ANALÍZIS(1)
Mérnök Informatikus szak **I. ZÁRTHELYI pótlása, javítása** **2009. okt. 30**
Munkaidő: 90 perc
BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

1. feladat (10 pont)

Írja le a $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ definícióját és ennek alapján mutassa meg, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3-8n}{n^3+7} = 2 \qquad (N(\varepsilon)=?)$$

D $\forall\, \varepsilon>0$-hoz $\exists\, N(\varepsilon)$: $|a_n - A| < \varepsilon$, ha $n > N(\varepsilon)$ 3
$(\varepsilon \in \mathbb{R},\ N(\varepsilon) \in \mathbb{N})$

$$|a_n - A| = \left|\frac{2n^3-8n}{n^3+7} - 2\right| = \left|\frac{2n^3-8n-2(n^3+7)}{n^3+7}\right| = \left|\frac{-8n-14}{n^3+7}\right| = \quad 3$$

$$= \frac{8n+14}{n^3+7} \ \ 1 \ \ \le \frac{8n+14n}{n^3} = \underbrace{\frac{22}{n^2} \le}_{\text{persze ez elmaradhat}} \frac{22}{n} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow n > \frac{22}{\varepsilon} \qquad N(\varepsilon) = \left[\frac{22}{\varepsilon}\right] \quad 3$$

2. feladat (17 pont)

Keresse meg a következő sorozatok határértékét, ha az létezik!

a) $a_n = \left(\dfrac{3n+1}{6n+4}\right)^n$

b) $b_n = \left(\dfrac{6n+1}{3n}\right)^{2n}$

c) $c_n = \left(\dfrac{3n+1}{3n+4}\right)^{6n}$

a.) $$0 < a_n = \left(\frac{3n+1}{6n+4}\right)^n < \left(\frac{3n+n}{6n}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$$
$$\Rightarrow a_n \to 0 \qquad 6$$

b.) $$b_n = \left(\frac{6n+1}{3n}\right)^{2n} > \left(\frac{6n}{3n}\right)^{2n} = 4^n \to \infty \underset{\text{spec. rendőrelv}}{\Longrightarrow} b_n \to \infty \qquad 5$$

c.) $$c_n = \left(\frac{\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n}}{\left(1+\frac{4}{3n}\right)^{3n}}\right)^2 \to \left(\frac{e}{e^4}\right)^2 = e^{-6} \qquad 6$$

3. feladat (15 pont)

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 - 8}{7}, \quad n = 1, 2, \cdots \quad \text{és} \quad a_1 = 9$$

$$(a_n) = (9\,,\ 10.43\,,\ 14.4\,, \cdots)$$

a) Mely valós számok jöhetnek szóba a sorozat határértékeként?
b) Igazolja, hogy $a_n > 8\,, \quad n \in \mathbb{N}^+$
c) Igazolja, hogy a sorozat monoton!
d) Konvergens-e a sorozat!

a.) Ha (a_n) konv. A határértékkel:

$$A = \frac{A^2-8}{7} \Rightarrow A^2-7A-8 = (A+1)(A-8) = 0$$

Tehát $A=-1$ vagy $A=8$ (2)

b.) Teljes indukcióval:

1.) $a_1 > 8$
2.) Tegyük fel, hogy $a_n > 8$
3.) Igaz-e? $a_{n+1} = \frac{a_n^2-8}{7} \overset{?}{>} 8$

2.) miatt: $a_n > 8 \Rightarrow a_n^2 > 64 \Rightarrow a_n^2 - 8 > 56$

$$\Rightarrow \frac{a_n^2-8}{7} = a_{n+1} > \frac{56}{7} = 8$$

(5)

Tehát $a_n > 8$ igaz.

c.) Sejtés: (a_n) monoton nő

Biz.: teljes indukcióval

1.) $a_1 \leq a_2 \leq a_3$ teljesül
2.) Tegyük fel, hogy $a_{n-1} \leq a_n$
3.) Igaz-e? $a_n = \frac{a_{n-1}^2-8}{7} \overset{?}{\leq} \frac{a_n^2-8}{7} = a_{n+1}$

2.) miatt $\underbrace{8 < a_{n-1}}_{b.)\text{ miatt}} \leq a_n \Rightarrow a_{n-1}^2 \leq a_n^2$

$$\Rightarrow a_{n-1}^2 - 8 \leq a_n^2 - 8 \Rightarrow a_n = \frac{a_{n-1}^2-8}{7} \leq \frac{a_n^2-8}{7} = a_{n+1}$$

(5)

d.) A sorozat nem konvergens, mert $a_1 = 9$ és (a_n) monoton nő $\Rightarrow a_n \geq 9$, így nem lehet $A=8$ vagy $A=-1$. (Más szám pedig nem jöhet szóba határértékként.) (3)

an1z1p091030/2.

4. feladat (15 pont)

a) Mit tud az $\sqrt[n]{n}$, illetve az $\sqrt[n]{p}$ sorozatok konvergenciájáról?

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n-1]{5} = ?$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3\ 2^{n+1}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{7+\frac{1}{n}} = ?$

a.) $\boxed{3}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ 1

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1$ 1 $p \in \mathbb{R},\ p>0$ 1

b.) $\sqrt[2n-1]{5} \to 1$, mert $\sqrt[n]{5}$ részsorozata 3

c.) $\sqrt[n]{n^3 2^{n+1}} = \underbrace{\left(\sqrt[n]{n}\right)}_{\downarrow\ 1}{}^3 \cdot 2 \cdot \underbrace{\sqrt[n]{2}}_{\downarrow\ 1} \to 2$ 4

d.)

$$1 \leftarrow \sqrt[n]{7} \le \sqrt[n]{7+\frac{1}{n}} \le \sqrt[n]{7+1} = \sqrt[n]{8} \to 1$$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{7+\frac{1}{n}} \to 1$$ 5

5. feladat (10 pont)

$$a_n = \frac{2n^2 \sin\left(n\,\frac{\pi}{2}\right) - 2n^2}{5n^2+1}$$

Keresse meg a sorozat összes torlódási pontját!

$\limsup a_n = ?$, $\liminf a_n = ?$

Ha $n = 4k+1$: $\sin n\frac{\pi}{2} = 1$

$a_n^{(1)} = \frac{2n^2 - 2n^2}{5n^2+1} = 0 \to 0$ 2

Ha $n = 2k$: $\sin n\frac{\pi}{2} = 0$

$a_n^{(2)} = \frac{-2n^2}{5n^2+1} = \frac{-2}{5+\frac{1}{n^2}} \to -\frac{2}{5}$

Ha $n = 4k+3$: $\sin n\frac{\pi}{2} = -1$

$a_n^{(3)} = \frac{-2n^2-2n^2}{5n^2+1} = \frac{-4}{5+\frac{1}{n^2}} \to -\frac{4}{5}$

6 (Az első 4, a második 2)

Tehát $S = \{0, -\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}\}$

$\limsup a_n = 0$ 1, $\liminf a_n = -\frac{4}{5}$ 1

an1z1p091030/3

6. feladat (22 pont)

a) Ismertesse a numerikus sorokra kimondott majoráns kritériumot!

b) Konvergensek-e az alábbi sorok?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n-\sqrt{2}}{3n^4+2n^3-n^2+1}, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{5^n}{2\cdot n\cdot 5^n - 2^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n+2^{2n}}{4+5^{n+1}}$$

a.) $\boxed{3}$ Ha $\underbrace{0 < a_n}_{1} \leq c_n$ $\forall$ n-re és $\sum^{\infty} c_n$ konv. $\Rightarrow \sum^{\infty} a_n$ konv. 2

b.) $0 < a_n = \dfrac{n^2+n-\sqrt{2}}{3n^4+2n^3-n^2+1} \leq \dfrac{n^2+n^2-0}{3n^4+0-n^4+0} = \dfrac{1}{n^2}$

$\sum^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konv. $\underset{\text{maj. kr.}}{\Longrightarrow} \sum^{\infty} a_n$ konv. 6

$b_n = \dfrac{5^n}{2n5^n-2^n} \geq \dfrac{5^n}{2n\cdot 5^n-0} = \dfrac{1}{2n}$

$b_n > 0$

$\frac{1}{2}\sum^{\infty} \frac{1}{n}$ div. $\underset{\text{min. kr.}}{\Longrightarrow} \sum^{\infty} b_n$ div. 5

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\dfrac{2^n+4^n}{4+5\cdot 5^n}}_{:= c_n}$

$0 < c_n < \dfrac{4^n+4^n}{0+5\cdot 5^n} = \frac{2}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^n$

$\frac{2}{5}\sum^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n$ konv. geom. sor $(0 < q = \frac{4}{5} < 1) \Rightarrow \sum^{\infty} c_n$ konv.

Tehát a sor absz. konv. $\Rightarrow \sum^{\infty}(-1)^n c_n$ is konv. 6

an1z1p091030/4.

7. feladat (11 pont)

Ismertesse a Leibniz kritériumot!

Mutassa meg, hogy az alábbi sor konvergens!

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+5}$$

Leibniz kritérium:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} c_n \quad | \quad c_n > 0$$

Ha az alternáló sor tagjainak abszolút értékeiből képzett c_n sorozat monoton fogyóan tart 0-hoz, akkor a sor konvergens. 3

$$c_n = \frac{n}{n^2+5} = \underbrace{\frac{n}{n^2}}_{=\frac{1}{n} \to 0} \frac{1}{1+\underbrace{\frac{5}{n^2}}_{\to 0}} \to 0 \qquad 2$$

$c_n \searrow$:

$$c_{n+1} \overset{?}{\leq} c_n$$

$$\frac{n+1}{(n+1)^2+5} \overset{?}{\leq} \frac{n}{n^2+5}$$

$$(n+1)(n^2+5) \overset{?}{\leq} n\,(n^2+2n+6)$$

$$n^3+5n+n^2+5 \overset{?}{\leq} n^3+2n^2+6n \qquad 5$$

$$0 \overset{?}{\leq} n^2+n-5 \quad : \quad n \geq 2 \text{ esetén igaz.}$$

Tehát (végülis) monoton csökkenő.

A sor tehát Leibniz sor, így konvergens.

1

an1z1p091030/5.

Pótfeladatok (csak az elégséges eléréséhez javítjuk ki):

8. feladat (13 pont)

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{7+4^{n+1}}{2^{2n}+3^n} = ?$

b) $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{5n^2-3} - \sqrt{5n^2+8}) = ?$

c) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2-2}\right)^{n^2} = ?$

a) $a_n = \frac{7+4\cdot 4^n}{4^n+3^n} = \frac{7\left(\frac{1}{4}\right)^n+4}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^n} \to \frac{0+4}{1+0} = 4$ 4

b) $b_n = \left(\sqrt{5n^2-3} - \sqrt{5n^2+8}\right)\frac{\sqrt{5n^2-3}+\sqrt{5n^2+8}}{\sqrt{5n^2-3}+\sqrt{5n^2+8}} = \frac{5n^2-3-(5n^2+8)}{\sqrt{5n^2-3}+\sqrt{5n^2+8}} =$

$= \frac{-11}{\sqrt{5n^2-3}+\sqrt{5n^2+8}} \to 0$ 5

$\sqrt{5n^2-3}+\sqrt{5n^2+8} \to \infty$

c.) $c_n = \left(\frac{n^2+1}{n^2-2}\right)^{n^2} = \frac{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}{\left(1+\frac{-2}{n^2}\right)^{n^2}} \to \frac{e}{e^{-2}} = e^3$ 4

9. feladat (7 pont)

Adja meg az alábbi sor összegét!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}+(-2)^n}{7^n} = ?$$

Két konvergens geometriai sor összege:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\cdot 3^n+(-2)^n}{7^n} = 3\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{7}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-2}{7}\right)^n =$

$= 3\,\frac{\frac{3}{7}}{1-\frac{3}{7}} + \frac{-\frac{2}{7}}{1-\left(-\frac{2}{7}\right)}$

an1z1p091030/6.