II. ZÁRTHELYI MEGOLDÁSAI

ANALÍZIS 2., Mérnök informatikus szak

2014. november 19.

1. feladat (25 pont)

Határozzuk meg az

$$a)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}\left((3x-2)^3\right)^n \qquad b)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^n}{n!}x^n$$

hatványsorok x-re vonatkozó bázispontját és konvergencia-sugarát. Az $a)$ esetben mi a teljes konvergencia-tartomány?

Megoldás

a) Rendezzük át:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{3n}}{\sqrt{n+1}}\left(x-\frac{2}{3}\right)^{3n}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$$

Ebből látjuk, hogy $x_0=\frac{2}{3}$. **(4 pont)**

Az együtthatókra pedig $a_{3n}=3^{3n}(n+1)^{-1/2}$ és 0 egyébként, ezért elegendő a $3k$-ik tagok által alkotott sorozatot vizsgálni. Így a konvergenciasugárra:

$$R=\frac{1}{\limsup\limits_n \sqrt[n]{|a_n|}}=\frac{1}{3}$$

$$\limsup_n \sqrt[3n]{\frac{3^{3n}}{\sqrt{n+1}}}=\limsup_n\frac{3}{\sqrt[6n]{n+1}}=3$$

Így a konvergencia-tartomány a 2/3 középpontú, 1/3 sugarú kör. Meg kell vizsgálnunk a határon való konvergenciát, ehhez elég az $x=1$ és $x=\frac{1}{3}$ pontban megvizsgálni a konvergenciát. **(4 pont)**

$$x=1: \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}\left((3\cdot 1-2)^3\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}\geq\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty,\text{ tehát divergens}$$

$$x=\frac{1}{3} \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}\left((3\cdot\frac{1}{3}-2)^3\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{3n}}{\sqrt{n+1}}$$

Ez viszont $\frac{1}{\sqrt{x}}$ monoton csökkenő volta miatt Leibniz-típusú sor, tehát konvergens, így a konvergencia-tartomány $\left[\frac{1}{3},1\right)$ **(8 pont)**

b) Látható, hogy $x_0=0$ és $a_n=n^n/n!$. **(3 pont)**

Használjuk fel a hányados-kritériumot: **(3 pont)**

$$\limsup_n\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}:\frac{n^n}{n!}=\limsup_n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

Ebből a konvergenciasugár $R=e^{-1}$, így a konvergencia-tartomány $(-e^{-1},e^{-1})$. **(3 pont)**

2. feladat (25 pont)

Határozzuk meg az

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^n = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + \dots$$

hatványsor konvergencia-sugarát, és összegképletét.

Megoldás

A bázispont láthatóan 0, $a_n = \dfrac{1}{n+1}$. A konvergencia-sugár a hányados-kritériumból:

$$\limsup_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \limsup_n \frac{1}{n+2} : \frac{1}{n+1} = \limsup_n \frac{n+1}{n+2} = 1$$

Vagyis $|x| < 1$ esetén biztosan konvergens a sorozat, a határokon kérdéses. **(8 pont)**

Legyen $f(x)$ a keresett függvény. Mivel $\int x^n \, \mathrm{d}x = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$, ezért szorozzuk be x-el, majd deriváljunk, ez a konvergencia-sugáron belül biztosan nem változtatja meg a konvergenciát, mivel itt abszolút konvergens a sor, és hivatkozhatunk a hatványsor deriválására vonatkozó tételre, a konvergencia egyedül a határon változhat. **(8 pont)**

$$(xf(x))' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x} = \frac{1}{1-x} - 1$$

$$xf(x) = \int \frac{1}{1-x} - 1 \, \mathrm{d}x = -\ln(1-x) - x + C$$

Vegyük figyelembe, hogy $xf(x)|_{x=0} = 0$, ezért $C = 0$. Innét $f(x) = -1 - \dfrac{\ln(1-x)}{x}$ **(9 pont)**

3. feladat (25 pont)

$$\frac{\partial^{15}}{\partial x^{15}} \frac{\cos x^2}{\sqrt{9+x^3}}\bigg|_{x=0} = ?$$

Megoldás

$$\cos(x^2) \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{x^3}{9}\right)^{-1/2} = \frac{\cos x^2}{\sqrt{9+x^3}} := \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = f(x)$$

Vegyük észre, hogy a feladat épp $15! \cdot a_{15}$ meghatározása. **(8 pont)**
Felhasználjuk a következő hatványsort és a binomiális sorfejtést:

$$\cos(y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i y^{2i}}{(2i)!} \qquad (1+z)^\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha}{i} z^i$$

Vegyük észre, hogy $y = x^2$ és $z = x^3/9$ illetve $\alpha = -\frac{1}{2}$ helyettesítéssel konstans szorzótól eltekintve $f(x)$-et kapjuk. De $\cos x^2$ hatványsorában csak x^{4k}-nak nem 0 az együtthatója, $\left(1 + \frac{x^3}{9}\right)^{-1/2}$ hatványsorában pedig csak x^{3k} együtthatója nem 0. **(5 pont)**
A kettő szorzatában tehát $4n+3m$ alakú tagok szerepelhetnek csak. Mi a szorzat x^{15}-hez tartozó együtthatóját kell kiszámolnunk, így meg kell oldanunk az $3m + 4n = 15$ egyenletet a természetes számok halmazán. Mivel $3(5-m) = 4n$, ezért $3|n$, így $n = 0$ és $m = 5$ vagy $n = 3$ és $m = 1$. **(5 pont)**
Ez alapján a keresett együttható:

$$15! \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\binom{-1/2}{5} \frac{1}{9^5} + \binom{-1/2}{1} \frac{1}{9} (-1)^3 \frac{1}{(2\cdot 3)!} \right) =$$

$$= \frac{15!}{3 \cdot 9^5 \cdot 6!} \left(\frac{6!}{5!} \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} - 1\right) \dots \left(-\frac{1}{2} - 4\right) - 9^4 \left(-\frac{1}{2}\right) \right) = \frac{859058200}{27}$$

(7 pont)

4. feladat (25 pont)

Az $x \mapsto y(x)$ függvény kielégíti az

$$y' = \sin(y) + x^3$$

diffegyenletet és az $y(1) = \dfrac{\pi}{6}$ kezdeti feltételt. Egy másodrendű Taylor-polinom segítségével adjunk becslést y értékére az $x = 1.1$ pontban, továbbá a Lagrange-féle maradéktag felhasználásával adjunk felső korlátot a becslés hibájára.

Megoldás

Feltesszük, hogy a megoldás legalább 3-szor deriválható függvény, ekkor az 1 körüli másodfukú Taylor-polinomja valamely $\xi(x) \in (1, x)$ értékre a hibatagban (Vigyázat, ez függ x-től, ezért a jelölés) : **(5 pont)**

$$y(x) = y(1) + y'(1)(x-1) + y''(1)\frac{(x-1)^2}{2} + y^{(3)}(\xi(x))\frac{(x-1)^3}{3!}$$

Most kiszámoljuk a második és harmadik deriváltakat a differenciálegyenletből : **(8 pont)**

$$y''(x) = y'(x)\cos(y(x)) + 3x^2 \qquad y^{(3)}(x) = y''(x)\cos(y(x)) - y'(x)^2\sin(y(x)) + 6x$$

$$y'(1) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + 1 = \frac{3}{2} \qquad y''(1) = \frac{3}{2}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 3 = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 3$$

Az eddigiekből: **(5 pont)**

$$y(1.1) = \frac{\pi}{6} + \frac{3}{2}\cdot 0.1 + \left(3 + \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)\cdot 0.005 \approx 0.69510$$

A hibatag becsléséhez helyettesítsük vissza $y'(x)$ és $y''(x)$ értékét $y^{(3)}(x)$-be, hogy csak x-től s $y(x)$-től függő kifejezést kapjunk $y^{(3)}(x)$-re:

$$y^{(3)}(x) = \left(y'(x)\cos(y(x)) + 3x^2\right)\cos(y(x)) - y'(x)^2\sin(y(x)) + 6x =$$

$$= -\sin(y(x))\left(x^3 + \sin(y(x))\right)^2 + \left(x^3 + \sin(y(x))\right)\cos^2(y(x)) + 3x^2\cos(y(x)) + 6x$$

Felső becslést adunk, használjuk ki, hogy $1 \geq \sin x, \cos x \geq -1$, tegyünk mindent abszolútértékjelek közé, és figyeljünk arra, hogy $x > 1$:

$$|-\sin(y(x))\left(x^3 + \sin(y(x))\right)^2 + \left(x^3 + \sin(y(x))\right)\cos^2(y(x)) + 3x^2\cos(y(x)) + 6x| \leq$$

$$= 1\cdot\left(x^3+1\right)^2 + \left(x^3+1\right)1 + 3x^2\cdot 1 + 6x = x^6 + 3x^3 + 3x^2 + 6x + 2$$

Vegyük észre, hogy ez a pozitív számokon szigorúan monoton nő, így $\xi(x) < 1.1$ miatt elegendő ezt beírni:

$$\left|y^{(3)}(\xi(x))\frac{(x-1)^3}{3!}\right| \leq \left(\xi(x)^6 + 3\xi(x)^3 + 3\xi(x)^2 + 6\xi(x) + 2\right)\frac{(x-1)^3}{6} \leq$$

$$\leq \left(1.1^6 + 3\cdot 1.1^3 + 3\cdot 1.1^2 + 6\cdot 1.1 + 2\right)\frac{(1.1-1)^3}{6} \approx 0.00299910$$

Erre a részre **(7 pont)**

5. feladat (5 pont)

- Fourier-sorok
- Többváltozós analízis
- xx : 15-kor, mert akkor nincs sor a büfében