INFO AN1. VD1. | α VARIÁNS $\lfloor -1- \rfloor$ | 2018. 12. 21.

1, a, $\boxed{7}$

$$\frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\cdot\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right) \quad 7$$

b, $\boxed{9}$

$$\frac{(1+i)^7}{(1-i)^5} = \frac{\left(\sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^7}{\left(\sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^5} \; 4 \; = (\sqrt{2})^2\cdot e^{i\frac{\pi}{4}(7-(-5))} = 2e^{i\cdot 3\pi} \; 3 \; = -2 \quad 2$$

2, $\boxed{10}$

$$\sqrt[n]{\left(\frac{2n}{3n+1}\right)^{n+1}} = \underbrace{\frac{2n}{3n+1}}_{a_n}\cdot\underbrace{\sqrt[n]{\frac{2n}{3n+1}}}_{b_n} \; 3 \; \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{3}\cdot 1 = \frac{2}{3} \quad 1$$

$$\underbrace{a_n = \frac{2}{3+1/n} \longrightarrow \frac{2}{3}}_{2}\;;\quad \sqrt[n]{\frac{2}{4}} = \sqrt[n]{\frac{2n}{3n+n}} < b_n < \sqrt[n]{\frac{2n}{3n+0}} = \sqrt[n]{\frac{2}{3}} \quad 4$$

$$\sqrt[n]{\frac{2}{4}} \to 1,\quad b_n \to 1,\quad \sqrt[n]{\frac{2}{3}} \to 1$$

3, a, T.: (L'Hospital szabály) Ha $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, akkor

$\boxed{6}$ $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$, amennyiben a jobb-oldal létezik.

b, $\boxed{10}$

$$\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{8-x^2}}{2+x} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x\to -2}\frac{\frac{-1}{2\sqrt{2-x}} - \frac{-2x}{2\sqrt{8-x^2}}}{1} \; 6 \; = \frac{-1}{4} - \frac{2}{2} = -\frac{5}{4} \quad 4$$

4, a, 4 Szükséges feltétel: Ha f-nek lokális szélsőértéke van x_0-ban, akkor $f'(x_0)=0$.

4 Elégséges feltétel: Ha $f'(x_0)=0$, és f' előjelet vált x_0-ban, akkor f-nek lokális szélsőértéke van x_0-ban.

(vagy előjel váltás helyett $\exists f''(x_0) \neq 0$)

b, $\boxed{10}$

$$f'(x) = \frac{x^2+2-x\cdot(2x)}{(x^2+2)^2} \; 3 \; = \frac{(\sqrt{2}+x)(\sqrt{2}-x)}{(x^2+2)^2} \; 2$$

5

x	$x<-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}<x$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	↘	lok. min.	↗	lok. max.	↘

5*/ a, $\boxed{8}$ $\int u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x) - \int u'(x)\,v(x)\,dx$, amennyiben mindkét oldalon a deriváltak és integrálok léteznek. (3)

(5) Indoklás: Ha u és v deriválható, akkor $(uv)' = u'v + uv' \Longrightarrow uv' = (uv)' - u'v$, mindkét oldalt integrálva, és felhasználva, hogy $\int (uv)' = uv$, kapjuk az állítást.

$\boxed{6}$ b, $\int \underbrace{(x+2)}_{u}\underbrace{e^{3x}}_{v'}\,dx = (x+2)\frac{1}{3}e^{3x} - \int 1\cdot\frac{1}{3}e^{3x}\,dx =$ (4)

$u' = 1 \quad v = \frac{e^{3x}}{3}$ $\Big| = \underline{\underline{\frac{x+2}{3}e^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C}}$ (2)

6*/ a, $\boxed{7}$ $\int \sin(3x)\,(4+\cos(3x))^2\,dx = \frac{-1}{3}\int(-3\sin(3x))(4+\cos(3x))^2\,dx =$

$f'\cdot f^2$ alak

$= \underline{\underline{\frac{-1}{3}\,\frac{(4+\cos(3x))^3}{3} + C}}$

$\boxed{7}$ b, $\int_{x=1}^{4}\frac{1}{\sqrt{x}+x}\,dx = \int_{t=1}^{2}\frac{1}{t+t^2}\,2t\,dt$ (4) $= \int_{t=1}^{2}\frac{2}{1+t}\,dt = \Big[2\ln(t+1)\Big]_1^2 =$

$t = \sqrt{x}$; $x = t^2$

$dx = 2t\,dt$

(3) $= \underline{\underline{2\ln\left(\frac{3}{2}\right)}} = 2(\ln 3 - \ln 2)$

7*/ A nevező $(x+1)^3$, így

$\boxed{12}$ $\int_0^\infty \frac{x+1-1}{(x+1)^3}\,dx = \lim_{\Omega\to\infty}\int_0^\Omega\left((x+1)^{-2} - (x+1)^{-3}\right)dx$ (5) $= \lim_{\Omega\to\infty}\left[\frac{-1}{x+1} + \frac{1}{2(x+1)^2}\right]_0^\Omega =$ (4)

$= \lim_{\Omega\to\infty}\left(\frac{-1}{\Omega+1} + \frac{1}{2(\Omega+1)^2} + 1 - \frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$ (3) Konvergens!

IMSC

4 a, f az I intervallumon <u>egyenletesen folytonos</u>, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, melyre $\forall x_1, x_2 \in I$, $|x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon)$ esetén $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

5 b, $f(x) = \frac{1}{x}$ az $I_1 = (0,1]$-en <u>nem egyenletesen folytonos</u>, hiszen
$u_n = \frac{1}{n}$, $v_n = \frac{1}{n+1}$ esetén $\forall n \in \mathbb{N}_+$-ra $u_n, v_n \in I_1$,
$|u_n - v_n| = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, és $|f(u_n) - f(v_n)| = 1$ konstans,
tehát $\varepsilon < 1$-re nincs jó $\delta > 0$.

5 $f(x) = \frac{1}{x}$ az $I_2 = [1, \infty)$-en <u>egyenletesen folytonos</u>, hiszen
$x_1, x_2 \in I_2$ esetén
$|f(x_1) - f(x_2)| = \left|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right| = \frac{|x_2 - x_1|}{x_1 x_2} \leq |x_1 - x_2|$, tehát $\forall \varepsilon > 0$ esetén
a $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$ jó választás.

β variáns (tömör, részletes az α variánson) (7)

1, a, $r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$ $\boxed{7}$

$\boxed{9}$ b, $\dfrac{(1-i)^3}{(1+i)^5}=\dfrac{\left(\sqrt2\cdot e^{-i\pi/4}\right)^3}{\left(\sqrt2\cdot e^{+i\pi/4}\right)^5}$ (4) $=\dfrac12\cdot e^{-8i\frac{\pi}{4}}$ (3) $=\dfrac12$ (2)

—— ∘ ——

2, $\boxed{10}$ $\sqrt[n]{\left(\dfrac{3n}{5n+1}\right)^{n+1}}=\underbrace{\dfrac{3n}{5n+1}}_{=\frac{3}{5+1/n}\to\frac35\ (2)}\cdot\underbrace{\sqrt[n]{\dfrac{3n}{5n+1}}}_{\to 1}$ (3) $\longrightarrow\dfrac35$ (1)

$\to 1$, rendőr elvvel kell igazolni, mint α-ban. (4)

—— ∘ ——

3, a, mint α, (6) b, $\boxed{10}$ $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\sqrt{6-x}-\sqrt{18-x^2}}{3+x}=\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\dfrac{-1}{2\sqrt{6-x}}-\dfrac{-2x}{2\sqrt{18-x^2}}}{1}$ (6) $=\dfrac{-1}{6}-\dfrac66=\dfrac{-7}{6}$ (4)

—— ∘ ——

4, a, mint α $\boxed{8}$; b, $f'(x)=\dfrac{3+x^2-2x^2}{(3+x^2)^2}$ (3) $=\dfrac{(\sqrt3+x)(\sqrt3-x)}{(3+x^2)^2}$ (2)

(5) ↘: $(-\infty,-\sqrt3]$ és $[\sqrt3,+\infty)$ intervallumon; $-\sqrt3$-ban lok. min.
↗: $[-\sqrt3,+\sqrt3]$ intervallumon; $+\sqrt3$-ban lok. max.

—— ∘ ——

5*, a, mint α $\boxed{8}$ b, $\boxed{6}$ $\int(x+3)e^{5x}dx=\frac15(x+3)e^{5x}-\frac15\int e^{5x}dx$ (4) $=\dfrac{x+3}{5}e^{5x}-\dfrac{e^{5x}}{25}+C$ (2)

—— ∘ ——

6*, a, $\int\cos(2x)(5+\sin(2x))^2dx=\dfrac12\cdot\dfrac{(5+\sin(2x))^3}{3}+C$ $\boxed{7}$

$\boxed{7}$ b, $\displaystyle\int_4^9\frac{1}{x+\sqrt x}dx=\int_2^3\frac{1}{t^2+t}2t\,dt$ (4) $=\Big[2\ln(1+t)\Big]_2^3=2(\ln4-\ln3)$ (3)

$t=\sqrt x$
$x=t^2$; $dx=tdt$

—— ∘ ——

7,* $\boxed{12}$ $\displaystyle\int_{x=2}^{\infty}\frac{x-1+1}{(x-1)^3}dx=\lim_{\Omega\to\infty}\int_2^{\Omega}\left((x-1)^{-2}+(x-1)^{-3}\right)dx$ (5) $=\displaystyle\lim_{\Omega\to\infty}\left[\frac{-1}{x-1}-\frac{1}{2(x-1)^2}\right]_2^{\Omega}$ (4) $=$

$=\displaystyle\lim_{\Omega\to\infty}\left(\frac{-1}{\Omega-1}-\frac{1}{2(\Omega-1)^2}+1+\frac12\right)=\frac32$ (3) Konvergens!

—— ∘ ——

IMSC — mint α.