A villamos hálózatok klasszikus elmélete

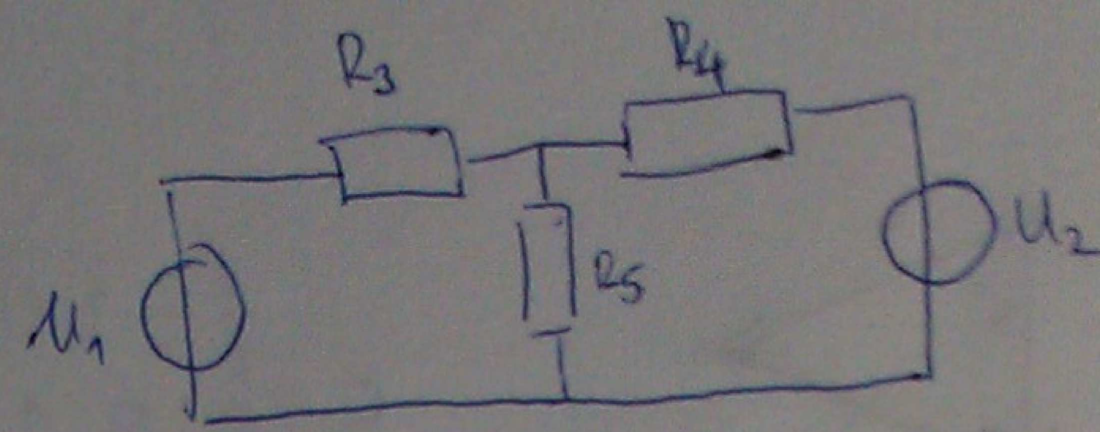
1847 Kirchoff

3 féle alkatrész

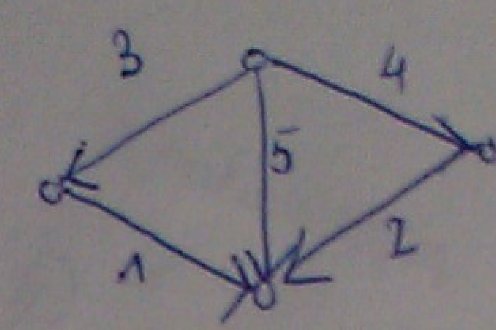
$u = R \cdot i$ ellenállás $(R>0)$

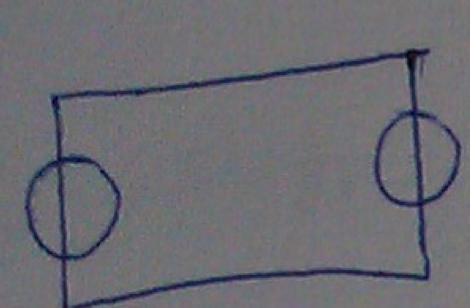
u adott
i tetsz

i adott
u tetsz.



2 lábú alkatrészek





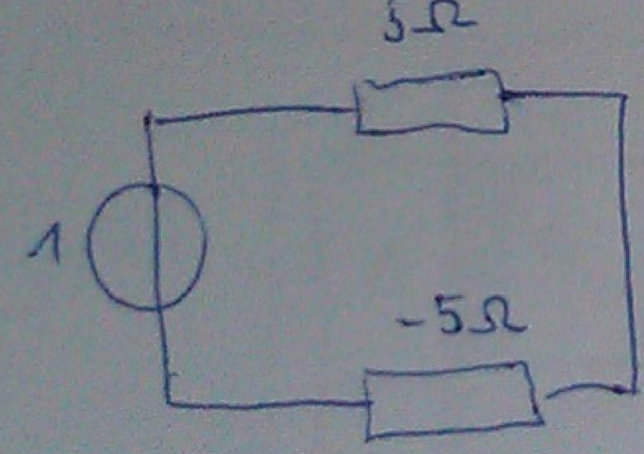
ellentmondás

Ha egy U I R-hálózat egyértelműen megoldható

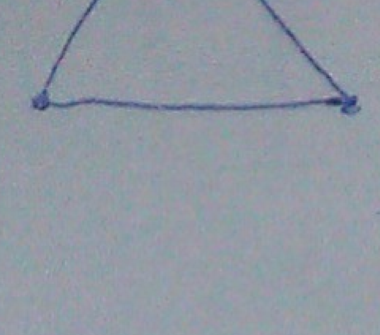
$\Downarrow$ $\not\Uparrow$

A hálózat gráfjában $\nexists$ kör csupa fesz.forrásból és

— 〃 — $\nexists$ vágás csupa áramforrásból

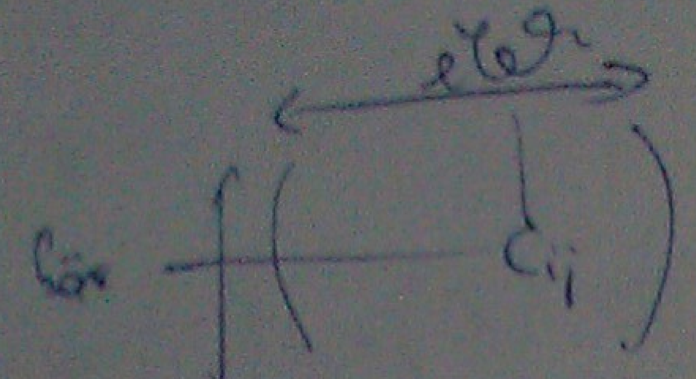


↯

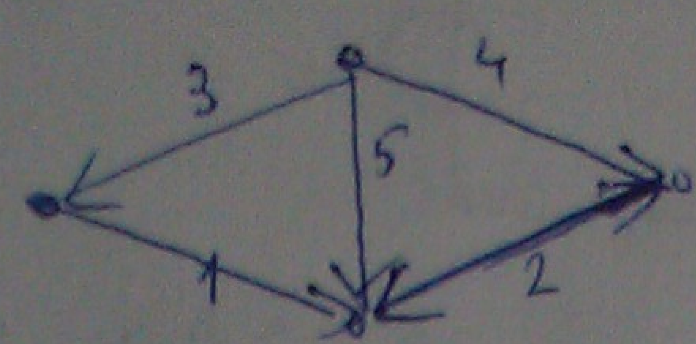


$\Leftrightarrow$ teljesül ha $\forall R > 0$!

Él-kör illeszkedési mátrix   C mátrix



$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } e_j \in C_i \text{ és} \\ -1 & \text{ha } e_j \in C_i \text{ és} \\ 0, & \text{ha } e_j \notin C_i \end{cases}$$



$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

vágásmátrix

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ & & \vdots & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Q él-vágás illeszkedési mátrix

$$q_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } e_j \in Q_i \text{ és} \\ -1, & \text{ha } e_j \in Q_i \text{ és} \\ 0, & \text{ha } e_j \notin Q_i \end{cases}$$

$\underline{\underline{C}}\,\underline{u} = \underline{0}$ $r(C) = e - n + 1$

$\underline{\underline{Q}}\,\underline{i} = \underline{0}$ $r(Q) = n - 1$

ha G összefüggő gráf

$\left.\begin{matrix} \geq \\ \geq \end{matrix}\right\}$ könnyűek

$$C = \left(\begin{array}{c|ccccc} & \pm 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & \pm 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & \cdots & & 0 & \pm 1 \end{array}\right)$$

$$Q = \left(\begin{array}{ccccc|c} \pm 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & \pm 1 & 0 & \cdots & 0 & \\ \cdots & & & \pm 1 & & \end{array}\right)$$

F   E − F

ez is komplementer

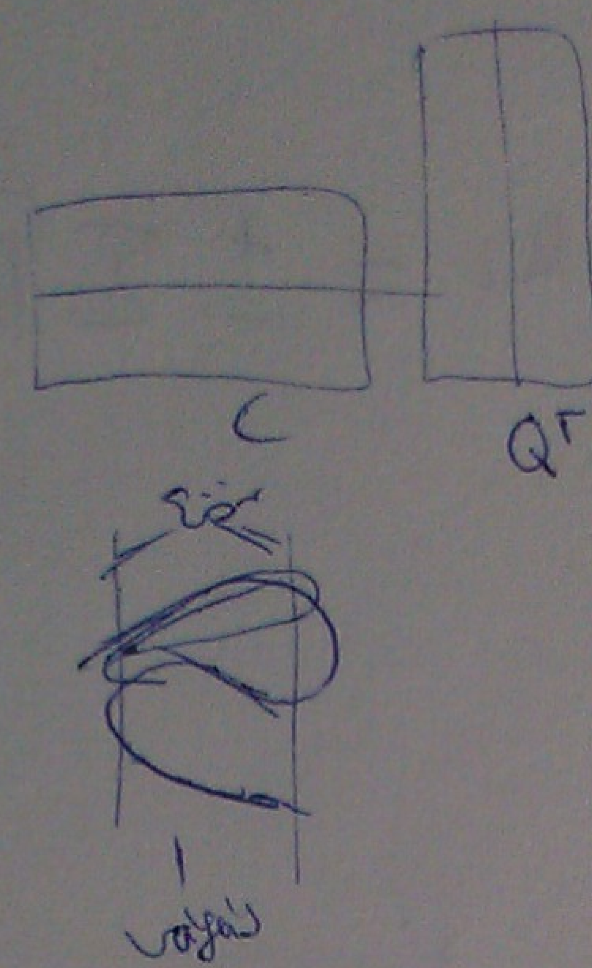
Sylvester: $\forall \underset{(p\times q)}{A} \cdot \underset{(q\times r)}{B}$ -re igaz $r(A)+r(B) \leq q + r(AB)$

$A \leftarrow C$

$B \leftarrow Q^T$

$$r(C)+r(Q) \leq e + \underbrace{r(C\cdot Q^T)}_{=0}$$

$\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T = \underline{\underline{0}}$

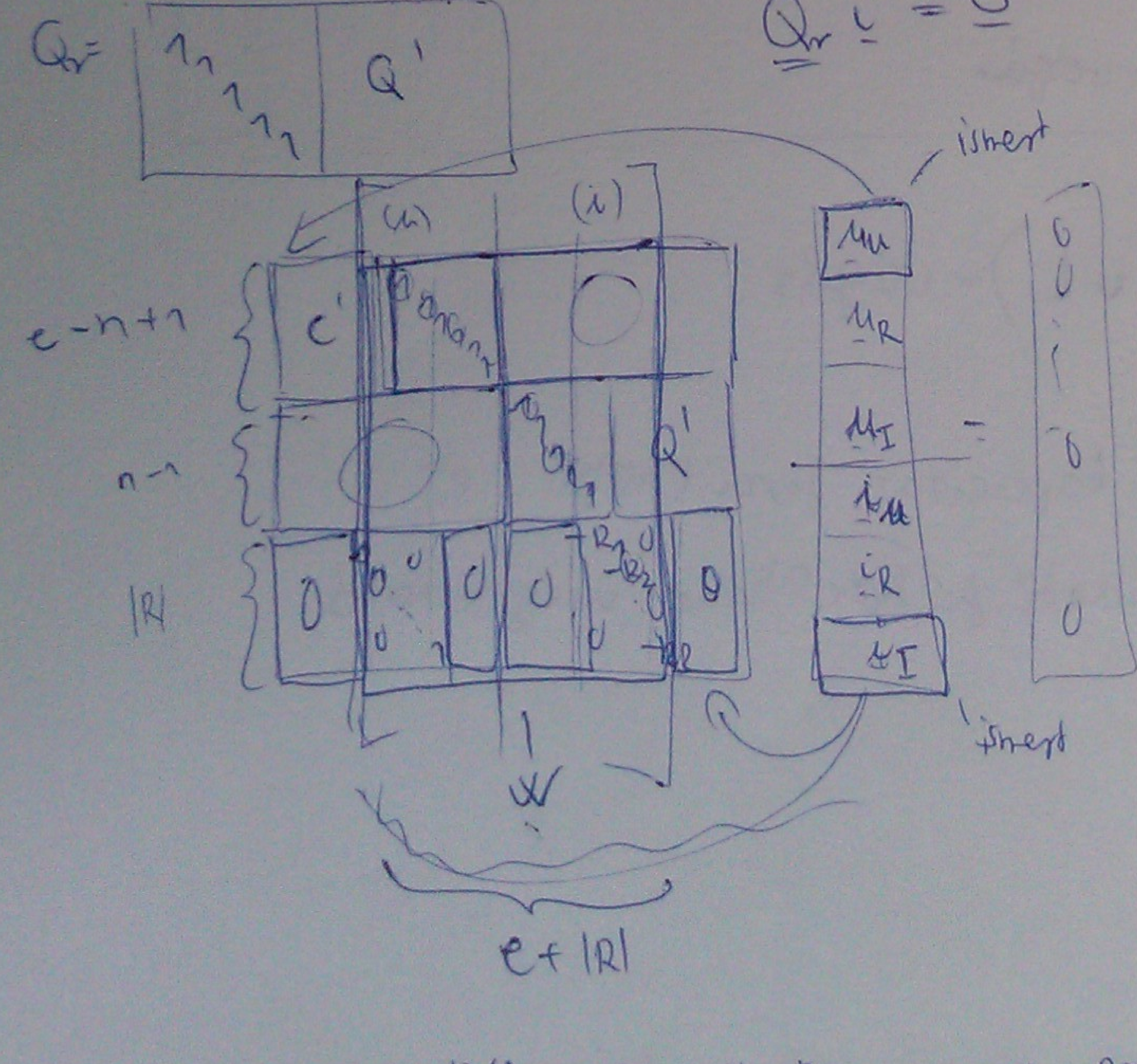


Kirchoff tétele biz $R \geq 0$; $\nexists$ U-kör és $\nexists$ I-vágás $\Rightarrow$ egyértelműen megoldható

$\exists$ fa, melyre $U \subseteq F$ és $I \cap F = \emptyset$

$$C_r = \begin{array}{cc} F & E-F \\ \left[\begin{array}{c|ccccc} C' & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{array}\right] \end{array} \qquad \underline{C_r}\, \underline{u} = \underline{0} \qquad E = U \cup R \cup I$$

$$Q_r = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & \\ & 1 & & & Q' \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \end{array}\right] \qquad \underline{\underline{Q_r}}\, \underline{i} = \underline{0}$$



$\forall$ megoldás

$$\begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \qquad e = |U| + |I| + |R|$$

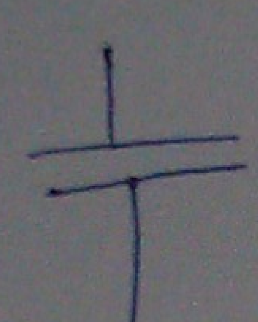
$$M_1 \cdot x_1 + M_2 \cdot x_2 = 0$$

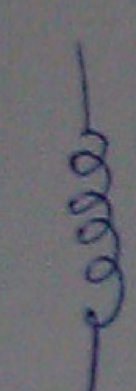
$$M_1 x_1 = -M_2 x_2$$

$$\det W = \sum_{\forall \pi} \pm \prod_{i=1}^{b} w_{i,\pi(i)} = \sum_{\substack{U \subseteq F \\ I \cap F = \emptyset}} \pm \prod_{r_i \notin F} R_i = \pm \sum \prod \ldots \neq 0$$

↓ egyértelműen megoldható

$$\pm \prod_{r_i \notin F} (-R_i)$$

 kondi $i = C \frac{du}{dt}$ ($i=0$ egyenáram)

 tekercs $u = L \frac{di}{dt}$ ($u=0$ egyenáram)

$\boxed{\begin{array}{l} R, C, L > 0 \Rightarrow UCRLI\text{-hálózat egyértelműen megoldható} \\ \Updownarrow \\ \nexists\ \cancel{\text{kö}}\ U\text{-kör és } \nexists\ I\text{-vágás} \end{array}}$

Tk:

$\nexists (U \cup C)$-kör és $\nexists (I \cup L)$-vágás

$\Downarrow$

$\exists$ egyértelmű megoldás és $\forall$ kapacitás feszültsége és $\forall$ tekercs árama egyetlen kezdeti feltételként megadható

Általában:

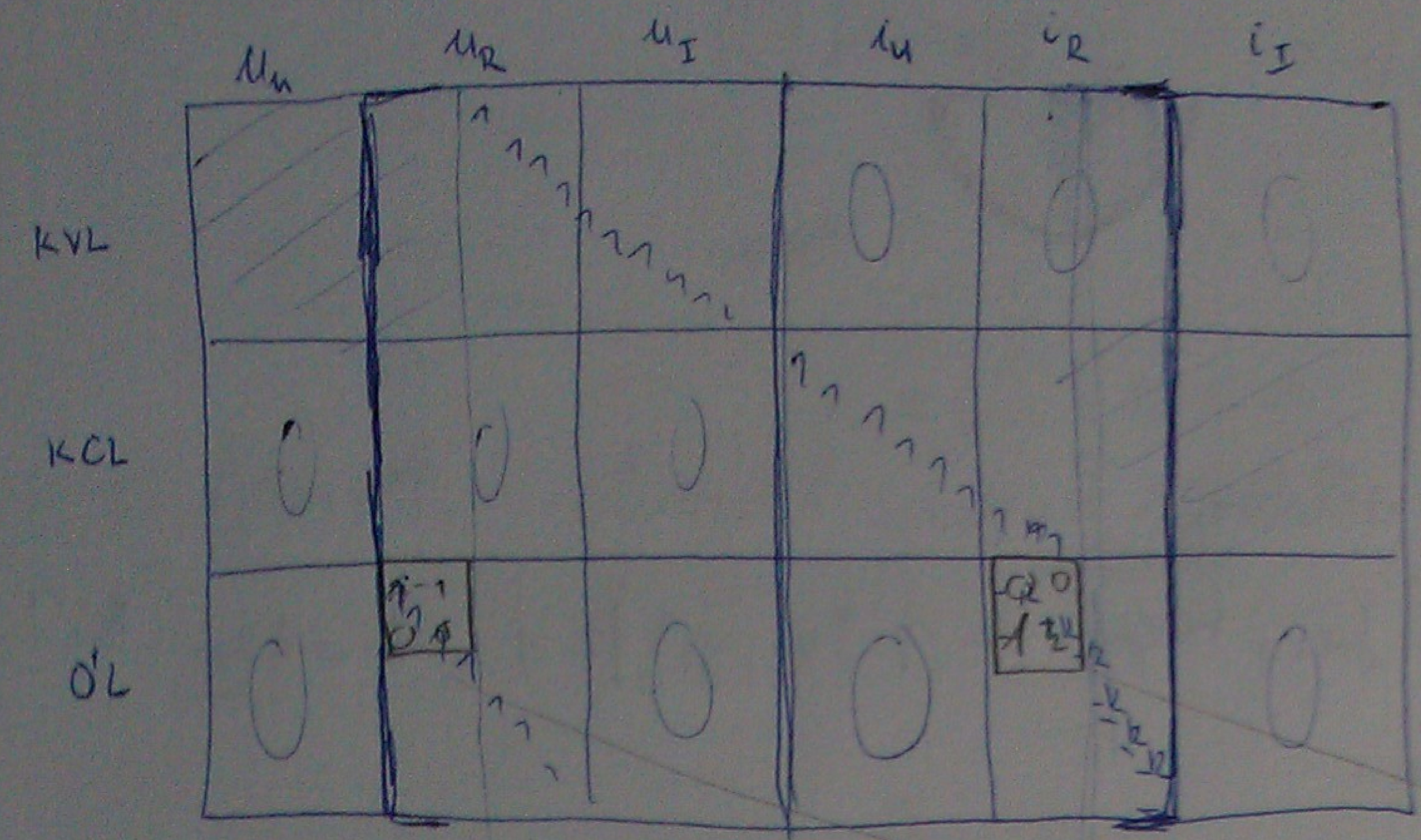
Legyen F olyan fa melyre $U \subseteq F$; $I \cap F = \emptyset$ és $\underbrace{|F \cap C| + |L - F|}_{\text{szabadsági fokok száma}}$

legyen max

éltípusok	súly
M	5
C	4
R	3
L	2
I	1

mohó alg. max összsúlyú fa

2012.04.25.
12/2



W

$\begin{bmatrix} k & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & k \end{bmatrix}$

o : kết ugr

UIR (CL)
1847
2 lábú alkatrészek

u_u és i_I nem ismeretlenek

W négyzetes mátrix, ennek kell nem szingulárisnak lenni

Kirchoff voltage Law
Current Law
Ohm's Law

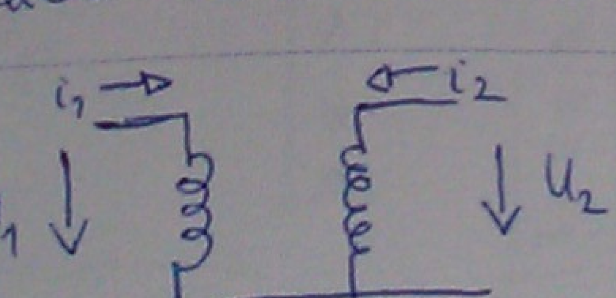
$$\det W = \pm \sum_{\substack{U \subseteq F \\ F \cap I = \emptyset}} \prod_{R_j \notin F} R_j \neq 0$$

ha U körmentes
I vágásmentes
$\forall i$-re $R_i > 0$

nem lehet 0, ha van olyan tulajdonságú fa

mi van ha többlábú alkatrészek vannak?

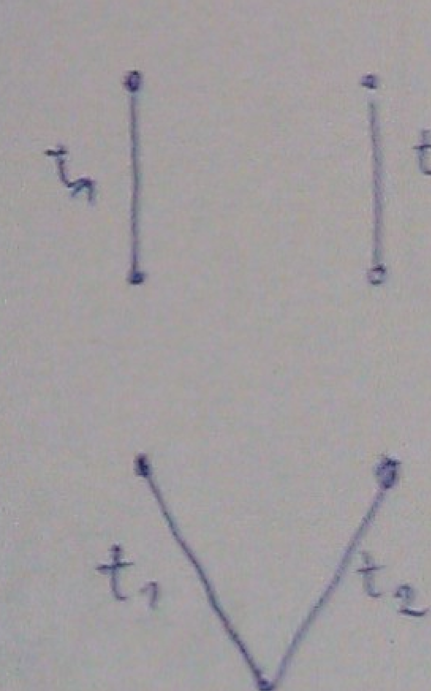
Transzformátor



$u_2 = k \cdot u_1$
$i_1 = -k \cdot i_2$

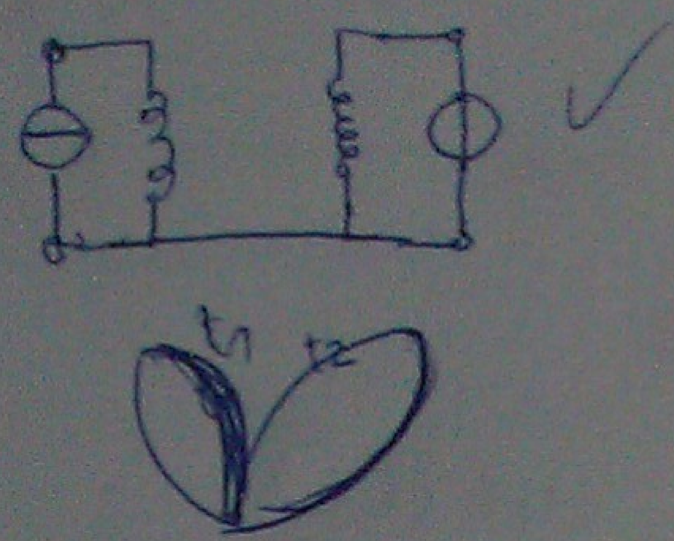
$$\begin{bmatrix} k & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

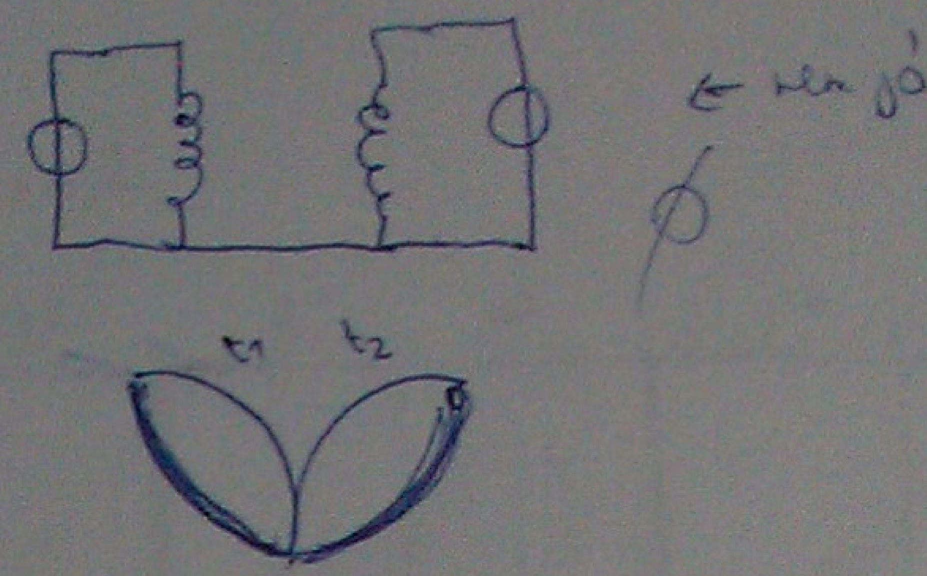
ilyeneket kell beírni a nagy mátrixba



$\exists F$ fa, hogy
$U \subseteq F$; $I \cap F = \emptyset$
$|F \cap \{t_1, t_2\}| = 1$
$\forall$ transzformátorra

és
$|F \cap \{t_1, t_2\}| = 1$

 ✓

 ← nem jó

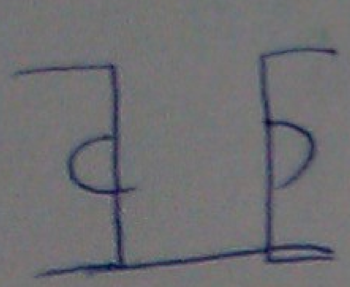
$\emptyset$

Input: G, br2 élek párba állítva $\{x_1,y_1\}, \{x_2,y_2\}, \dots, \{x_k,y_k\}$

Kérdés: ∃-e G-ben olyan F fa, hogy $|F\cap\{x_i,y_i\}|=1 \quad \forall i=1,2,\dots k$?

2MMP - matroid metszet probléma

$M_1 = M(G) \qquad M_2 = x_1 () y_1,\ x_2 () y_2, \dots\ x_k () y_k \oplus U_{e-2k,\,e-2k}$

Girátor 

$u_2 = Ri_1$
$u_1 = -Ri_2$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & -R & 0 \\ 1 & 0 & 0 & R \end{array}\right]\cdot\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\i_1\\i_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$\boxed{U\subseteq F;\ I\cap F=\emptyset \text{ és } |F\cap\{g_1,g_2\}|\neq 1}$

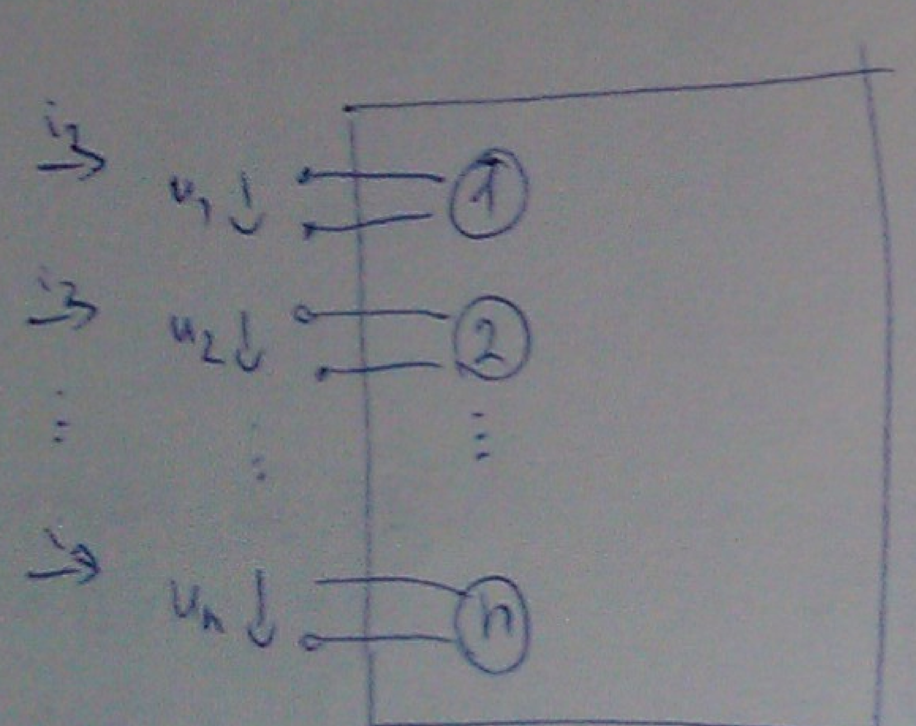
2PMP

Lovász

---

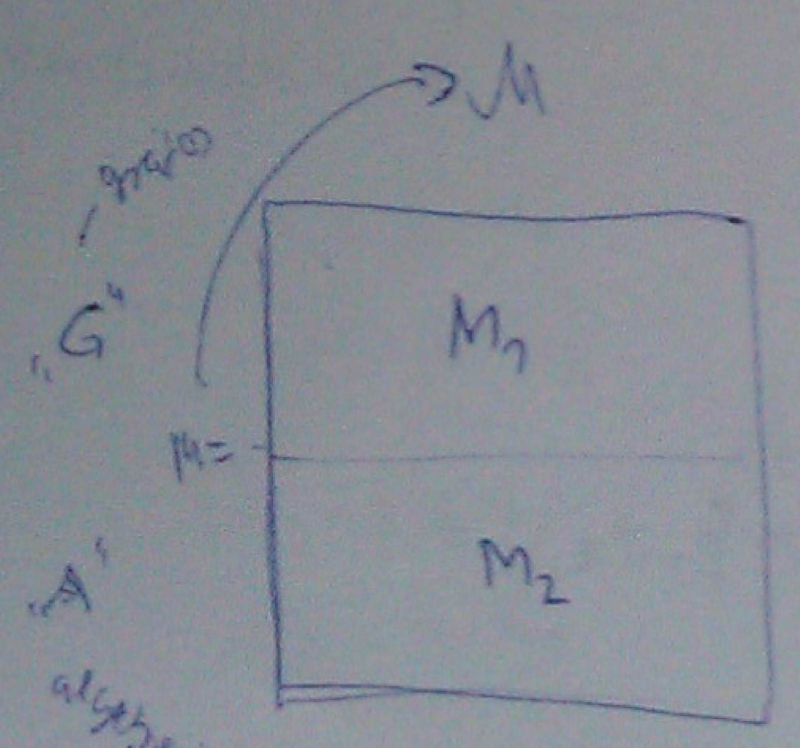
n-kapu

általánosítás:



$$n\ \overbrace{\left[\begin{array}{c|c} A & B \end{array}\right]}^{2n}\cdot\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\ \vdots\\u_n\\i_1\\i_2\\ \vdots\\i_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$r(A|B)=n$



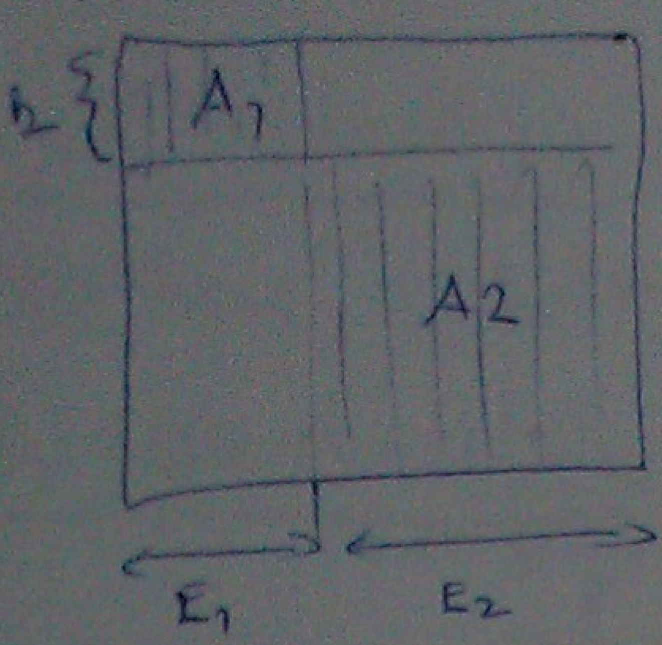
$M_1 \to \mathcal{G} \qquad M \subseteq \mathcal{G} \vee \mathcal{A}$

$M_2 \to \mathcal{A} \qquad$ általában $\neq$

Egyért. megoldh. $\Leftrightarrow \det M\neq 0 \Leftrightarrow M=(E,2^E)$

$\mathcal{G}\vee\mathcal{A}=(E,2^E)$

Laplace-féle kifejtés:



$\det = \sum \pm \det A_1 \det A_2$

$\binom{n}{k}$ féleképpen

↖ legalább 1 nem 0

~~det~~

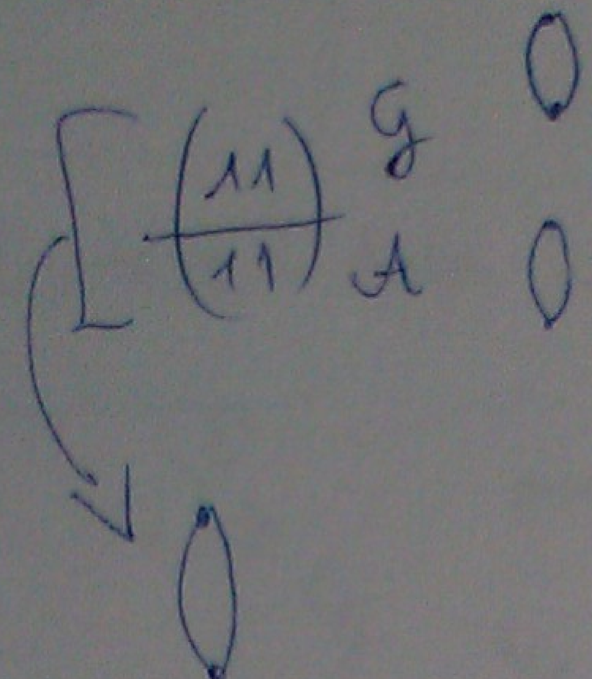
$E_1 \in G \quad E_2 \in A$

függetlenek

$M \subseteq G \vee A$

Biz:

$\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} G \\ A \end{matrix} \right.$



$G \vee A =$

$1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 0$

$M \neq G \vee A$

általában

ami M-ben független az $G \vee A$-ban is

Dualitási elv

$H = (G, A\mathbb{R})$ és G síkbarajzolható $\Rightarrow H^* = (G^*, A\mathbb{R}^*)$

Áramkör duálisa: Kirchoff egyenletek u helyett i-t

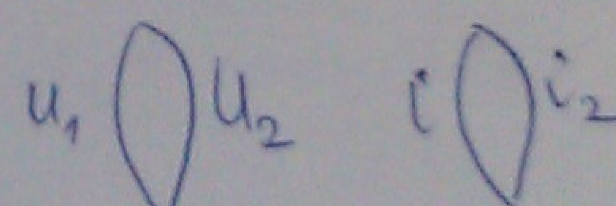
$u = L \frac{di}{dt} \;\Big|\; I = C \frac{du}{dt}$

U adott, I tetsz	I adott, U tetsz.
$u = R i$	$i = G \cdot u$
n-kapu	?

↓

$u_2 = k \cdot u_1$
$i_1 = -k \cdot i_2$

$\boxed{\begin{matrix} k & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{matrix}}$

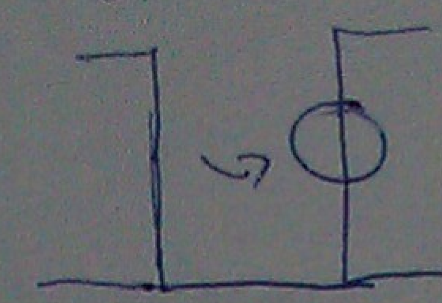


$u_1 = -k u_2$
$u_2 = k \cdot i_1$

$\boxed{\begin{matrix} 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & -1 \end{matrix}}$

1978 Kri - Reski

áramvezérelt fesz. forrás (műveleti erősítő)



$u_2 = k \cdot i_1$

$u_1 = 0$

$i_2 =$ tetsz.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -k & 0 \end{vmatrix}$$

itt nem működik az u és i felcserélése