ANALIZIS(2) VIZSGADOLGOZAT I. rész A kurzus 2004. június 10.

VIK, Műszaki Informatika szak, Munkaidő: 90 perc

BME, Természet Tudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

1) Feladat (12 pont).

Adja meg az alábbi differenciálegyenlet rendszer általános megoldását:

$$\frac{dx}{dt} = -x + 2y\,, \qquad \frac{dy}{dt} = 8x - y$$

2) Feladat (13 pont).

a) Mely x esetén konvergens az

$$f_n(x) = \frac{n^2x^4}{2n^2x^4+1}$$

függvénysorozat és

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = ?$$

b)

$$\|f_n - f\|_u = ? \quad \text{ha} \quad x \in [1,3]$$

(uniform norma). Egyenletes-e a konvergencia az $[1,3]$ intervallumon?

3) Feladat (12 pont).

a) Írja le az $x_0 = 0$ körüli hatványsor egyenletes konvergenciájának tartományáról tanultakat és bizonyítsa be!

b) Sorolja fel a hatványsor differenciálásával kapcsolatban tanultakat!

4) Feladat (15 pont).

a) Folytonos-e, differenciálható-e az origóban az alábbi függvény:

$$f(x,y) = \frac{2x^3+3xy}{2x^2+3y^2}\,, \qquad f(0,0) = \frac{3}{5}$$

b) Létezik-e az origóban az f függvény $\underline{v} = (1,1)$-vel párhuzamos irányú iránymenti deriváltja? (A definícióval dolgozzon!)

5) Feladat (12 pont).

Legyen

$$f(x,y) = e^{x^2+xy^3}\,, \qquad x_0 = 1,\ y_0 = -1$$

Írja fel f grafikonjának az adott ponthoz tartozó érintő síkja egyenletét!

*** 6) Feladat (17 pont).**

Henger koordinátákra való áttéréssel számolja ki a

$$\iiint\limits_V x^2\ dV$$

integrált, ahol V az $x^2+y^2 \le z \le 4 - x^2 - y^2$ egyenlőtlenséggel adott térrész.

*** 7) Feladat (23 pont).**

Legyen $f(z) = 1/z$.

a) Mely tartományokon lehet f-et $z_0 = 3j$ körüli Laurent sor alakban felírni? Határozza meg az f Laurent sorait az összes lehetséges tartományon!

b)

$$\operatorname*{Res}_{z=3j} \frac{f(z)}{(z-3j)^2} = ? \qquad \oint\limits_{|z-3j|=1} \frac{f(z)}{(z-3j)^2}\ dz = ? \qquad \oint\limits_{|z-3j|=1} f(z)\ dz = ?$$

A *-os feladatokból legalább 16 pontot kell elérni!

Pótfeladatok.

Csak az elégséges jegy (esetleg a közepes jegy) eléréséhez javitjuk ki.

---

8) Feladat (10 pont).

Keresse meg a z_1, z_2, z_3 és a z_4 komplex számok valós és képzetes részét:

$$z_1 = e^{1-\frac{\pi}{4}j}\,, \quad z_2 = \ln(-3)\,, \quad z_3 = \ln 0\,, \quad z_4 = \ln(-3+3j)\,,$$

amennyiben léteznek.

9) Feladat (10 pont).

Adja meg az

$$y' = \frac{(y^2-5)}{y\sqrt{1+x^2}\,(\operatorname{arsh}x)^2}$$

differenciálegyenlet összes megoldását!

Van-e az $y(1) = \sqrt{5}$ kezdeti értékhez tartozó megoldása?

~~AN~~ALIZIS(2) VIZSGADOLGOZAT I. rész A kurzus 2004. június 10.
VIK, Műszaki Informatika szak, Munkaidő: 90 perc
BME, Természet Tudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

1) Feladat (12 pont).
Adja meg az alábbi differenciálegyenlet rendszer általános megoldását:

$$\frac{dx}{dt} = -x + 2y\,, \quad \frac{dy}{dt} = 8x - y$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{A}}} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

$\underline{\underline{A}}$ sajátértékei:

$$|\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}| = 0$$

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 8 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)^2 - 16 = 0$$

$(1+\lambda)^2 = 16$ 4

$1+\lambda = \pm 4$

$\lambda = -1 \pm 4$

$\lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = -5$

$\underline{\underline{A}}$ sajátvektorai:

$\lambda_1 = 3$

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 8 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ 3

$-4s_1 + 2s_2 = 0 \;/:2$

$-2s_1 + s_2 = 0$

$s_2 = 2s_1$

$$\underline{s}_1 = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 \\ 2s_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} s_1 \quad (s_1 \in \mathbb{R})$$

$\lambda_2 = -5$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \underline{s} = \underline{0}$$ 2

$4s_1 + 2s_2 = 0 \;/:2$

$2s_1 + s_2 = 0$

$s_2 = -2s_1$

$$\underline{s}_2 = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 \\ -2s_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} s_1 \quad (s_1 \in \mathbb{R})$$

A megoldás:

$\underline{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \underline{s}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \underline{s}_2, \; (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$ 1

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 e^{-5t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$ 1

$x(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-5t}$

$y(t) = 2c_1 e^{3t} - 2c_2 e^{-5t}$ 1

2) Feladat (13 pont).

a) Mely x esetén konvergens az

$$f_n(x) = \frac{n^2x^4}{2n^2x^4+1}$$

függvénysorozat és

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = ?$$

b)

$$\|f_n - f\|_u = ? \quad \text{ha} \quad x \in [1,3]$$

(uniform norma). Egyenletes-e a konvergencia az $[1,3]$ intervallumon?

a, $$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2x^4}{2n^2x^4+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{n^2x^4}} = \frac{1}{2}$$ 2

$\frac{1}{n^2x^4} \to 0$ ha $x \neq 0$

ha $x = 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2x^4}{2n^2x^4+1} = \frac{0}{0+1} = 0$$ 1

Tehát $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$ 1

b, $$\|f_n - f\|_u = \sup_{x \in I} |f_n - f| = \sup_{x\in[1,3]} \left| \frac{n^2x^4}{2n^2x^4+1} - \frac{1}{2} \right| =$$ 2 2

$$= \max_{x\in[1,3]} \left| \frac{\cancel{2n^2x^4} - \cancel{2n^2x^4} - 1}{2n^2x^4+1} \right| \leq \left. \frac{1}{2n^2x^4+1} \right|_{x=1} = \frac{1}{2n^2+1}$$ 1 1 1

$\frac{1}{2n^2+1} \to 0$ ha $n \to \infty$ 1

Tehát a konvergencia egyenletes az $[1,3]$ intervallumon 1

3) Feladat (12 pont).

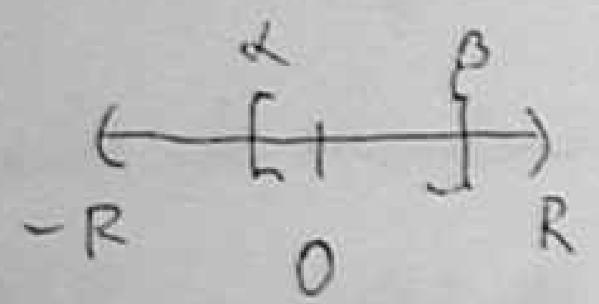
a) Írja le az $x_0 = 0$ körüli hatványsor egyenletes konvergenciájának tartományáról tanultakat és bizonyítsa be!

b) Sorolja fel a hatványsor differenciálásával kapcsolatban tanultakat!

a, Ha $[\alpha,\beta] \subset (-R,R) \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ egyenletesen konv. $[\alpha,\beta]$-ban 2

R a konv. sugár 1

Biz.



$\gamma := \max(|\alpha|,|\beta|)$ 1

$\sum_0^{\infty} a_k x^k$ egyenl. konv. $x \in [\alpha,\beta]$ mert $|x| < \gamma$ ezért:

$$|a_k x^k| = |a_k|\cdot|x|^k \underset{x\in[\alpha,\beta]}{\le} |a_k|\,\gamma^k \quad \text{és} \quad \sum_0^{\infty} |a_k|\cdot\gamma^k$$ 1

Konv majoráns

$\Downarrow$ WEIERSTRASS tétele 2

$\sum_0^{\infty} a_k x^k$ egyenletesen konv. $[\alpha,\beta]$-n

b, $\sum_0^{\infty} a_k x^k$ és $\sum_0^{\infty} k a_k x^k$ hatványsorok konv. sugarai egyenlők 2

$\sum_0^{\infty} a_k x^k$ összegfüggvénye tagonként 1 akárhányszor 1 differenciálható 1

4) Feladat (15 pont).

a) Folytonos-e, differenciálható-e az origóban az alábbi függvény:

$$f(x,y) = \frac{2x^3+3xy}{2x^2+3y^2}, \qquad f(0,0) = \frac{3}{5}$$

b) Létezik-e az origóban az f függvény $\underline{v} = (1,1)$-vel párhuzamos irányú iránymenti deriváltja? (A definícióval dolgozzon!)

a, $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ mert

$$\lim_{\substack{y=mx\\ x\to 0}} \frac{2x^3+3xy}{2x^2+3y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^3+3mx^2}{2x^2+3m^2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2x+3m}{2+3m^2} = \frac{3m}{2+3m^2}$$ függ m-től 3

$\Downarrow$ 2

f nem folytonos az origóban 1 $\Rightarrow$ f nem diffható az origóban 2

b, $\underline{v}[1,1]$, $|\underline{v}| = \sqrt{2}$, $\underline{e}\left[\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}\right]$, $t\underline{e}\left[\frac{t}{\sqrt2}, \frac{t}{\sqrt2}\right]$ 1

$$\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{\underline{0}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(t\underline{e}) - f(\underline{0})}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{2\left(\frac{t}{\sqrt2}\right)^3 + 3\frac{t^2}{2}}{2\frac{t^2}{2} + 3\frac{t^2}{2}} - \frac{3}{5}}{t} =$$ 3 2

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{2\frac{t}{\sqrt2} + 3}{5} - \frac{3}{5}}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{2t}{\sqrt2 \cdot 5} \cancel{+\frac{3}{5}} \cancel{-\frac{3}{5}}}{t} = \frac{2}{5\sqrt2} = \frac{\sqrt2}{5}$$ 1

5) Feladat (12 pont).

Legyen

$$f(x,y) = e^{x^2+xy^3}, \qquad x_0 = 1,\ y_0 = -1$$

Írja fel f grafikonjának az adott ponthoz tartozó érintő síkja egyenletét!

$$f'_x = e^{x^2+xy^3}(2x+y^3) \quad 2$$

$x_0 = 1 \quad y_0 = -1$

$$f'_y = e^{x^2+xy^3} \cdot 3xy^2 \quad 1$$

A parc. deriváltak mindenütt folytonosak $\Rightarrow$ f az egész síkon totálisan diff.ható $\Rightarrow \exists$ $P(x_0,y_0)$ ban az érintősík. 2 1

$$f'_x(1,-1) = 1 \quad 1$$

$$f'_y(1,-1) = 3 \quad 1$$

$$z_0 = f(1,-1) = 1 \quad 1$$

Az egyenlet:

$$f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0) - (z-z_0) = 0 \quad 2$$

$$1(x-1) + 3(y+1) - (z-1) = 0$$

$$x + 3y - z + 3 = 0 \quad 1$$

* 6) Feladat (17 pont).

Henger koordinátákra való áttéréssel számolja ki a

$$\iiint_V x^2\, dV$$

integrált, ahol V az $x^2 + y^2 \le z \le 4 - x^2 - y^2$ egyenlőtlenséggel adott térrész.

$$\iiint x^2\, dV = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\sqrt{2}} \int_{z=r^2}^{4-r^2} (r^2\cos^2\varphi)\, r\, dz\, dr\, d\varphi =$$

HENGERKOORDINÁTÁK: 1 1 1 1 1

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$ 2

$z = z$

$|J| = r$ 1

A METSZÉSVONAL:

$r^2 = 4 - r^2$

$2r^2 = 4$ 2

$r^2 = 2$

$r = \sqrt{2}$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} r^3\cos^2\varphi\,(4-2r^2)\,dr\,d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,d\varphi \cdot \int_0^{\sqrt{2}} 4r^3 - 2r^5\, dr =$$

2 3

$$= \frac{1}{2}\left[\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}\right]_0^{2\pi} \cdot \left[r^4 - \frac{2}{6}r^6\right]_0^{\sqrt{2}} = \quad 1$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\pi \cdot \left(4 - \frac{8}{3}\right) = \frac{4\pi}{3} \quad 1$$

...eladat (23 pont).

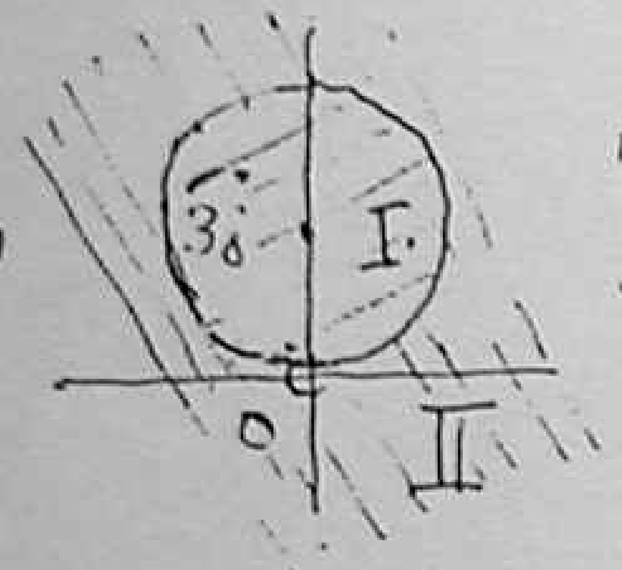
...egyen $f(z) = 1/z$.

a) Mely tartományokon lehet f-et $z_0 = 3j$ körüli Laurent sor alakban felírni? Határozza meg az f Laurent sorait az összes lehetséges tartományon!

b)

$$\underset{z=3j}{Res}\ \frac{f(z)}{(z-3j)^2} = ? \qquad \oint_{|z-3j|=1} \frac{f(z)}{(z-3j)^2}\,dz = ? \qquad \oint_{|z-3j|=1} f(z)\,dz = ?$$

a,



Az I tartományon:

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{3j + (z-3j)} = \frac{1}{3j} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z-3j}{3j}} =$$

1 1

$$= \frac{1}{3j} \sum_0^\infty (-1)^k \left(\frac{z-3j}{3j}\right)^k = \sum_0^\infty \frac{(-1)^k}{(3j)^{k+1}} (z-3j)^k$$

2 1

$$\left|\frac{z-3j}{3j}\right| < 1 \Rightarrow |z-3j| < 3$$

1

A II tartományon:

$$f(z) = \frac{1}{3j + (z-3j)} = \frac{1}{z-3j} \cdot \frac{1}{1 + \frac{3j}{z-3j}} = \frac{1}{z-3j} \sum_0^\infty (-1)^k \left(\frac{3j}{z-3j}\right)^k$$

1 1 2

$$3 < |z-3j|$$

1

b, Az I. sorfejtésből:

3 $\quad \dfrac{f(z)}{(z-3j)^2} = \displaystyle\sum_0^\infty \frac{(-1)^k}{(3j)^{k+1}} (z-3j)^{k-2}, \qquad 0 < |z-3j| < 3$ $\quad (z \neq 3j)$

3 $\quad \underset{z=3j}{Res}\ \dfrac{f(z)}{(z-3j)^2} = -\dfrac{1}{(3j)^2} = \dfrac{1}{9}$

3 $\quad \displaystyle\oint_{|z-3j|=1} \frac{f(z)}{(z-3j)^2}\,dz = 2\pi j\ \underset{z=3j}{Res}\ \frac{f(z)}{(z-3j)^2} = 2\pi j \frac{1}{9}$

3 $\quad \displaystyle\oint_{|z-3j|=1} f(z)\,dz = 0$ mert az I sorfejtésből $\underset{z=3j}{Res}\ f(z) = 0$

Pótfeladatok.

Csak az elégséges jegy (esetleg a közepes jegy) eléréséhez javitjuk ki.

---

8) Feladat (10 pont).

Keresse meg a z_1, z_2, z_3 és a z_4 komplex számok valós és képzetes részét:

$$z_1 = e^{1-\frac{\pi}{4}j}, \quad z_2 = \ln(-3), \quad z_3 = \ln 0, \quad z_4 = \ln(-3+3j),$$

amennyiben léteznek.

9) Feladat (10 pont).

Adja meg az

$$y' = \frac{(y^2-5)}{y\sqrt{1+x^2}\,(\text{arsh}x)^2}$$

differenciálegyenlet összes megoldását!

Van-e az $y(1) = \sqrt{5}$ kezdeti értékhez tartozó megoldása?

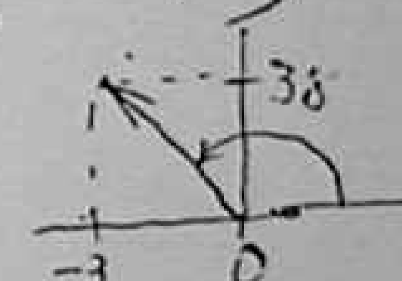
8,

2 $\quad z_1 = e^{1-\frac{\pi}{4}j} = e \cdot e^{-\frac{\pi}{4}j} = e\big(\underbrace{\cos(-\tfrac{\pi}{4})}_{\frac{1}{\sqrt2}} + j\underbrace{\sin(-\tfrac{\pi}{4})}_{\frac{1}{\sqrt2}}\big) = \frac{e}{\sqrt2} + j\frac{e}{\sqrt2}$

3 $\quad z_2 = \ln(-3) = \ln 3 + j(\pi + 2\pi k) \quad (k \in \mathbb{Z})$

2 $\quad z_3 = \ln 0 \nexists \quad (e^{z_3} \neq 0$ hiszen $|e^{x_3} \cdot e^{jy_3}| = e^{x_3} \neq 0)$

3 $\quad z_4 = \ln(-3+3j) = \ln 3\sqrt2 + j\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right)$



9,

$$y' = \frac{y^2-5}{y\sqrt{1+x^2}\,(\text{arsh}x)^2}$$

2 $\quad \dfrac{y}{y^2-5}\, y' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}\,(\text{arsh}x)^2}$;

2 $\quad y^2 \equiv 5$ megoldás (egyensúlyi helyzet) $y = \sqrt5$, $y = -\sqrt5$ megoldások

2 $\quad \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \frac{2y}{y^2-5}\,dy = \int (\text{arsh}x)^{-2} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

3 $\quad \dfrac{1}{2} \ln|y^2-5| = -\dfrac{1}{\text{arsh}x} + C$

Az $y(1) = \sqrt5$ kezdeti feltételnek

1 $\quad$ az $y \equiv \sqrt5$ felel meg

ANALIZIS(2) **VIZSGA DOLGOZAT II. rész** **2004. júniu**

Műszaki Informatika szak Munkaidő: 60 perc

BME, Természet Tudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1) Feladat (14 pont).

Vezesse le az elsőrendű homogén lineáris differenciálegyenlet megoldásának általános alakját!

2) Feladat (20 pont).

Mit nevezünk Taylor polinomnak, Lagrange maradéknak ($n = 1$) ? Írja le a vele kapcsolatos tételt!
Mutassa meg, hogy e^x megegyezik a Taylor sorával!
A felhasznált elégséges feltételt bizonyítsa be!

3) Feladat (18 pont).

Írja fel az $f(x) = |x|$, $\quad f(x + 2\pi) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ függvény Fourier sorát!
$x \in [-\pi, \pi)$

4) Feladat (15 pont).

Igazolja, hogy a koordinátánkénti konvergencia ekvivalens az $\mathbb{R}^n$ beli konvergenciával!

5) Feladat (16 pont).

Adjon elégséges feltételt kétváltozós függvénytotális differenciálhatóságára!
Állítását bizonyítsa be!

6) Feladat (17 pont).

a) Definiálja az e^z függvényt és határozza meg az értékkészletét!
b) Értelmezze az $\ln z$ függvényt és vezesse le a kiszámítására szolgáló képletet!
c) $\ln\left(\frac{-\sqrt{3}}{4} + j\frac{1}{4}\right) = ?$