ANALÍZIS(2) VIZSGADOLGOZAT 2006. június 1.
Mérnök Informatikus szak A és B kurzus Munkaidő: 90 perc
BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (15 pont)

Az akárhányszor deriválható $y = y(x)$, $x \in \mathrm{R}$ megoldása az

$$y' = y^3 + x^2$$

differenciálegyenletnek és átmegy az $(1, -1)$ ponton.

a) Van-e ennek a megoldásnak lokális szélsőértéke az $x = 1$ helyen? Ha igen, milyen jellegű és milyen értékkel?

b) Írja fel ennek a megoldásnak az $x_0 = 1$ pont körüli harmadfokú $T_3(x)$ Taylor polinomját!

Ne próbálja megoldani a differenciálegyenletet!

2. feladat (15 pont)

$$f(x) = x\ \mathrm{sh}\,(3\,x^2)$$

a) Az $\mathrm{sh}\,x$ függvény ismert Taylor sorára támaszkodva írja fel az f függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor sorát és adja meg annak konvergencia tartományát!

b) $f^{(100)}(0) = ?$, $f^{(99)}(0) = ?$ (A sorfejtésből adjon választ!)

c) Írja fel f deriváltfüggvényének $x_0 = 0$ pontra támaszkodó Taylor sorát! Indokoljon!

3. feladat (12 pont)

a) Definiálja egy kétváltozós függvény parciális deriváltjait és totális deriválhatóságát!

b) A állítás: f totálisan deriválható $\underline{a}$-ban, B állítás: f folytonos $\underline{a}$-ban.
A $\Longrightarrow$ B vagy B $\Longrightarrow$ A ?
Melyik állítás igaz? Az igaz állítást bizonyítsa be!

4. feladat (8+4+6=18 pont)

$$f(x, y) = (2x - 4)^3\, y^4$$

a) $f'_x(x, y) = ?$; $f'_y(x, y) = ?$ Írja fel a másodrendű parciális deriváltakat is!
$df((3, 1), (h, k)) = ?$

b) Írja fel a függvény $P_0(3, 1)$ pontjabeli érintősíkjának egyenletét!

c) * Hol lehet f-nek lokális szélsőértéke?
Hol és milyen jellegű lokális szélsőértéke van?

5. feladat (5+6+6=17 pont)

a) * Írja le hengerkoordináták segítségével az alábbi térrészt!

$$z \ge 0, \qquad z \le 9 - x^2 - y^2, \qquad x^2 + y^2 \le 4$$

b) Írja fel és számítsa ki a hengerkoordinátás transzformáció Jacobi determinánsát!

c) *

$$\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2}\ \mathrm{d}V = ? \qquad V:\ \text{az a) feladatban leírt térrész}$$

6. feladat (12 pont)*

a) Hol differenciálható és hol reguláris az $f(z) = |z|^2$ függvény?

b) Számolja ki az alábbi mennyiségek valós és képzetes részét!

$$a = \sin\left(\frac{\pi}{2} + j\pi\right), \qquad b = (-3j)^j$$

7. feladat (11 pont)*

a) Ismertesse a Cauchy-féle integrálformulát! (Ne feledkezzen meg a feltételekről!)

b)

$$I = \oint_{|z+j|=2} \frac{\mathrm{sh}\,(z + j)}{(z^2 + 4)\, z}\ \mathrm{d}z\,, \qquad \mathrm{Re}\, I = ?, \qquad \mathrm{Im}\, I = ?$$

Pótfeladat (csak az elégséges és a közepes vizsgához javítjuk ki):

8. feladat (10 pont)

Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$y'' + 2y' - 3y = 3\,x^2$$

9. feladat (10 pont)

Adja meg az alábbi sor konvergenciatartományát!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n+2}}{2^{3n}\ n}\ (x - 1)^n$$

Adjon meg egy olyan intervallumot, melyben a sor egyenletesen konvergens!

A *-gal jelölt feladatokból legalább 16 pontot el kell érni!

ANALÍZIS(2) | VIZSGADOLGOZAT | 2006. június 1.
Mérnök Informatikus szak | A és B kurzus | Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (15 pont)

Az akárhányszor deriválható $y = y(x)$, $x \in \mathrm{R}$ megoldása az

$$y' = y^3 + x^2$$

differenciálegyenletnek és átmegy az $(1, -1)$ ponton.

a) Van-e ennek a megoldásnak lokális szélsőértéke az $x = 1$ helyen? Ha igen, milyen jellegű és milyen értékkel?

b) Írja fel ennek a megoldásnak az $x_0 = 1$ pont körüli harmadfokú $T_3(x)$ Taylor polinomját!

Ne próbálja megoldani a differenciálegyenletet!

a.) $y(1) = -1$

$y'(1) = (-1)^3 + 1^2 = 0 \implies$ lehet lok. szélsőérték (2)

$y'' = 3y^2y' + 2x$ (3) $\quad y''(1) = 3(-1)^2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2$

$y'(1) = 0,\ y''(1) > 0 \implies x=1$-ben lok. minimum van (2) (-1) értékkel.

b.) $T_3(x) = y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{y'''(1)}{3!}(x-1)^3$ (2)

$y''' = 6yy' \cdot y' + 3y^2y'' + 2$ (3) $\quad (y = -1,\ y' = 0,\ y'' = 2)$

$y'''(1) = 8$ (1)

$T_3(x) = -1 + \frac{2}{2!}(x-1)^2 + \frac{8}{3!}(x-1)^3$ (2)

2. feladat (15 pont)

$$f(x) = x\ \mathrm{sh}\,(3\,x^2)$$

a) Az $\mathrm{sh}\,x$ függvény ismert Taylor sorára támaszkodva írja fel az f függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor sorát és adja meg annak konvergencia tartományát!

b) $f^{(100)}(0) = ?$, $\quad f^{(99)}(0) = ?$ (A sorfejtésből adjon választ!)

c) Írja fel f deriváltfüggvényének $x_0 = 0$ pontra támaszkodó Taylor sorát! Indokoljon!

a.) $\mathrm{sh}\,u = u + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^{2n-1}}{(2n-1)!}$, $\quad u \in \mathbb{R}$ (3)

$$f(x) = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x^2)^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n-1}\, x^{4n-1}}{(2n-1)!} \qquad x \in \mathbb{R} \qquad 3$$

b.) $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \Rightarrow f^{(n)}(0) = n!\, a_n$ 2

$\nexists\, n \in \mathbb{N}$, hogy $4n-1 = 100 \Rightarrow a_{100} = 0 \Rightarrow f^{(100)}(0) = 0$ 1

$99 = 4n-1 \Rightarrow n = 25 \Rightarrow a_{99} = \frac{3^{49}}{49!} \Rightarrow f^{(99)}(0) = 99!\, \frac{3^{49}}{49!}$ 2

c.) $f'(x) = \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n-1}\, x^{4n-1}}{(2n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n-1}}{(2n-1)!} (4n-1)\, x^{4n-2}$

$x \in \mathbb{R}$

szabad a hatványsort tagonként deriválni ($x \in \mathbb{R}$)

4

3. feladat (12 pont)

a) Definiálja egy kétváltozós függvény parciális deriváltjait és totális deriválhatóságát!

b) A állítás: f totálisan deriválható $\underline{a}$-ban, B állítás: f folytonos $\underline{a}$-ban.
$A \Longrightarrow B$ vagy $B \Longrightarrow A$?
Melyik állítás igaz? Az igaz állítást bizonyítsa be!

a.) D $$f'_x(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0)}{h}$$

D $$f'_y(x_0,y_0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x_0,y_0+k) - f(x_0,y_0)}{k}$$

3

D $m = 2$ esetre (x_0, y_0)-ra a totális deriválhatóság:

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) = A\cdot h + B\cdot k + \varepsilon \left(= f'_x(x_0,y_0)\cdot h + f'_y(x_0,y_0)\cdot k + \varepsilon\right)$$

3

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\varepsilon}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$, A és B független h-tól, k-tól

b.) $A \Rightarrow B$, $B \not\Rightarrow A$ 2

T $\boxed{\text{Ha } f\ \underline{a}\text{-ban totálisan deriválható} \Longrightarrow f\ \underline{a}\text{-ban folytonos}}$

B $f(\underline{a}+\underline{h}) = f(\underline{a}) + \underline{A}\cdot\underline{h} + \varepsilon(\underline{h})\cdot\underline{h}$

$$\underbrace{\lim_{\underline{h}\to\underline{0}} f(\underline{a}+\underline{h})}_{=\lim_{\underline{x}\to\underline{a}} f(\underline{x})} = \lim_{\underline{h}\to\underline{0}} \left(f(\underline{a}) + \underline{A}\cdot\underline{h} + \varepsilon(\underline{h})\cdot\underline{h}\right) = f(\underline{a})$$

4

Tehát a határérték = a helyettesítési értékkel. ■

an2 v060601/2

4. feladat (8+4+6=18 pont)

$$f(x,y) = (2x-4)^3\, y^4$$

a) $f'_x(x,y) = ?$; $f'_y(x,y) = ?$ Írja fel a másodrendű parciális deriváltakat is!
$df((3,1),(h,k)) = ?$

b) Írja fel a függvény $P_0(3,1)$ pontjabeli érintősíkjának egyenletét!

c) * Hol lehet f-nek lokális szélsőértéke?
Hol és milyen jellegű lokális szélsőértéke van?

a.) $f'_x = 3(2x-4)^2 \cdot 2 \cdot y^4$; $f'_y = (2x-4)^3\, 4y^3$ 3

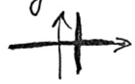
$f''_{xx} = 12(2x-4)\cdot 2 \cdot y^4$, $f''_{yy} = (2x-4)^3\, 12y^2$
$f''_{xy} = f''_{yx} = 6(2x-4)^2\, 4y^3$ $\Big\}$ 3

$df((3,1),(h,k)) = f'_x(3,1)h + f'_y(3,1)k = 24h + 32k$ 2

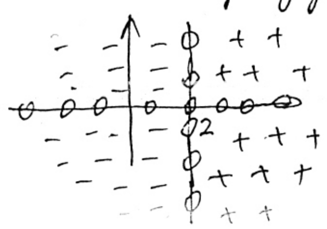
b.) $f'_x(P_0)(x-x_0) + f'_y(P_0)(y-y_0) - (z - f(P_0)) = 0$

$24(x-3) + 32(y-1) - (z-8) = 0$ 4

$\boxed{6}$ c.) $\left.\begin{array}{l} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{array}\right\}$ $x=2$, ill. $y=0$ egyenes pontjaiban lehet lok. szé.



De itt $D(2,y)=0$, ill. $D(x,0)=0$. Tehát ez a kérdőjeles eset. A függvényérték előjelét vizsgáljuk



$(x,0)$, $x<2$: pontokban lok. max.
$(x,0)$, $x>2$: pontokban lok. min.

$(2,y)$ pontokban nincs lok. szé., mert $f(2,y)=0$, de a pont $\forall$ környezetében f felvesz + és − értéket is.

5. feladat (5+6+6=17 pont)

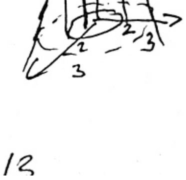
a) * Írja le hengerkoordináták segítségével az alábbi térrészt!

$$z \geq 0\,, \qquad z \leq 9 - x^2 - y^2\,, \qquad x^2 + y^2 \leq 4$$

b) Írja fel és számítsa ki a hengerkoordinátás transzformáció Jacobi determinánsát!

c) *

$$\iiint_V \sqrt{x^2+y^2}\ \mathrm{d}V = ? \qquad V: \text{ az a) feladatban leírt térrész}$$



a.) $x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$
$z = z$ 2

$0 \leq z \leq 9 - r^2$
$0 \leq \varphi \leq 2\pi$
$0 \leq r \leq 2$ 3

b) $\boxed{6}$ $\exists = \det \dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)} = \begin{vmatrix} x_r' & x_\varphi' & x_z' \\ y_r' & y_\varphi' & y_z' \\ z_r' & z_\varphi' & z_z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r$

c.) $\boxed{6}$ $\int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{9-r^2} r \cdot \underbrace{r}_{|\exists|} \, dz\, d\varphi\, dr = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \underbrace{r^2 z \Big|_0^{9-r^2}}_{9r^2 - r^4} d\varphi\, dr =$

$= (2\pi - 0) \int_0^2 (9r^2 - r^4)\, dr = 2\pi \left(3r^3 - \frac{r^5}{5}\right)\Big|_0^2 = 2\pi\left(24 - \frac{32}{5}\right)$

6. feladat (12 pont)*

a) Hol differenciálható és hol reguláris az $f(z) = |z|^2$ függvény?

b) Számolja ki az alábbi mennyiségek valós és képzetes részét!

$$a = \sin\left(\frac{\pi}{2} + j\pi\right), \qquad b = (-3j)^j$$

a.) $\boxed{6}$ $f(z) = x^2 + y^2 + j \cdot 0 \Rightarrow u(x,y) = x^2+y^2, \quad v(x,y) = 0$

$u_x' = 2x \quad v_y' = 0$
$u_y' = 2y \quad v_x' = 0$
} u, v tot. deriválható, mert $\forall$ parciális derivált $\exists$ és folytonos

C-R: $u_x' = v_y' \Rightarrow x = 0$
$u_y' = -v_x' \Rightarrow y = 0$
} $\Rightarrow$ $z=0$-ban deriválható f és sehol sem reguláris

b) $a = \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1} \underbrace{\cos j\pi}_{\operatorname{ch}\pi} + \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0} \underbrace{\sin j\pi}_{j \operatorname{sh}\pi} = \operatorname{ch}\pi$

$\operatorname{Re} a = \operatorname{ch}\pi$
$\operatorname{Im} a = 0$ 2

$b = (-3j)^j = e^{j \ln(-3j)} = e^{j(\ln 3 + j(-\frac{\pi}{2}))} =$
$= e^{-(-\frac{\pi}{2}) + j\ln 3} = e^{\frac{\pi}{2}} (\cos \ln 3 + j \sin \ln 3)$

$-3j$

$\operatorname{Re} b = e^{\frac{\pi}{2}} \cos \ln 3$
$\operatorname{Im} b = e^{\frac{\pi}{2}} \sin \ln 3$ $\quad k \in \mathbb{Z}$ 4

7. feladat (11 pont)*

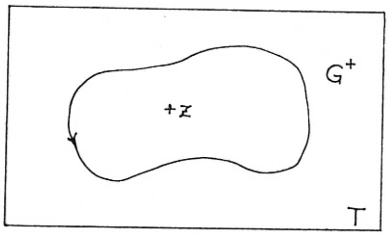
a) Ismertesse a Cauchy-féle integrálformulát! (Ne feledkezzen meg a feltételekről!)

b)

$$I = \oint_{|z+j|=2} \underbrace{\frac{\operatorname{sh}(z+j)}{(z^2+4)\,z}}_{g(z)} \, dz, \qquad \operatorname{Re} I = ?, \qquad \operatorname{Im} I = ?$$

a.) $\boxed{3}$

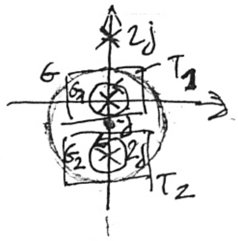
$$\boxed{f(z)=\frac{1}{2\pi j}\oint_{G^+}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta}$$



Feltételek:

f reguláris az egyszeresen összefüggő T tartományon, $G\subset T$ egyszerű, zárt görbe, „egyszer futja körbe” a z pontot.

b.) $I=\oint_G g(z)\,dz=\oint_{G_1} g(z)\,dz+\oint_{G_2} g(z)\,dz=$ (2)



$$=\oint_{G_1}\frac{\frac{sh(z+j)}{(z-2j)z}}{z-(-2j)}\,dz+\oint_{G_2}\frac{\frac{sh(z+j)}{z^2+4}}{z}\,dz=$$ (2)

$$=2\pi j\left.\frac{sh(z+j)}{(z-2j)z}\right|_{z=-2j}+2\pi j\left.\frac{sh(z+j)}{z^2+4}\right|_{z=0}=$$ (2)

$$=2\pi j\frac{sh(-j)}{(-4j)(-2j)}+2\pi j\frac{sh\,j}{4}=-\frac{\pi}{4}\sin 1-\frac{2\pi}{4}\sin 1$$

$Re\ I=-\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{4}\right)\sin 1$, $Im\ I=0$ (2)

Pótfeladat (csak az elégséges és a közepes vizsgához javítjuk ki):

8. feladat (10 pont)

Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$y''+2y'-3y=3x^2$$

$\lambda^2+2\lambda-3=(\lambda+3)(\lambda-1)=0$ (2) $\Rightarrow$ $\lambda_1=-3$, $\lambda_2=1$ (1)

$y_H=C_1e^{-3x}+C_2e^{x}$ (2)

$$\begin{array}{r|l}
-3\cdot & y_{ip}=Ax^2+Bx+C \\
2\cdot & y_{ip}'=2Ax+B \\
1\cdot & y_{ip}''=2A
\end{array}$$ (1)

$x^2(-3A)+x(-3B+4A)+(-3C+2B+2A)=3x^2$

$\dots\quad A=-1,\quad B=-\frac{4}{3},\quad C=-\frac{14}{9}$ (2)

$y_{ia}=y_H+y_{ip}=C_1e^{-3x}+C_2e^{x}-x^2-\frac{4}{3}x-\frac{14}{9}$ (2)

9. feladat (10 pont)

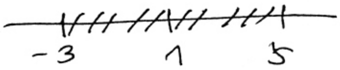
Adja meg az alábbi sor konvergenciatartományát!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n+2}}{2^{3n}\ n} \quad (x-1)^n$$

Adjon meg egy olyan intervallumot, melyben a sor egyenletesen konvergens!

$$a_n = \frac{4\,(-2)^n}{8^n \cdot n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{4} \cdot 2}{8 \cdot \sqrt[n]{n}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = \frac{1}{R} \Longrightarrow R = 4$$ 5



$x = -3$

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{4\,(-2)^n}{8^n \cdot n} (-4)^n = 4 \sum^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{div.} \quad (\alpha = 1)$$ 1

$$x = 5 \quad \sum_{1}^{\infty} \frac{4\,(-2)^n}{8^n \cdot n} 4^n = 4 \sum^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{konv.} \quad (\text{Leibniz sor})$$ 1

K. T. : $(-3, 5]$ 1

Egyenletesen konv. pl. $[-2, 1] \subset (-R, R)$-en

2

an2 v-060601/6.