ANALÍZIS 2. | **VIZSGADOLGOZAT** | **2013. június 6.**
Mérnök informatikus szak | α-variáns | Munkaidő: 90 perc

---

1. feladat (12 pont)
Oldja meg az

$$y'' + 8y' + 12y = 3x, \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = -1$$

kezdetiérték-feladatot.

Karakterisztikus egyenlet: $0 = \lambda^2 + 8\lambda + 12 = (\lambda + 6)(\lambda + 2)$, (**2 pont**)vagyis

$$y_h = c_1 e^{-6x} + c_2 e^{-2x}. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását $y_{ip} = Ax + B$ alakban keressük.

$$\begin{array}{rcl|l} y_{ip} & = & Ax + B & \cdot 12+ \\ y'_{ip} & = & A & \cdot 8+ \\ y''_{ip} & = & 0 & \\ \hline \end{array} \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Itt $12A = 3$, $8A + 12B = 0$, tehát $A = \frac{1}{4}$, $B = -\frac{1}{6}$ (**2 pont**), tehát

$$y_{\text{á}} = \frac{x}{4} - \frac{1}{6} + c_1 e^{-6x} + c_2 e^{-2x}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

A kezdeti feltételek

$$1 = -\frac{1}{6} + c_1 + c_2 \qquad -1 = \frac{1}{4} - 6c_1 - 2c_2 \qquad \textbf{(1 pont)}$$

esetén teljesülnek, vagyis $c_1 = \frac{-13}{48}$, $c_2 = \frac{23}{16}$. (**1 pont**)

$$y = \frac{x}{4} - \frac{1}{6} - \frac{13e^{-6x}}{48} + \frac{23e^{-2x}}{16}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

---

2. feladat (12 pont)
Határozza meg az

$$y' + \frac{xy}{x^2 + 9} = 3x$$

differenciálegyenlet általános megoldását.

A homogén egyenlet szeparábilis:

$$y' = -\frac{xy}{x^2+9},$$

megoldása $y = 0$, és

$$\ln y = \int \frac{1}{y} dy = \int -\frac{x}{x^2+9} dx = -\frac{1}{2}\ln(x^2+9), \qquad \textbf{(2 pont)}$$

tehát

$$y_h = \frac{c}{\sqrt{x^2+9}}. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Ebből

$$y_{ip} \overset{\textbf{1 pont}}{=} \frac{c(x)}{\sqrt{x^2+9}}, \qquad y'_{ip} \overset{\textbf{1 pont}}{=} \frac{c'(x)\sqrt{x^2+9} - c(x)\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}}{x^2+9},$$

amiből

$$3x \overset{\textbf{1 pont}}{=} y'_{ip} + \frac{xy_{ip}}{x^2+9} \overset{\textbf{1 pont}}{=} \frac{c'(x)}{\sqrt{x^2+9}},$$

így

$$c(x) \overset{\textbf{1 pont}}{=} \int 3x\sqrt{x^2+9}dx \overset{\textbf{2 pont}}{=} \frac{3}{2}\frac{(x^2+9)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = (x^2+9)^{\frac{3}{2}},$$

tehát

$$y \overset{\textbf{1 pont}}{=} x^2 + 9 + \frac{c}{\sqrt{x^2+9}}.$$

---

3. feladat (4+12=16 pont)

a) Hogyan számoljuk ki az $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ pontban totálisan differenciálható $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény (x_0, y_0)-beli érintősíkjának egyenletét?

b) Legyen

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^2-2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Totálisan differenciálható-e f a $(0,0)$, illetve a $(-1,1)$ pontban? Ahol igen, ott adja meg az érintősík egyenletét.

a)

$$z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0). \qquad \textbf{(4 pont)}$$

b)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{y=mx, x\to 0} \frac{3x^2 - 2m^2y^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{3 - 2m^2}{1 + m^2} \qquad \textbf{(2 pont)}$$

ami függ m-től, tehát a függvénynek nincs atártértéke az origóban, vagyis nem teljesül a totális differenciálhatóság szükséges feltétele, a folytonosság. (**2 pont**) (Lehet abból is látni, hogy nem léteznek a parciális deriváltak). A többi pontban

$$f'_x = \frac{6x(x^2 + y^2) - 2x(3x^2 - 2y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad f'_y = \frac{-4y(x^2 + y^2) - 2y(3x^2 - 2y^2)}{(x^2 + y^2)^2},$$

(3 pont)

folytonos függvények hányadosai, a nevezőjük nem 0, tehát folytonosak, így az origón kívül a parciális deriváltak folytonosak, tehát a függvény totálisan differenciálható. (**2 pont**)

$$f'_x(-1, 1) = -\frac{5}{2}, \qquad f'_y(-1, 1) = -\frac{5}{2}, \qquad f(-1, 1) = \frac{1}{2}, \quad \textbf{(2 pont)}$$

így az érintősík egyenlete

$$z = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}(x + 1) - \frac{5}{2}(y - 1). \qquad \textbf{(1 pont)}$$

---

4. feladat (8+12=20 pont)

a) A Taylor-sor definíciója alapján határozza meg az $f(x) = \sin x$ függvény Taylor-sorát és annak konvergenciatartományát.

b) Számolja ki az

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n+1} x^{4n+3}}{(2n+1)!}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n 3^{2n+1} x^{4n+3}}{(2n+1)!} \right)'$$

sorok konvergenciatartományát, illetve összegfüggvényét.

a)

$$f^{(n)}(x) = (\sin x)^{(n)} = \begin{cases} \cos x, & n = 4k+1 \\ -\sin x, & n = 4k+2 \\ -\cos x, & n = 4k+3 \\ \sin x, & n = 4k \end{cases} \qquad \textbf{(2 pont)}$$

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ (-1)^k, & n = 2k+1 \end{cases} \qquad \textbf{(2 pont)}$$

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad \textbf{(2 pont)}$$

$$R^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\right|}{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{(2(n+1)+1)!}\right|} = \lim_{n\to\infty} (2n+3)(2n+2) = \infty, \qquad \textbf{(2 pont)}$$

tehát konvergenciasugár végtelen.

b)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n+1} x^{4n+3}}{(2n+1)!} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(3x^2\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} = x \sin\left(3x^2\right) \quad \textbf{(5 pont)}$$

minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. A derivált sor konvergenciasugara ugyanennyi, és minden véges halmazon egyenletes a konvergencia, így a deriválás és szumma felcserélhető (**4 pont**)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n 3^{2n+1} x^{4n+3}}{(2n+1)!} \right)' = \left(x \sin\left(3x^2\right)\right)' = \sin\left(3x^2\right) + 6x^2 \sin\left(3x^2\right).$$

(3 pont)

---

5. feladat (4+8=12 pont)*
Mennyi

$$\oint\limits_{|z+2|=1} \frac{\operatorname{ch}\left(z^2+1\right)}{z^3} dz, \qquad \oint\limits_{|z+2|=3} \frac{\operatorname{ch}\left(z^2+1\right)}{z^3} dz?$$

A függvénynek csak a 0 pontban van szingularitása, ami nincs a $\{z : |z+2| = 1\}$ görbe belsejében, így

$$\oint\limits_{|z+2|=1} \frac{\operatorname{ch}(z^2+1)}{z^3} dz = 0. \qquad \textbf{(4 pont)}$$

A $\{z : |z+2| = 3\}$ görbén alkalmazzuk az általánosítot Cauchy-integrálformulát $k = 2$ esetére (**2 pont**).

$$\left(\operatorname{ch}(z^2+1)\right)'' = \left(2z \operatorname{sh}(z^2+1)\right)' = 2\operatorname{sh}(z^2+1) + 4z^2 \operatorname{ch}(z^2+1). \quad \textbf{(3 pont)}$$

$$\oint\limits_{|z+2|=3} \frac{\operatorname{ch}(z^2+1)}{z^3} dz = \frac{2\pi i}{2!}\left(2\operatorname{sh}(0^2+1) + 4\cdot 0^2 \operatorname{ch}(0^2+1)\right) = 2\pi \operatorname{sh} 1 i.$$

(3 pont)

---

6. feladat (12 pont)*
Milyen $a, b \in \mathbb{R}$ esetén lesz a

$$u(x,y) = ax^4 + bx^2y^2 + y^4 - 10xy$$

egy mindenhol reguláris $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvény valós része? Határozza meg az f függvény deriváltját.

Akkor, ha u harmonikus, azaz $u''_{xx} + u''_{yy} = 0$. (**2 pont**) Itt

$$u'_x = 4ax^3 + 2bxy^2 - 10y, \qquad u''_{xx} = 12ax^2 + 2by^2, \qquad \textbf{(2 pont)}$$

$$u'_y = 2bx^2y + 4y^3 - 10x, \qquad u''_{yy} = 2bx^2 + 12y^2, \qquad \textbf{(2 pont)}$$

$u''_{xx} + u''_{yy} = (12a + 2b)x^2 + (2b + 12)y^2 = 0$, ha $b = -6$, $a = 1$ (**2 pont**).

Ekkor $f'(x+iy) \overset{\textbf{3 pont}}{=} u'_x(x,y) - iu_y(x,y) \overset{\textbf{1 pont}}{=} 4x^3 - 12xy^2 - 10y - i(-12x^2y + 4y^3 - 10x)$.

---

7. feladat (8+8=16 pont)*

a) Ismertesse a gömbi koordinátákat, és számolja ki a transzformáció Jacobi-determinánsát.

b) Számolja ki az

$$\int\limits_{1\le x^2+y^2+z^2\le 4} \frac{x}{x^2+y^2+z^2}dV$$

integrált.

---

a) $x \overset{\textbf{1 pont}}{=} r\cos\varphi\sin\vartheta,\ y \overset{\textbf{1 pont}}{=} r\sin\varphi\sin\vartheta,\ z \overset{\textbf{1 pont}}{=} r\cos\vartheta.$

$$|J| \overset{\textbf{2 pont}}{=} \left|\det\begin{bmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta & -r\sin\varphi\sin\vartheta & r\cos\varphi\cos\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta & r\cos\varphi\sin\vartheta & r\sin\varphi\cos\vartheta \\ \cos\vartheta & 0 & -r\sin\vartheta \end{bmatrix}\right| \overset{\textbf{3 pont}}{=} r^2\sin\vartheta.$$

b)

$$\int\limits_{1\le x^2+y^2+z^2\le 4} \frac{x}{x^2+y^2+z^2}dV \overset{\textbf{2 pont}}{=} \int_1^2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{r\cos\varphi\sin\vartheta}{r^2}\cdot r^2\sin\vartheta d\vartheta d\varphi dr =$$

$$\overset{\textbf{3 pont}}{=} \int_1^2 r dr \int_0^{2\pi}\cos\varphi d\varphi \int_0^{\pi}\sin^2\vartheta d\vartheta \overset{\textbf{1 pont}}{=} 0,$$

mert

$$\int_0^{2\pi}\cos\varphi d\varphi \overset{\textbf{2 pont}}{=} 0.$$

A $*$-os feladatokból legalább 15 pontot el kell érni!

Pótfeladatok (Csak az elégséges és a közepes vizsgajegy eléréséhez javítjuk ki.):

8. feladat (10 pont)

Konvergensek-e az

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n-2}{4n+2}\right)^n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{5n-2}{4n+2}}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

sorok?

Gyökkritériummal:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{5n-2}{4n+2}\right)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n-2}{4n+2} \frac{1}{\sqrt{\sqrt[n]{n}}} = \frac{5}{4} > 1,$$

tehát az első sor divergens. (**4 pont**)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt{\frac{5n-2}{4n+2}} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\sqrt[n]{\frac{5n-2}{4n+2}}} \frac{1}{n} = 0 < 1,$$

hiszen

$$1 \leftarrow \sqrt[n]{\frac{1}{2}} = \sqrt[n]{\frac{3n}{6n}} \leq \sqrt[n]{\frac{5n-2}{4n+2}} \leq \sqrt[n]{\frac{5n}{4n}} = \sqrt[n]{\frac{5}{4}} \to 1.$$

tehát a második sor konvergens (**6 pont**).

---

9. feladat (10 pont)

Határozza meg az

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin\left(x^2 y\right)}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = 0 \end{cases}$$

függvény parciális deriváltjait az értelmezési tartomány minden pontjában.

Az origón kívül

$$f'_x = \frac{2xy\cos\left(x^2y\right)\left(x^2+y^2\right) - 2x\sin\left(x^2y\right)}{\left(x^2+y^4\right)^2}, \qquad \textbf{(3 pont)}$$

$$f'_y = \frac{x^2\cos\left(x^2y\right)\left(x^2+y^2\right) - 4y^3\sin\left(x^2y\right)}{\left(x^2+y^4\right)^2}, \qquad \textbf{(2 pont)}$$

az origóban pedig

$$f'_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin\left(x^2\cdot 0\right)}{x^2} - 0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0, \qquad \textbf{(3 pont)}$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{\sin\left(0^2\cdot y\right)}{y^4} - 0}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = 0. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

(Ha egy parciális jó, az 3 pont.)