn}(\cos(x))$, ahol sgn az „előjel függvény”; $x > 0$ esetén $\operatorname{sgn}(x) = 1$, $x < 0$ esetén $\operatorname{sgn}(x) = -1$ és $\operatorname{sgn}(0) = 0$. Határozza meg f Fourier-együtthatóit! Mely pontokban egyezik meg illetve különbözik a Fourier-sor összege és f értéke?

8. Feladat * (3+7+2=12 pont)

- (a) Milyen kapcsolat van az $f(x)$ és a $g(x) = f(x/a)$ függvények Fourier-transzformáltja között? ($a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) Mondja ki és bizonyítsa be a tanult összefüggést!
 (b) Írja föl az inverz Fourier-transzformáció definícióját!

A *-al jelölt feladatokból legalább 7 pontot el kell érni!