INFO AN.1. VD3. MEGOLDÁS | 1-1 „α" | 2017. 01. 11.

1, i, $\boxed{5}$

$f'\cdot f^{-3}$ alak

$$\int \frac{1}{x}\ln^{-3}(x)\,dx = \frac{\ln^{-2}(x)}{-2} + c \quad (5)$$

ii, $\boxed{15}$

$$\int \underset{u'}{x}\,\underset{v}{\ln(x+3)}\,dx = \frac{x^2}{2}\ln(x+3) - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x+3}\,dx = \quad (5)$$

$u = \frac{x^2}{2} \quad v' = \frac{1}{x+3}$

$$= \frac{x^2}{2}\ln(x+3) - \frac{1}{2}\int \frac{(x+3)(x-3)+9}{x+3}\,dx = \frac{x^2}{2}\ln(x+3) - \frac{1}{2}\int\left(x-3+\frac{9}{x+3}\right)dx = \quad (5)$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln(x+3) - \frac{x^2}{4} + \frac{3}{2}x - \frac{9}{2}\ln(x+3) + c \quad (5)$$

2, i, $\boxed{15}$ Nem igaz. Pl. az $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \neq 3 \\ 1, & \text{ha } x = 3 \end{cases}$ nem folytonos $[2,5]$-ön, de integrálható. (3)

ii, α, Korlátos zárt intervallumon folytonos függvény int.-ható.

β, ———— " ———— monoton ———— " ———— "—

(Elég az egyik.) (3)

iii, Legyen $F = \{x_0 = 2, x_1, x_2, \dots x_n = 5\}$ a $[2,5]$ egy véges felosztása.

$$s_F = \sum_{k=1}^{n} \inf_{x_{k-1}\le x\le x_k}\{f(x)\}\cdot(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} 0\cdot(x_k - x_{k-1}) = 0 \quad (3)$$

$$S_F = \sum_{k=1}^{n} \sup_{x_{k-1}\le x\le x_k}\{f(x)\}\,(x_k - x_{k-1}) \geq \sum_{k=1}^{n} 2\cdot(x_k - x_{k-1}) = 2\cdot(5-2) = 6 \quad (3)$$

Felhasználtuk, hogy tetszőleges pozitív hosszúságú ($I \subset [2,5]$) intervallumban van racionális és irrac. szám is, így $\inf_{x\in I}\{f(x)\} = 0$, és $\sup_{x\in I}\{f(x)\} \geq 2$.

Így $\sup_F s_F = 0 \neq \inf_F S_F \geq 6$, tehát az integrál nem létezik. (3)

3, $\boxed{15}$

$$\int_{\ln(5)}^{\ln(12)} \left(2+\sqrt{e^x+4}\right) dx = \overbrace{\int_3^4 (2+u)\,\frac{2u}{u^2-4}\,du}^{4} = \int_3^4 \frac{2u}{u-2}\,du = \quad (2)$$

$$u=\sqrt{e^x+4}$$

$$x=\ln(u^2-4)\ ;\ dx=\frac{2u\,du}{u^2-4}$$

új határok: (3)

$$u_1=\sqrt{e^{\ln 5}+4}=\sqrt{5+4}=3$$

$$u_2=\sqrt{e^{\ln 12}+4}=\sqrt{12+4}=4$$

$$= \int_3^4\left(2+\frac{4}{u-2}\right)du \ (1) = \Big[2u+4\ln(u-2)\Big]_3^4 \ (3) = 8+4\ln 2-(6+4\ln 1) = \ (2)$$

$$= \underline{\underline{2+4\ln 2}}$$

4, $\boxed{10}$

$$\operatorname{Im}\left(|(1-i)^7|+\frac{1}{(1-i)^7}\right) = \underbrace{\operatorname{Im}\left(|(1-i)^7|\right)}_{=0} \ (2) + \operatorname{Im}\left(\left(\sqrt{2}\cdot e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^{-7}\right) \ (3) =$$

$$= \operatorname{Im}\left(2^{-7/2}\cdot e^{i\frac{7\pi}{4}}\right) \ (1) = 2^{-7/2}\operatorname{Im}\Big(\cos\frac{7\pi}{4}+i\underbrace{\sin\frac{7\pi}{4}}_{-(2^{-1/2})}\Big) \ (2) = 2^{-7/2}\cdot(-1)\cdot 2^{-1/2} = \underline{\underline{\frac{-1}{16}}} \ (2)$$

5, i, $\boxed{10}$

célravezető bővítés (4)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2^{3x}+3^{2x}+2e^{-x}}{e^{-x}+2^{-x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\overbrace{2^{3x}\cdot e^x}^{\to 0}+\overbrace{3^{2x}\cdot e^x}^{\to 0} \ (2) +2}{1+\underbrace{\left(\frac{2}{e}\right)^{-x}}_{\to 0,\ \left|\frac{2}{e}\right|<1} \ (3)} = \underline{\underline{2}} \ (1)$$

($x\to-\infty$ esetén a pozitív kitevőjű tagok nullához tartanak, e^{-x} és 2^{-x} a végtelenhez tart, e^{-x} gyorsabban, mert $e>2$.)

ii, $\boxed{10}$

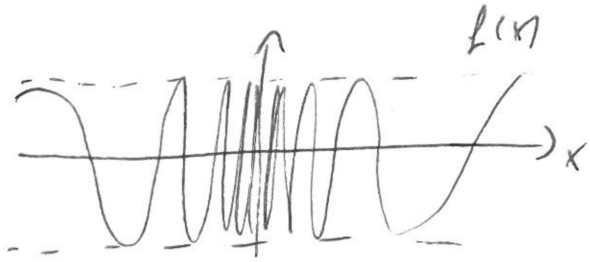
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x^2}-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2} \ (2) \ \overset{\text{„}\frac{0}{0}\text{"}}{\underset{\text{L'H}}{=}} \ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x} \ (3) \ \overset{\text{„}\frac{0}{0}\text{"}}{\underset{\text{L'H}}{=}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2} \ (3) = \underline{\underline{\frac{1}{2}}} \ (2)$$

6, i, Az átviteli elvet használjuk. (2) $f(x)=\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

$\boxed{8}$

$\cos(2k\pi)=1$; $\frac{1}{y_k}=2k\pi$



$$y_k := \frac{1}{2k\pi} \xrightarrow{k\to\infty} 0 \quad (2)$$

$\cos(2k\pi+\pi)=-1$; $\frac{1}{z_k}=2k\pi+\pi$

$$z_k := \frac{1}{2k\pi+\pi} \xrightarrow{k\to\infty} 0 \quad (2)$$

$$\lim_{k\to\infty} f(y_k)=1$$
$$\neq$$
$$\lim_{k\to\infty} f(z_k)=-1$$

Az $y_k\to 0$ és a $z_k\to 0$ sorozat mentén az f függvény határértéke különböző, tehát az átviteli elv értelmében nem létezik $\lim_{x\to 0} f(x)$. (2)

ii, $\boxed{12}$

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{ha } x=0 \\ x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{ha } x\neq 0 \end{cases} \quad (4)$$

Ha $x\neq 0$, $f'(x)=2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)+\cancel{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{-1}{\cancel{x^2}}=2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)-0}{x}=\lim_{x\to 0}\underset{\downarrow \atop 0}{x}\underbrace{\sin\frac{1}{x}}_{\text{korlátos}}=0 \quad (4)$$

Tehát $\forall x\in\mathbb{R}$ esetén $\exists f'(x)$, azaz f deriválható $\mathbb{R}$-en.

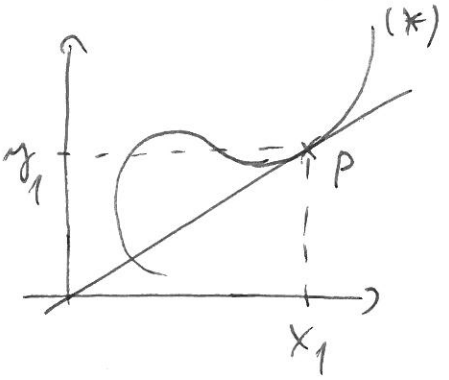
Ugyanakkor f' nem folytonos az origóban, sőt, f'-nek a határértéke sem létezik az origóban, hiszen

$$\lim_{x\to 0} f'(x)=\underbrace{\lim_{x\to 0} 2\underset{\downarrow \atop 0}{x}\underbrace{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{korlátos}}}_{=0}-\underbrace{\lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{1}{x}\right)}_{\nexists}=\nexists \quad (4)$$

IMSC | 16

$$y^3 - x^3 + 3y - x = 1 \qquad (*)$$

Jelölje $P(x_1, y_1)$ az origóból húzott érintő érintési pontját.



P rajta van a (*) görbén, tehát

$$y_1^3 - x_1^3 + 3y_1 - x_1 = 1 \qquad (1)$$

A (*) egyenlet implicit deriválásával implicit összefüggést kaphatunk a (*) görbe meredekségére:

$$3y^2 y' - 3x^2 + 3y' - 1 = 0$$

A meredekség a P pontban éppen $\frac{y_1}{x_1}$, azaz $y'(x_1) = \frac{y_1}{x_1}$, tehát

$$3y_1^2 \cdot \frac{y_1}{x_1} - 3x_1^2 + 3\frac{y_1}{x_1} - 1 = 0 \qquad (2)$$

(1)-ből és (2)-ből a köbös tagokat kiküszöbölve kapjuk meg a kívánt összefüggést:

(2) x_1-szerese: $3y_1^3 - 3x_1^3 + 3y_1 - x_1 = 0$

(1) 3-szorosa: $3y_1^3 - 3x_1^3 + 9y_1 - 3x_1 = 3$

A fenti két egyenlet különbsége:

$$\underline{6y_1 - 2x_1 = 3}$$

Pontozás:

(1) felírása (az érintési pontra):	2 pont
Implicit deriválás:	5 pont
(2) felírása:	5 pont
(1) és (2)-ből a végeredmény:	4 pont.

β variáns (Részletes pontozás az α variáns szerint.)

1, i, [5] $\int \frac{1}{x} \ln^{-2}(x)\,dx = \frac{\ln^{-1}(x)}{-1} + C = \frac{-1}{\ln x} + C$ (5)

ii, [15] $\int x \ln(x-2)\,dx = \frac{x^2}{2}\ln(x-2) - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x-2}\,dx \overset{(5)}{=} \frac{x^2}{2}\ln(x-2) - \frac{1}{2}\int\left(x+2+\frac{4}{x-2}\right)dx \overset{(5)}{=}$

$= \frac{x^2}{2}\ln(x-2) - \frac{x^2}{4} - x - 2\ln(x-2) + C$ (5)

— ∘ —

2, Mint α, értelemszerű módosításokkal.

— ∘ —

3, [15] $\int_{\ln(7)}^{\ln(16)} \left(3 - \sqrt{9+e^x}\right)dx \overset{(3)}{=} \int_4^5 \overbrace{(3-w)\frac{2w}{w^2-9}}^{(4)}\,dw = -2\int_4^5 \frac{w}{w+3}\,dw \overset{(2)}{=}$

$w = \sqrt{9+e^x}$

$x = \ln(w^2-9)\,;\ dx = \frac{2w}{w^2-9}\,dw$

$= -2\int_4^5 \left(1 - \frac{3}{w+3}\right)dw \ (1) = -2\Big[w - 3\ln(w+3)\Big]_4^5 \ (3) = \underline{\underline{-2 + 6\ln\frac{8}{7}}}$ (2)

— ∘ —

4, [10] $\operatorname{Im}|\text{bármi}| = 0$ (2); $1+i = \sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$ (3);

$(1+i)^{-7} = 2^{-7/2}\, e^{-i\frac{7\pi}{4}}$ (1) $= 2^{-7/2}\Big(\cos\frac{-7\pi}{4} + i\underbrace{\sin\frac{-7\pi}{4}}_{+\frac{1}{\sqrt{2}} = +2^{-1/2}}\Big)$; (2)

végeredmény: $2^{-7/2}\cdot 2^{-1/2} = \underline{\underline{\frac{1}{16}}}$ (2)

— ∘ —

5, i, [10] $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\overset{\to 0}{e^{3x}} + \overset{\to 0}{3^{ex}} - \overset{\to\infty}{3^{-x}}}{\underset{\infty}{e^{-x}} \ll \underset{\infty}{3^{-x}}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\overbrace{e^{3x}\cdot 3^x}^{\to 0} + \overbrace{3^{ex}\cdot 3^x}^{\to 0} - 1}{\underbrace{\left(\frac{e}{3}\right)^{-x}}_{0\ \ \left|\frac{e}{3}\right|<1} + 1} = \underline{\underline{-1}}$ (1)

(2) (3) (4) célszerű bővítés

ii, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} + \frac{1-e^x}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x+1-e^x}{x^2}$ (2) $\overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-e^x}{2x}$ (3) $\overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0}\frac{-e^x}{2}$ (3) $= \underline{\underline{\frac{-1}{2}}}$ (2)

— ∘ —

6, Mint α. IMSC – Mint α.