Valószínűségszámítás B

2. előadás

Tóth Dávid (BME SZIT)

2023. március 6.

Emlékeztető: Klasszikus valószínűség

Múlt héten volt:

Definíció. Legyen Ω egy véges eseménytér, és legyen $A \subset \Omega$. Definiáljuk az A esemény $\mathbb{P}(A)$ *valószínűségét* a

$$\mathbb{P}(A) := \frac{|A|}{|\Omega|}$$

formulával. Ekkor azt mondjuk, hogy az Ω eseménytér, a rajta megadott események (tehát Ω részhalmazai) és a fenti formulával definiált valószínűségük együttesen egy *klasszikus valószínűségi mezőt* alkotnak.

Valószínűségi mezők

A klasszikus valószínűségi mezők nem elegendőek céljainkhoz.

Példák.

- Klasszikus valószínűségi mező esetén az Ω eseménytér véges halmaz kell legyen, sok esetben ez a feltétel nem teljesül.
- Amikor két kockadobás lehetséges kimeneteleit a kockák megkülönböztetése nélkül (csak a két eredmény megadásával) próbáljuk meg leírni, akkor a kimenetelek nem azonos valószínűséggel adódnak.
- Egy cinkelt kocka viselkedését nem tudjuk a klasszikus mezővel leírni, hiszen az a különböző kimenetelek tekintetében kifejezetten különbözőképp viselkedik.

Valószínűségi mezők

Absztraktabb definícióra van szükség:

- Elvonatkoztatunk attól, hogy az események valószínűségét konkrétan milyen formula definiálta.
- Milyen matematikai objektumot kaptunk a korábbi definícióval, és az milyen tulajdonásgokkal bír?
- A valószínűségek valójában eseményekhez rendelt számok, vagyis **a valószínűség egy az események halmazán értelmezett, valós értékű függvény.**
- A függvényértékek a $[0; 1]$ intervallumban kell legyenek.
- Azt szeretnénk, hogy az 1 függvényérték a teljes bizonyosságot reprezentálja ($\Longrightarrow \mathbb{P}(\Omega) = 1$), míg 0 legyen a valószínűség akkor, ha valami nem következhet be ($\Longrightarrow \mathbb{P}(\emptyset) = 0$).

Valószínűségi mezők

Absztraktabb definícióra van szükség:

- Elvárható, hogy ha két esemény egyszerre nem következhet be, akkor annak a valószínűsége, hogy egyik a kettőből bekövetkezik, az egyes valószínűségek összege legyen.
- Ezt a matematika nyelvén úgy fogalmazhatjuk meg, hogy ha $A \cap B = \emptyset$, akkor a $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ összefüggésnek fenn kell állnia.
- A klasszikus valószínűségre mindezek a valószínűséget definiáló formula *következményei*.
- Az általános esetben (lényegében) ezeket fogjuk *előírni*.
- Egy definícióban érdemes minél kevesebb tulajdonság teljesülését előírni, amelyekből a többi már következik!

Valószínűségi mezők

Definíció. Legyen Ω eseménytér, $\mathcal{A}$ pedig ezen eseménytér eseményeinek halmaza. Tegyük fel, hogy a $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0; 1]$ függvényre a következők teljesülnek:

(i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,

(ii) (σ-additivitás) ha $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{A}$ páronként egymást kizáró események, vagyis $A_i \cap A_j = \emptyset$ teljesül minden $i, j \in \mathbb{N}^+$, $i \neq j$ esetén, akkor

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

Ekkor a $\mathbb{P}$ függvényt az $\mathcal{A}$ halmazon értelmezett *valószínűségi mértéknek* nevezzük. Továbbá, ha $\mathbb{P}$ valószínűségi mérték az $\mathcal{A}$ halmazon, akkor az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ hármast *valószínűségi mezőnek* nevezzük.

Valószínűségi mezők

Megjegyzések.

- A fenti definícióban nem voltunk teljesen precízek az $\mathcal{A}$ halmaz tekintetében.
- Általában fel kell tenni, hogy $\mathcal{A}$ egy ún. σ-algebra. Ezekkel a technikai részletekkel nem foglalkozunk, a félév első felében feltételezhetjük, hogy $\mathcal{A}$ az Ω összes részhalmazának halmaza.
- Később röviden visszatérünk még erre a kérdésre.

Valószínűségi mezők

Megjegyzések.

- A klasszikus valószínűség teljesíti a fenti definícióban felsorolt (i) és (ii) tulajdonságokat, vagyis a klasszikus valószínűség is egy valószínűségi mérték.
- A definícióban szereplő (i) tulajdonság teljesülését a klasszikus valószínűség esetén igazoltuk.
- A σ-additivitás is könnyen levezethető a klasszikus valószínűség tulajdonságaiból azt is felhasználva, hogy klasszikus valószínűségi mezők esetén véges eseménytérrel dolgozunk.

A valószínűségi mérték tulajdonságai

Állítás. (A valószínűségi mérték tulajdonságai)
Legyen $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0;1]$ egy valószínűségi mérték egy eseménytér eseményeinek $\mathcal{A}$ halmazán. Ekkor

(i) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$,

(ii) (additivitás) ha $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ páronként egymást kizáró események, akkor

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \mathbb{P}(A_1) + \cdots + \mathbb{P}(A_n),$$

speciálisan, ha $A, B \in \mathcal{A}$ és $A \cap B = \emptyset$, akkor

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B),$$

(iii) minden $A \in \mathcal{A}$-ra $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$,

(iv) ha $A, B \in \mathcal{A}$ és $B \subset A$, akkor $\mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(A)$.

A valószínűségi mérték tulajdonságai

Megjegyzés. A (iv) tulajdonságnál fennálló szituációban, tehát ha az A és B eseményekre $B \subset A$ teljesül, azt mondjuk, hogy a B esemény *maga után vonja A-t*.

A valószínűségi mérték tulajdonságai

Bizonyítás. (i) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

- Használjuk a valószínűségi mérték σ-additivitását az $A_i = \emptyset$ választással minden $i \geq 1$ index esetén.
- Ekkor az A_i halmazok páronként diszjunktak, így

$$\mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(\emptyset).$$

- A bal oldalon egy 0 és 1 közötti szám áll. $\Longrightarrow$ A jobb oldalon álló végtelen összeg értéke véges.
- Mivel az összeg minden tagja $\mathbb{P}(\emptyset)$, így ennek értéke 0.

A valószínűségi mérték tulajdonságai

Bizonyítás. (ii) (additivitás)

- Használjuk az (i) tulajdonságot és a mérték σ-additivitását.
- Legyenek $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ páronként diszjunkt halmazok, és legyen minden $i > n$ esetén $A_i = \emptyset$.
- Ekkor az $A_1, \ldots, A_n, A_{n+1}, \ldots \in \mathcal{A}$ halmazok továbbra páronként diszjunktak, és így

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) + \sum_{i=n+1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

- A jobb oldalon álló második összegben minden tag $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$, így a (ii) állítást beláttuk.

A valószínűségi mérték tulajdonságai

Bizonyítás. (iii) $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$

- Legyen $A \in \mathcal{A}$, ekkor $A \cap \overline{A} = \emptyset$, továbbá $\Omega = A \cup \overline{A}$.
- A valószínűségi mérték definíciójában szereplő (i) tulajdonság és a mérték additivitása miatt

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A \cup \overline{A}) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A}),$$

ezt átrendezve adódik az állítás.

A valószínűségi mérték tulajdonságai

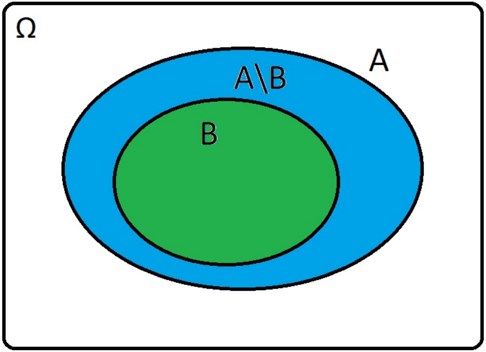
Bizonyítás. (iv) $B \subset A \Longrightarrow \mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(A)$

- Ha $B \subset A$ teljesül, akkor $A = B \cup (A \setminus B)$ teljesül.
- B és $A \setminus B$ egymást kizáró események, így a $\mathbb{P}$ additivitása miatt

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B \cup (A \setminus B)) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \setminus B) \geq \mathbb{P}(B),$$

mert $\mathbb{P}(A \setminus B) \geq 0$.

A valószínűségi mérték tulajdonságai



A valószínűségi mérték tulajdonságai

Mit mondhatunk két esemény uniójának valószínűségéről, amennyiben azok nem (feltétlenül) egymást kizáróak?

Állítás. (Szita-formula 2 eseményre)
Legyenek A, B egy valószínűségi mező tetszőleges eseményei, ekkor

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

A valószínűségi mérték tulajdonságai

Bizonyítás.

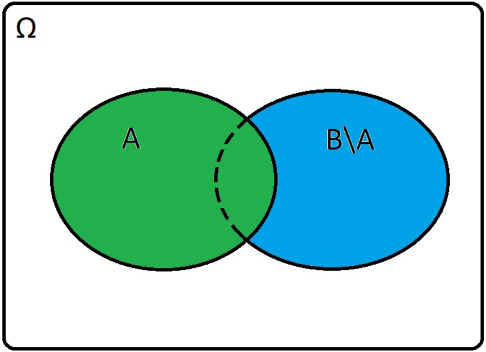
- Az $A \cup B$ esemény 2 egymást kizáró részre bontható úgy, hogy csoportítjuk az elemeit aszerint, hogy benne vannak A-ban vagy sem.
- Utóbbi kimenetelek a $B \setminus A$ halmazt alkotják, így tehát

$$A \cup B = A \cup (B \setminus A).$$

- A valószínűségi mérték additivitása miatt

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A).$$

A valószínűségi mérték tulajdonságai



A valószínűségi mérték tulajdonságai

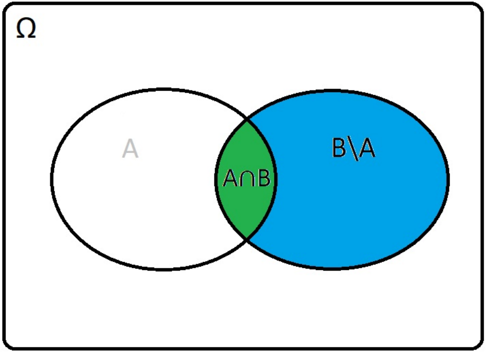
Bizonyítás.

- Csempésszük be a jobb oldalra a $\mathbb{P}(A \cap B)$ értéket egyszer pozitív, egyszer pedig negatív előjellel, a kifejezés értékét így nem változtatva:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

- $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ a B esemény egy egymást kizáró eseményekre való felbontását adja.
- Így $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A \cap B)$, ezt a fenti egynelőség jobb oldalán behelyettesítve a bizonyítandó állítást kapjuk.

A valószínűségi mérték tulajdonságai



A valószínűségi mérték tulajdonságai

- A szita-formulát szokás Poincaré-formulának is nevezni.
- A fenti állítás kettőnél több halmaz uniójára is általánosítható.
- Három esemény esetén:

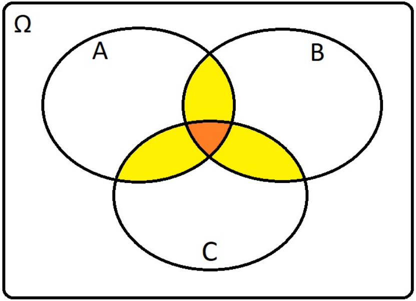
  Az alapötlet itt is az, hogy a három halmazt külön-külön megmérve a halmazpárok közös részeit duplán számoljuk, így azok mértékét le kell vonni.

  Ekkor viszont azt a részt, ami mindhárom eseményben benne van, végül egyszer sem számoljuk, ezért annak mértékét végül még hozzá kell adni az egészhez.

A valószínűségi mérték tulajdonságai

Állítás. (Szita-formula 3 eseményre) Legyenek A, B, C egy valószínűségi mező tetszőleges eseményei, ekkor

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) \\ - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(C \cap A) \\ + \mathbb{P}(A \cap B \cap C).\end{aligned}$$



Példák valószínűségi mértékre

Hogyan adhatunk meg egy valószínűségi mértéket?

Példa. Tegyük fel, hogy egy cinkelt kockával sokszor dobva

- az esetek $\dfrac{16}{100}$ részében dobunk egyest vagy kettest,
- az esetek $\dfrac{17}{100}$ részében dobunk hármast, négyest, ötöst és hatost.

Ekkor jogosnak érezhetjük azt mondani, hogy a különböző dobások valószínűségeit a fenti törtek adják.

Példák valószínűségi mértékre

Modell:

- Eseménytér: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Az egyetlen kimenetelből álló eseményekre

$$\mathbb{P}(\{1\}) = \mathbb{P}(\{2\}) = 0{,}16$$
$$\mathbb{P}(\{3\}) = \mathbb{P}(\{4\}) = \mathbb{P}(\{5\}) = \mathbb{P}(\{6\}) = 0{,}17$$

kell teljesüljön.

Példák valószínűségi mértékre

- Ha egy valószínűségi mérték a fenti egyenlőségeket teljesíti, akkor ezek már meghatározzák annak értékét minden esemény esetén.
- Ugyanis: bármely esemény ilyen kimenetelekből álló (egy elemű) események páronként diszjunkt uniója $\Longrightarrow$ a mérték additivitása miatt a valószínűsége az őt alkotó kimenetelek valószínűségének összege kell legyen.
- Például az $E = \{2, 4, 6\}$ eseményre

$$E = \{2\} \cup \{4\} \cup \{6\},$$

és így a $\mathbb{P}(E) = 0{,}16 + 2 \cdot 0{,}17 = 0{,}5$ egyenlőségnek **teljesülnie kell**.

Példák valószínűségi mértékre

A kimenetelek valószínűségének megadása meghatározza az egyetlen lehetséges $\mathbb{P}$ függvényt, de azt nem mutattuk meg, hogy ez a valóban valószínűségi mérték!

Szerencsére ez így van, és fenti módszer gond nélkül általánosítható, amennyiben az eseménytér véges vagy megszámlálhatóan végtelen (ebben az esetben a valószínűségi mezőt *diszkrétnek* nevezzük), továbbá a kimenetelek valószínűségeinek összege 1 (ez utóbbi biztosítja a $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ feltételt a mérték definíciójában).

(A fenti példában mindkét feltétel teljesült.)

Példák valószínűségi mértékre

Állítás. Legyen Ω egy véges vagy megszámlálhatóan végtelen halmaz. Legyen továbbá $p : \Omega \to [0;1]$ egy tetszőleges súlyfüggvény, amely egy $\omega \in \Omega$ kimenetelhez a $p(\omega) \in [0;1]$ súlyt rendeli. Tegyük fel, hogy

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$$

teljesül. Definiáljuk a $\mathbb{P}$ függvény értékét egy $A \subset \Omega$ eseményre a következőképp:

$$\mathbb{P}(A) := \sum_{\omega \in A} p(\omega).$$

Ekkor a $\mathbb{P}$ függvény egy valószínűségi mérték az Ω eseményeinek halmazán.

Példák valószínűségi mértékre

Példa.

- Feldobunk két pénzérmét, az egyes dobásokat ezúttal nem különböztetjük meg.
- A kimenetelek például megadhatók úgy, ha megadjuk a fejek számát $\Longrightarrow$ az $\Omega = \{0, 1, 2\}$ eseménytérrel dolgozunk.
- Mivel 1 fejet kétféleképp is kaphatunk, így az egyes kimenetelekhez a következőképp rendelünk valószínűségeket:

$$p(0) = p(2) = \frac{1}{4}, \qquad p(1) = \frac{1}{2}.$$

Példák valószínűségi mértékre

Példa.

- A fenti álltítás értelmében a p valószínűségi súlyfüggvény egyértelműen meghatároz egy valószínűségi mértéket az Ω eseményeinek halmazán.
- Például annak a valószínűsége, hogy a dobások közt van fej:

$$\mathbb{P}(\{1,2\}) = p(1) + p(2) = \frac{3}{4}.$$

Példák valószínűségi mértékre

Megjegyzések.

- Ebben a példában a p súlyfüggvényt azért választottuk így, hogy jól használható modellt kapjunk a tényleges pénzdobásra.
- Elvi szempontból azonban semmi akadálya annak, hogy más valószínűségeket rendeljünk az egyes kimenetelekhez.
- Például a konstans $\frac{1}{3}$ súly éppen a klasszikus valószínűséget adná.
- De: más választások nem volnának alkalmasak a valóság jó leírására.

Példák valószínűségi mértékre

Megjegyzések.

- A fentiek szerint az eseménytérből nem következik maga valószínűségi mérték választása, ezt az Ω halmaztól függetlenül határozhatjuk meg, éppen ezért kezeljük ezeket az objektumokat külön egymástól.
- Amikor a valószínűségi mérték is rögzített, akkor már nem csak egy eseménytérről, hanem egy valószínűségi mezőről beszélhetünk.

Példák valószínűségi mértékre

Megjegyzések.

- Az fenti állítás azt az érzést keltheti, hogy megoldottuk a véletlen jelenségek modellezésének problémáját.
- Az Ω számosságára vonatkozó feltétel az állításban azonban óriási korlátozást jelent.
- Valójában a leggyakoribb alkalmazások többségéhez nem elegendőek a megszámlálható (tehát véges vagy megszámlálhatóan végtelen) eseményterek.
- A leggyakrabban előkerülő ilyen példák a véges halmazokon túl a természetes számok $\mathbb{N}$ halmaza, az egész számok $\mathbb{Z}$ halmaza ill. a rancionális számok $\mathbb{Q}$ halmaza.
- De ha például egy valós intervallumban felvett véletlen értékről beszélünk, akkor ezen értékek, vagyis az intervallum elemeinek száma már nem megszámlálható.
- Hasonló példákkal majd a félév második felében foglalkozunk.

Feltételes Valószínűség

Kérdés: a véletlen eseményekhez rendelt valószínűségeket hogyan változtják meg bizonyos, az eredeti helyzethez képest új feltételezések vagy a szituációval kapcsolatban nyert plusz információk?

A fenti kérdés megválaszolásához a feltételes valószínűség fogalma lesz segítségünkre.

Feltételes Valószínűség

Példa.

- Tegyük fel, hogy egy kockadobás után valaki elárulja nekünk, hogy a dobott szám páros, azaz bekövetkezett az $E = \{2, 4, 6\}$ esemény.
- Milyen valószínűségi modellt használjuk ebben az esetben?
- Megváltoztathatnánk az eseményteret, hiszen itt már csak három kimnetel lehetséges, tehát lehet $\Omega = E$.
- Az is értelemszerű, hogy ez a három kimenetel ekkor ugyanolyan valószínű adódik, tehát mindhárom eset $1/3$ eséllyel következik be.

Feltételes Valószínűség

Példa.

- A fenti választás nem feltétlenül praktikus.
- Lehetséges, hogy további dobások esetén ez az információ nem áll majd rendelkezésünkre, és akkor ismét más modellt kell alkalmaznunk.
- Az is lehet, hogy megtudjuk, hogy páros-e az eredmény, de ekkor a két eshetőség két különböző eseményteret eredményezhet.
- Így feleslegesen komplikáltá és nehézkessé válik a kísérletek precíz matematikai leírása.

Feltételes Valószínűség

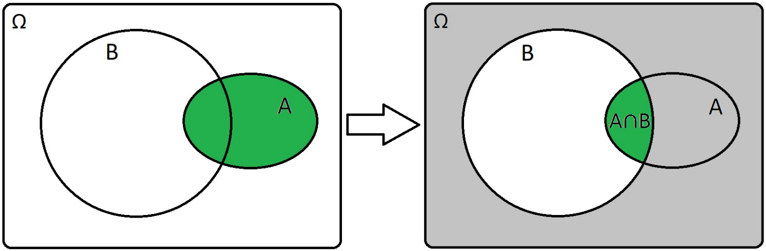
- Az eseménytér megváltoztatása helyett a *feltételes valószínűség* fogalmát fogjuk használni.
- Ez oly módon szűkíti le az eseményteret a feltételezetten bekövetkező eseményre, hogy az azon kívül eső kimenetelek valószínűségét nullává teszi.
- Ezzel ekvivalens, hogy a feltételben szereplő esemény 1 valószínűséggel bekövetkezik. Ezt pedig úgy érjük el, hogy leosztunk annak valószínűségével.

Feltételes Valószínűség

Definíció. Legyenek A, B egy valószínűségi mező eseményei, ahol $\mathbb{P}(B) > 0$ teljesül. Ekkor az A eseménynek a B eseményre vett *feltételes valószínűsége*

$$\mathbb{P}(A \mid B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \qquad (\text{"}A \text{ valószínűsége, feltéve } B\text{"}).$$

Feltételes Valószínűség



Feltételes Valószínűség

Példa.

- Ismét: kockadobás, tegyük fel, hogy a dobás páros.
- Meghatározzuk annak a valószínűségét, hogy kettest dobunk.
- Most is a szokásos $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ eseményteret használjuk, $\mathbb{P}$ pedig a klasszikus valószínűséget jelöli.
- A fenti definíció értelmében a kettes dobás valószínűsége az E feltétel mellett

$$\mathbb{P}(\{2\} \mid E) = \frac{\mathbb{P}(\{2\} \cap E)}{\mathbb{P}(E)} = \frac{\mathbb{P}(\{2\})}{\mathbb{P}(E)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3},$$

ami megfelel az előzetes várakozásainknak.

Feltételes Valószínűség

Példa.

- Legyen most A az az esemény, hogy 3-nál nagyobbat dobunk.
- Ekkor az A valószínűsége az E feltétel mellett

$$\mathbb{P}(A \mid E) = \frac{\mathbb{P}(A \cap E)}{\mathbb{P}(E)} = \frac{\mathbb{P}(\{4,5,6\} \cap \{2,4,6\})}{\mathbb{P}(E)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(\{4,6\})}{\mathbb{P}(E)} = \frac{2/6}{1/2} = \frac{2}{3}.$$

Feltételes Valószínűség

Példa. Továbbá (az elvárásainknak megfelelően)

$$\mathbb{P}(E \mid E) = \frac{\mathbb{P}(E \cap E)}{\mathbb{P}(E)} = \frac{\mathbb{P}(E)}{\mathbb{P}(E)} = 1,$$

$$\mathbb{P}(\{1\}) = \frac{\mathbb{P}(\{1\} \cap E)}{\mathbb{P}(E)} = \frac{\mathbb{P}(\emptyset)}{\mathbb{P}(E)} = 0.$$

Feltételes Valószínűség

A feltételes valószínűség minden esetben egy 0 és 1 közötti szám, mert $A \cap B \subset B$ miatt $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(B)$ teljesül.

A fogalom elnevezése azonban nem csak emiatt jogos:

Állítás Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ egy valószínűségi mező, legyen továbbá $B \in \mathcal{A}$ egy esemény, melyre $\mathbb{P}(B) > 0$ teljesül. Definiáljuk a $\mathbb{P}_B : \mathcal{A} \to [0; 1]$ függvényt a $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A \mid B)$ formulával. Ekkor $\mathbb{P}_B$ egy valószínűségi mérték az Ω eseménytér eseményeinek $\mathcal{A}$ halmazán (vagyis $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_B)$ egy valószínűségi mező).

Feltételes Valószínűség

- A fenti állítás azt mutatja, hogy a feltételes valószínűség segítségével egy valószínűségi mértékből újabbakat konstruálhatunk.
- Tehát mindaz, amit a valószínűségi mértékekre általában belátunk, igaz a feltételes valószínűségre is.
- Például
$$\mathbb{P}(\overline{A} \mid B) = 1 - \mathbb{P}(A \mid B)$$
teljesül minden A és B eseményre, feltéve persze, hogy $\mathbb{P}(B) > 0$.

Események függetlensége

- $\mathbb{P}(A \mid B)$ és a $\mathbb{P}(A)$ összehasonlítása képet ad arról, hogy hogyan befolyásolja a B bekövetkezése az esélyeket az A esemény bekövetkezésére.
- Fontos speciális eset: amikor ez a valószínűség a B bekövetkezésétől függetlenül ugyanaz marad, tehát

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

- A fenti egyenlőséget $\mathbb{P}(B)$-vel beszorozva a

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

  adódik.
- Ez az, amit a függetlenség *definíciójához* felhasználunk.

Események függetlensége

Definíció. Legyenek A és B egy valószínűségi mező eseményei, ekkor A és B egymástól *függetlenek*, ha

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

teljesül.

Események függetlensége

Megjegyzés.

- Ha $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B) > 0$, akkor

  $$\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A) \Leftrightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \Leftrightarrow \mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(B),$$

  és mindhárom egyenlet éppen azt jelenti, hogy A és B függetlenek.
- Jól látszik a fenti ekvivalens összefüggésekből, vagy akár a definiáló egyenletből, hogy a fogalom szimmetrikus.
- A függetlenség definíciójában nem követeljük meg, hogy bármelyik esemény pozitív valószínűségű legyen, az definiáló egyenlet mindkét oldala értelmes akkor is, ha az A és B események bármelyike 0 valószínűségű.

Események függetlensége

Az eseményekre fent definiált függetlenség fogalma akkor használható, ha jól illeszkedik a valós esetekben használt függetlenségfogalomhoz, vagyis ha a tapasztalati úton egymástól függetlennek ítélt jelenségek a modellben is azok a fenti definíció értelmében.

Események függetlensége

Példa.

- Kétszer egymás után feldobunk egy szabályos pénzérmét.
- Ha ezt sokszor egymás után végrehajtjuk, azt tapasztaljuk, hogy a második dobás nagyjából az esetek felében lesz fej vagy írás akkor is, ha az első dobásra fejet kaptunk, és akkor is, ha elsőre írás adódott.
- Azaz tapasztalat szerinte az első dobás eredménye semmilyen módon nem befolyásolja az esélyeket a második dobásnál.

Események függetlensége

Ugyanez a példa a modellünkben:

- Az eseményterünk az $\Omega = \{F, I\} \times \{F, I\}$ szorzathalmaz, mindegyik kimenetel $1/4$ valószínűséggel következik be.
- Legyen A az az esemény, hogy elsőre fejet dobunk, B pedig az, hogy a második dobás fej, azaz

$$A = \{(F, F), (F, I)\}, \qquad B = \{(F, F), (I, F)\}.$$

- Tehát

$$\mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}(\{(F, F)\}) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A),$$

  így A és B függetlenek a fenti definíció értelmében (is).
- Ugyanezt a következő számolással is igazolhattuk volna:

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(\{(F, F)\})}{\mathbb{P}(\{(F, F), (F, I)\})}$$
$$= \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(B).$$

Események függetlensége

Ugyanez a példa a modellünkben:

- Továbbá annak a valószínűsége, hogy másodszorra írást dobunk, ha tudjuk, hogy elsőre fejet kaptunk:

$$\mathbb{P}(\overline{B} \mid A) = 1 - \mathbb{P}(B \mid A) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(\overline{B}).$$

- Így tehát A és $\overline{B}$ is függetlenek.
- Hasonlóképp adódik ugyanez az $\overline{A}$ és B, ill. az $\overline{A}$ és $\overline{B}$ eseményekre is.
- Vagyis az, hogy az A esemény bekövetkezik vagy sem, semmilyen hatással nincs a B bekövetkezésének esélyeire, ami persze teljes összhangban van a várakozásainkkal.

Események függetlensége

Ez utóbbi jelenség általában is teljesül:

Állítás. Tegyük fel, hogy egy valószínűségi mező A és B eseményei egymástól függetlenek. Ekkor $\overline{A}$ és B és függetlenek. Következésképp az A és $\overline{B}$ ill. $\overline{A}$ és $\overline{B}$ eseménypárok szintén függetlenek.

Események függetlensége

Bizonyítás.

- Azt szeretnénk belátni, hogy $\mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(B)$.
- Induljunk ki az egyenlet jobb oldalából:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(B) &= (1 - \mathbb{P}(A))\mathbb{P}(B) \\ &= \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).\end{aligned}$$

- Korábban már láttuk, hogy $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ a B halmaz egy egymást kizáró események uniójára való felbontása, továbbá hogy $B \setminus A = \overline{A} \cap B$.
- A valószínűségi mérték tulajdonásgai szerint

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B),$$

ezt átrendezve és behelyettesítve a fenti egyenlőség jobb oldalára adódik $\overline{A}$ és B függetlensége.

Események függetlensége

Bizonyítás.

- A függetlenség szimmetrikus reláció, azaz ha A és B függetlenek, akkor B és A is azok, így a fent látottak szerint $\overline{B}$ és A is függetlenek.
- Ebből pedig - ismét megcserélve az események szerepét, majd alkalmazva a bizonyított állítást - azt kapjuk, hogy $\overline{A}$ és $\overline{B}$ is függetelen események.

Események függetlensége

Mivel a függetlenséget a valószínűségek szintjén definiáljuk, tehát ez csak a $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ egyenlet teljesülését jelenti, előfordulhat, hogy az szemléletesen összefüggőnek tűnő eseményeke is érvényes.

Események függetlensége

Példa.

- Dobjunk egy szabályos dobókockával, és legyen A az az esemény, hogy a dobott szám kisebb, mint 4, P pedig az, hogy a dobott szám prím.
- Azaz

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \quad \mathbb{P}(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3},$$

$$P = \{2, 3, 5\}, \qquad \mathbb{P}(P) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

- Továbbá

$$\mathbb{P}(A \cap P) = \mathbb{P}(\{2, 3\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(P),$$

tehát A és P függetlenek.

Események függetlensége

Hogyan lehet a függetlenség fogalmát több eseményre kiterjeszteni?

Példa.

- Háromszor feldobunk egy pénzérmét. Legyen A az az esemény, hogy ez első dobás fej, B az, hogy a második fej, C pedig az, hogy harmadszorra fejet dobunk.
- Azt várjuk, hogy mindegyik dobás a többi eredményétől függetlenül kb. az esetek $1/2$ részében lesz fej, így tehát az esetek $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ részében kapunk 3 darab fejet.
- Ezt valószínűségek segítségével a

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$$

  egyenlet írja le.

Események függetlensége

Hogyan lehet a függetlenség fogalmát több eseményre kiterjeszteni?

Példa.

- Háromszor feldobunk egy pénzérmét. Legyen A az az esemény, hogy ez első dobás fej, B az, hogy a második fej, C pedig az, hogy harmadszorra fejet dobunk.
- Azt várjuk, hogy mindegyik dobás a többi eredményétől függetlenül kb. az esetek $1/2$ részében lesz fej, így tehát az esetek $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ részében kapunk 3 darab fejet.
- Ezt valószínűségek segítségével a

  $$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$$

  egyenlet írja le.
- Ez a két esemény függetlenségét definiáló egyenlet kézenfekvő általánosítása.

Események függetlensége

- Általában három esemény függetlenségéhez azt is elvárhatjuk, hogy közülük bármely kettő független legyen.
- Ez azonban nem elegendő ahhoz, hogy a

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$$

  egyenlet teljesüljön.
- Sőt, a fenti egyenlet teljesülése sem elegendő a páronkénti függetlenséghez.

Események függetlensége

Példa

- Dobjunk fel két érmét, legyenek A ill. B azok az események, hogy az első ill. második dobás fej, C pedig az, hogy a dobott fejek száma páros.
- Ekkor $A = \{(F,F),(F,I)\}$, $B = \{(F,F),(I,F)\}$, $C = \{(F,F),(I,I)\}$, tehát $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}$.
- Továbbá
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(\{(F,F)\}) = \frac{1}{4},$$
és így $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$ és $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$, azaz az A, B és C események páronként függetlenek.
- Azonban
$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(\{(F,F)\}) = \frac{1}{4} \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = \frac{1}{8}.$$

Események függetlensége

Valójában az a jó feltétel, ha minden egyenlet teljesülését elvárjuk, és háromnál több esemény esetén is hasonlóképp kell eljárni:

Definíció. Legyen $A_1, \ldots, A_n$ egy valószínűségi mező eseményei. Azt mondjuk, hogy $A_1, \ldots, A_n$ *(együttesen) függetlenek*, ha minden $\emptyset \neq I \subset \{1, \ldots, n\}$ indexhalmaz esetén

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) \tag{1}$$

teljesül, vagyis ha tetszőlegesen kiválasztunk belőlük néhány (de legalább egy) eseményt (azaz ezek indexeinek I halmazát), a kiválasztott események metszetének a valószínűsége ezen események valószínűségének szorzata.

Események függetlensége

Megjegyzések.

- A fenti definícióban (a tömörség kedvéért) megengedünk egy elemű I indexhalmazokat is, ekkor az egy elemű metszet definíció szerint magát a halmazt jelenti, míg az egy elemű szorzat értéke egyszerűen az a szám, amit a produktum jel után írunk.
- Az egy elemű indexhalmazokra a fenti egyenlőség nyilvánvalóan igaz bármely n eseményre, és így nem ad hozzá semmit a definíció tartalmához, ezen esetek megengedése pusztán a megfogalmazást egyszerűsíti.
- Kizárjuk viszont az üres indexhalmaz esetét (habár voltaképp némi további diszkusszió árán akár ezt is megengedhetnénk).

Események függetlensége

A függetlenség és a komplmenterképzés kapcsolata több eseményre is általánosítható:

Ha az $A_1, \ldots, A_n$ események együttesen függetlenek, akkor ezek közül néhánynak a komplementerét véve (a többit változatlanul hagyva) az így kapott n esemény szintén együttesen független.

Események függetlensége

Példa.

- 10-szer dobunk egy szabályos érmével, legyen F_i az az esemény, hogy az i-edik dobás fej.
- Megmutatjuk, hogy az $F_1, F_2, \ldots, F_{10}$ események együttesen függetlenek.
- A 10 hosszú $F - I$ sorozatok száma, azaz az Ω eseménytér elemszáma 2^{10}.
- Az F_i események elemszáma 2^9, hiszen ezek olyan kimenetelekből állnak, amelyeknél az i-edik dobás eredménye rögzített (fej), a többi 9 dobás eredményére viszont egymástól függetlenül mindig 2 lehetséges választásunk van, ez tehát összesen 2^9 lehetőség.
- Vagyis

$$\mathbb{P}(F_i) = \frac{|F_i|}{|\Omega|} = \frac{2^9}{2^{10}} = \frac{1}{2}$$

minden $1 \leq i \leq 10$ esetén.

Események függetlensége

Példa.

- Rögzítsünk most az $F_1, \dots, F_{10}$ események közül néhányat, jelölje ezek indexeinek halmazát I.
- Ekkor
$$\prod_{i \in I} \mathbb{P}(F_i) = \frac{1}{2^{|I|}}.$$
- $\bigcap_{i \in I} F_i$ elemszáma $2^{10-|I|}$.
- Valóban, ezt olyan kimenetelek alkotják, melyekben $|I|$ darab rögzített helyen fej áll, a maradék $10 - |I|$ helyen pedig egymástól függetlenül egyenként kétféle elem állhat.
- Azaz
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} F_i\right) = \frac{\left|\bigcap_{i \in I} F_i\right|}{|\Omega|} = \frac{2^{10-|I|}}{2^{10}} = \frac{1}{2^{|I|}} = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(F_i),$$

és így az $F_1, \dots, F_{10}$ események együttesen függetlenek.