Elektromágneses terek alapjai

Tételkidolgozás

2016/17. 1. félév

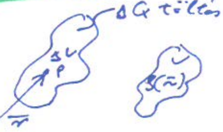
I. Mutassa be az elektromágneses tér forrásmennyiségeit, valamint azok megjelenési formáit és matematikai leírását!

Töltés: lehetnek pozitívak és negatívak.
Pozitív (elektronhiány → több pozitív töltés)
Negatív (elektrontöbblet)
Semleges (egyforma számban pozitív és negatív)
} csak az elektronok (negatív töltések) vándorolnak!
Az elemi töltés az elektron, jele e^-, töltése: $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ As
Q [As] [C]

→ Töltésmodellek: (eloszlásuk folytonos)

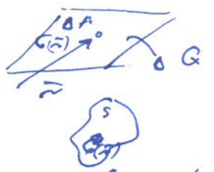
a, Térfogati: $\rho(\vec{r}) \triangleq \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V}$ $\qquad Q_V = \int_V \rho \, dV$

$\rho \left[\frac{As}{m^3}\right]$



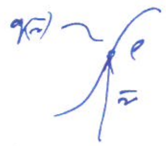
b, Felületi: $\sigma(\vec{r}) = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S}$ $\qquad Q_A = \int_A \sigma \, dA$

$\sigma \left[\frac{As}{m^2}\right]$



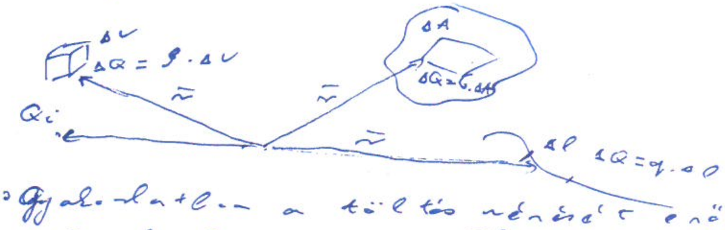
c, Vonalmenti: $q(\vec{r}) = \frac{\Delta Q}{\Delta l}$ $\qquad Q_l = \int_l q \, dl$

$q \left[\frac{As}{m}\right]$



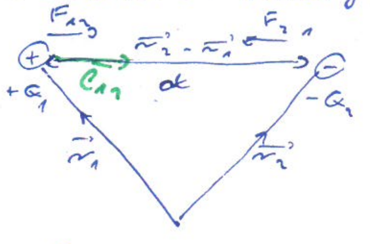
d, Pontszerű: $\qquad Q = \sum_i Q_i$

Q [As] (térbeli Dirac-delta)



→ Gyakorlatban a töltés nézését erőhatásokra vezetjük vissza. Alapvetően a Coulomb-törvény:

$$\vec{F}_{21} = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{r_2 - r_1}{|r_2 - r_1|^3}$$



$$F = k \cdot \frac{|Q_1 \cdot Q_2|}{d^2} \qquad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}: \text{ arányossági tényező}$$

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 Q_2}{|r_2 - r_1|^2} \cdot \vec{e}_{12} \qquad \text{ahol } \vec{e}_{12} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

így: $\vec{F}_{21} = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$

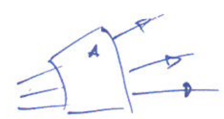
$E = \frac{F}{Q}$ (egységnyi töltésre ható erő)

$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{Q}{r^2} \left[\frac{V}{m}\right]$ ahol $\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r = \varepsilon$

vákuum, relatív ~~[illegible]~~ permittivitás $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$

Áram: mozgó töltések
Az A felületen átáramló áram:

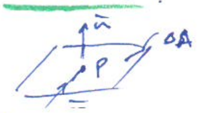
$$I_A = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} \text{ [A]}$$



→ ~~[illegible]~~ Árammodellek:

a, Térbeli: $\vec{J} \left[\frac{A}{m^2}\right]$ áramsűrűség-vektor

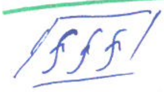
$$\vec{n} \cdot \vec{J}(\vec{r}, t) = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta A} = \lim_{\substack{\Delta A \to 0 \\ \Delta t \to 0}} \frac{\Delta Q}{\Delta A \Delta t}$$

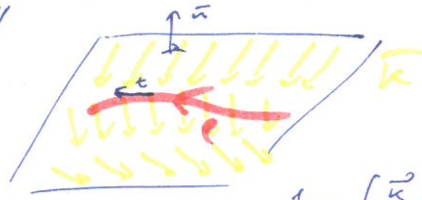


J_n: felületre merőleges komponens

$I_A = \int_A \vec{J} \cdot dA$: egységnyi idő alatt egységnyi felületen áthaladó töltés

b, Felületi áram: $\vec{K}\ [\frac{A}{m}]$: a töltések egy felület mentén mozognak





(pl.: nagyon vékony vezető (NYÁK) (Mikroszalag))

$\bar{n}$: felület normálisa

τ: görbe érintője

l: ezt a vonalat hány töltés keresztezi?

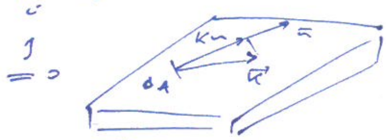
$$I_l = \int_l \vec{K}\, dl = \int_l \vec{K}(\bar{n} \times \bar{t})\, dl$$: adott vonalat keresztező áram

c, Vonalszerű: $\vec{I}\ [A]$

áram egy vékony vezetőben: az áram egy vékony vonal mentén folyik.

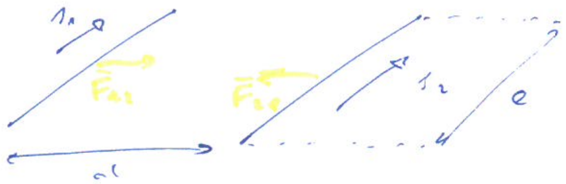
$I = \sum_i I_i$

$\Delta I = J_n \cdot \Delta A$



$\Delta I = K_n \cdot \Delta A$

→ Mágneses erőtörvény: (Biot-Savart, Ampère)
két $\parallel$ vezető árammal vonalszerűvel.



d: két vezető távolsága

l: vezetékek hossza

Ha $I_1 = I_2$, valamint $l = 1m$; $d = 1m$ és a mért erő $F = 2 \cdot 10^{-7} N$, akkor
$I = 1A$.

↓

Tehát a μ_0 révén az Ampere definíciójával
van természetes módon definiálva.

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$: vákuum-permeabilitás

Két párhuzamos vezetőben folyó áram vonzza egymást, ha az áramok azonos irányúak, ellenkező esetben taszítják egymást.

$c = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$: természeti állandó

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$: definiált fizikai állandó

$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$: származtatott fizikai állandó

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \Rightarrow \varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$$

$$\cancel{\Rightarrow \mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}}$$

II. Mutassa be a folytonossági egyenlet különböző alakjait!

Kapcsolatot ír le az áramsűrűség és töltéssűrűség között

a, Szabad töltéshordozók árama: $j_f = \rho \cdot \vec{v}$

$\vec{v}$ sebességvektor: leírja a töltések mozgását

töltéshordozók. töltéshordozók sebessége

$j_f = \rho_+ \cdot \vec{v}_+ + \rho_- \cdot \vec{v}_-$

pozitív negatív töltéshordozók

a 2 sebesség nagyban eltérhet

$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\rho \cdot A \cdot v \cdot \Delta t}{\Delta t}$

$\frac{I}{A} = j = \rho \cdot v$

$I = -\frac{dQ}{dt}$

b, Töltésmegmaradás elve (ΣQ = konstans (=0) világegyetem össztöltése)

S(V): S körülöleli a V térfogatot

$\oint_{S(V)} \vec{j}\, d\vec{S} = -\frac{dQ_V}{dt}$ a térfogatban lévő össztöltés

integrális alak

Egy térfogatban be- és kiáramló áramok összege, megadja az időegység alatt lekövetkezett töltésváltozást

$\oint_{S(V)} \vec{j}\, d\vec{S} = -\frac{dQ_V}{dt}$

Gauss-Osztrogradszkij

$\oint_{S(V)} \vec{j}\, d\vec{S} = -\frac{dQ_V}{dt} = \int_V \operatorname{div} \vec{j}\, dV$ $\qquad$ $-\frac{dQ_V}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho\, dV \Big|_{V=\text{áll.}} = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV$

$\forall$ V-re

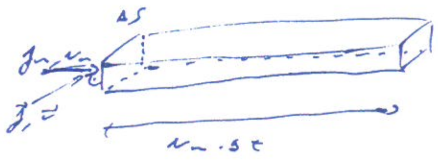
$\oint_{S(V)} \vec{j}\, d\vec{S} + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho\, dV = 0$: integrális

$\Downarrow$

$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$: differenciális alak

Ez a töltésre vonatkozó folytonossági egyenlet.

Ez nem fontos:



$\Delta Q = \rho \cdot \Delta S \cdot v_n \cdot \Delta t$

c, Máshogy levezetve:

Ampère-féle gerjesztési törvény: $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

és

elektromos Gauss: $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$ $\quad \Big| \operatorname{div}(\ )$

$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{div} \vec{j} + \operatorname{div} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

$0 = \operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\operatorname{div} \vec{D}}_{\rho}$

$0 = \operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$

III. Mutassa be az elektromágneses tér intenzitásvektorait, és kapcsolatukat az erőhatással

Az intenzitásvektorok az EM teret leíró vektormezőkhöz tartoznak, erőhatással kapcsolatosak, mérhetőek.

→ Intenzitásvektorok: ~ erőhatás

a) Elektromos térerősség: egységnyi, nyugvó pontszerű töltésre ható erő → $v = 0$

$[\vec{E}] = \frac{V}{m}$

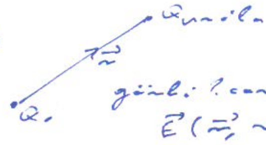
(kapcsolat F-fel) $\vec{E} \triangleq \frac{\vec{F}}{Q}$ pl.: ponttöltés tere az origóban

↓

forrástöltés + próbatöltés (erre hat a forrás)

⇓

visszavezethető a Coulomb-törvényre. $|\vec{r}| = r$



gömbi koordinátákkal:

$\vec{E}(r, \vartheta, \varphi) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\cdot \vec{e}_r$

$\vec{E} = \frac{F}{Q_{próba}}$

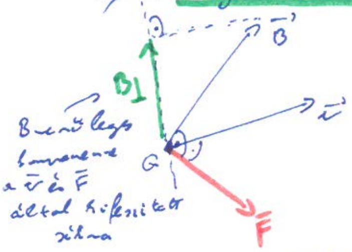
Csak radiális komponense van:

$$E = \begin{cases} E_r(r) = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon r^2} \\ E_\vartheta = 0 \\ E_\varphi = 0 \end{cases}$$

Gömbszimmetrikus tér jön létre:

Pozitív töltésektől kifelé, negatívoktól befelé mutatnak az erővonalak.
Az azonos előjelűek taszítják, az ellentétesek vonzzák egymást.

b) Mágneses indukció: mozgó töltésre ható erő



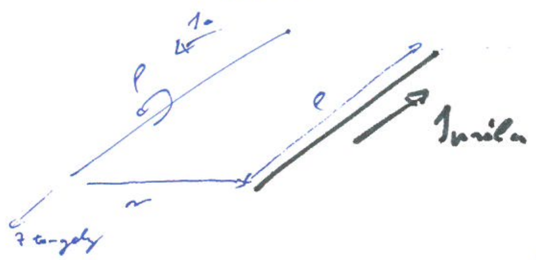
$[\vec{B}] = \frac{Vs}{m^2}$ vagy T (Tesla)

$\vec{F}$ merőleges mind $\vec{B}$-re, mind az indukcióra (Lorentz-erő)

Ha $\vec{E} = 0$, $\vec{F} = Q\cdot(\vec{v} \times \vec{B})$ (Lorentz-erő)

$F = Q \cdot v \cdot B_\perp \rightarrow B_\perp = \frac{F}{Q\cdot v}$

Példa: vonaláram a hengerkoordináta-rendszer z-tengelyén



$F = B \cdot I \cdot l \rightarrow B = \frac{F}{I \cdot l}$ (kapcsolat F-fel)

Biot-Savart, Ampère:

$|F| = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{|I_0|\cdot|I_{próba}|}{r} \cdot l$ /: $I_{próba}$ /: l

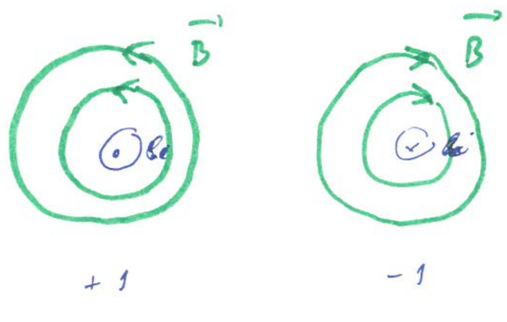
⇓

B számolható

Ampère-féle gerjesztési törvény:

$$\vec{B}(r, \varphi, z) = \frac{\mu_0 \cdot I_0}{2\pi r} \cdot \vec{e}_\varphi = \begin{cases} B_r(r) = 0 \\ B_\varphi(r) = \frac{\mu_0 \cdot I_0}{2\pi r} \\ B_z(z) = 0 \end{cases}$$

Hengerszimmetrikus tere van: $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$ forgásszimmetria
$\frac{\partial}{\partial z} = 0$ eltolási szimm.



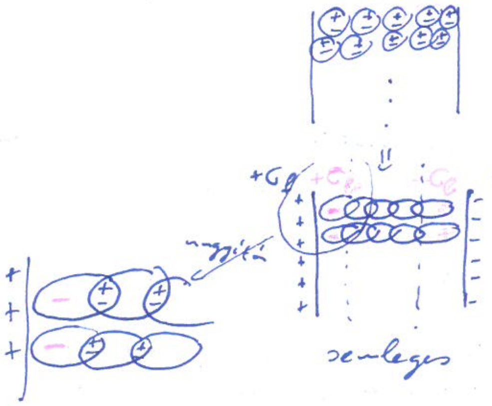
IV. Mutassa be az elektromágneses tér „gerjesztett" vektorait, és származtatásukat a forrásmennyiségekből

a) Eltolás: elektromos eltolás: $\vec{D}$ $\left[\frac{As}{m^2}\right]$ / felületi töltéssűrűséggel egyezik meg a mértéke /

töltéshordozók: $\rho = \rho_f + \rho_e$ (f: szabad, e: kötött)

szabadon elmozdulnak — és meg van valamilyen erő hatására

pl.: dielektrikummal töltött síkkondenzátor:



$E = 0$ eset (töltéssemlegesnek mutatkozik)

$E \neq 0$ eset (töltés van a lemezeken)

→ eltolódik a töltések középpontja

σ_f mellett megjelenik σ_e is

A polarizáció-vektorral jellemezhető (polarizáció: dipólusok rendeződése) (= dipólmomentum-sűrűség): $\vec{P}$

Legyen $\rho_e = -\operatorname{div}\vec{P}$

Gauss: $\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho_f + \rho_e) = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho_f - \operatorname{div}\vec{P})$

$$\varepsilon_0 \operatorname{div}\vec{E} + \operatorname{div} P = \rho_f$$

$$\operatorname{div}(\underbrace{\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}_{D}) = \rho_f \qquad \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\operatorname{div}\vec{D} = \rho_f$$

$\Updownarrow$

Makroszkopikus Gauss

Ha lineáris a dielektrikum: $\vec{P} \sim \vec{E} \rightarrow \vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$ (szuszceptibilitás)

Így: $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \chi \vec{E} = \varepsilon_0 \underbrace{(1+\chi)}_{\varepsilon_r} \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$

ε_r: relatív permittivitás vagy dielektromos állandó (mérhető)

Spec: levegő vagy vákuum: $\varepsilon_r \approx 1 \rightarrow \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$

b) Mágneses térerősség: $\vec{H}$ $\left[\frac{A}{m}\right]$

$$\vec{J} = \vec{J}_f + \vec{J}_e + \frac{\partial P}{\partial t}$$

szabad, belső (kötött) minden egyéb, polarizációs

Legyen $\vec{J}_e = \operatorname{rot}\vec{M}$ ahol $\vec{M}$: mágnesezettség (mágneses dipólmomentum-sűrűség)

Gerjesztési-törvény (Ampère): $\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0 \cdot J + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Maxwell I: $\operatorname{rot} H = J + \frac{\partial D}{\partial t}$

$B = \mu_0 H$

$D = \varepsilon E$

Így: $\operatorname{rot}\frac{B}{\mu_0} = J + \frac{\partial \varepsilon_0 E}{\partial t} = \mu_0 J + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial E}{\partial t}$, $\frac{1}{c^2} = \mu_0 \varepsilon_0$

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\left(\vec{J}_f + \vec{J}_e + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}\right) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\left(\vec{J}_f + \operatorname{rot}\vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}\right) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0\left(\vec{J}_f + \operatorname{rot}\vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}\right) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot}\left(\underbrace{\frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}}_{H}\right) = \vec{J}_f + \frac{\partial}{\partial t}\left(\underbrace{\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}_{\vec{D}}\right)$$

$$\vec{H} \triangleq \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M} \Rightarrow \vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$$

$\Updownarrow$

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad \text{általában } \vec{J} = \vec{J}_f$$

$\Updownarrow$

makroszkopikus

Ha lineáris mágneses közeg:

$\bar M \sim \bar H \Rightarrow \bar M = \chi_m \cdot \bar H$ -> hogy lesz intenzív mennyiségből extenzív

mágneses szuszceptibilitás: extenzív (összeadódnak)
intenzív („oldódnak" ui: hőmérséklet)

$\bar H = \frac{1}{\mu_0}\bar B - \chi_m \bar H \Rightarrow \bar B = \mu_0(\bar H + \chi_m \bar H)$

$$B = \mu_0 \underbrace{(1+\chi_m)}_{\mu_r} \bar H$$

μ_r: relatív permeabilitás

Speciális: vákuum, levegő: $\mu_r = 1 \to \bar B = \mu_0 \bar H$

Ha: $\chi_m < 0$: diamágneses
- $\chi_m > 0$: „kicsi": paramágneses
- ferromágneses anyagok
- ferrimágnesesség: Néel-hőmérséklet alatt alakul ki a nagy mágnesezettség

i, Makroszkopikus elv: az anyag jellemzőit a makroszkopikus anyagjellemzők ~~írj~~ írják le.

ii, Anizotrop: iránfüggő: $\bar{\bar\varepsilon}$ és $\bar{\bar\mu}$ tenzorok: $\bar D = \bar{\bar\varepsilon}\cdot\bar E$ és $\bar B = \bar{\bar\mu}\,\bar H$

Közeg jelenléte nélkül, szabad térben E és D, illetve H és B csak egy skalárszorzóban különböznek, ezért fizikai tartalmuk azonos. Az intenzitásvektorok és gerjesztési vektorok eltérő fizikai tartalmat csak közegek jelenléte esetén hordoznak.

V. Mutassa be röviden a makroszkopikus elektromos és mágneses anyagjellemzők levezetésének módját, anyagszerkezeti hátterét!

Általános esetben az E és D, illetve B és H vektorok nem párhuzamosak. Ezeknek találták ki a következő két anyagjellemző állandót. A permittivitás azt mutatja, hogy egy közeg mennyire áll ellen a rá ható elektromos térnek szemben. A permeabilitás pedig azt mutatja, hogy egy közeg mennyire áll ellen a rá ható mágneses térnek szemben.

=> Permittivitás: ε

Elektromos eltolás vákuumban: $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} \left[\frac{As}{m^2}\right]$

általános esetben: $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + P \left[\frac{As}{m^2}\right]$ $\quad \rho_\ell = -\mathrm{div}\,\vec{P}$ (dipólusmomentum sűrűsége)

Legyen $\rho = \rho_f + \rho_e \qquad \rho_e = -\mathrm{div}\,\vec{P}$

$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho_f + \rho_e)$ mivel $\mathrm{div}\,\vec{D} = \rho$

$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho_f - \mathrm{div}\,\vec{P})$

$\mathrm{div}(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_f \quad \rightarrow \quad \rho_f = \mathrm{div}\,\vec{D}$

Lineáris dielektrikumban $\vec{P}$ és $\vec{E}$ arányosak ($\vec{P} \sim \vec{E}$):

$\vec{P} = \varepsilon_0 \cdot \chi_e \cdot \vec{E}$ $\quad \chi_e$: elektromos szuszceptibilitás (skalár)

$\vec{D} = \underbrace{\varepsilon_0 (1+\chi)}_{\varepsilon_r} \vec{E} \quad \rightarrow \quad D = \underbrace{\varepsilon_0 \varepsilon_r}_{\varepsilon} \vec{E} = \varepsilon \cdot \vec{E}$

Ahol: ε_r: anyagra jellemző relatív permittivitás

ε_0: vákuum-permittivitás: $\frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} = 8{,}854 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$

-> származtatott: $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$

Anizotrop anyagokban ε irányfüggő -> leírása tenzorokkal: $\vec{D} = \bar{\bar{\varepsilon}} \cdot \vec{E}$

Speciális: vákuum, levegő: $\varepsilon_r = 1 \Rightarrow \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$

=> Permeabilitás: μ

Mágneses térerősség vákuumban: $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$

általános eset: $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}$

↑ mágnesezettség vektor: mágneses dipólusmomentum sűrűsége

Legyen $\vec{J} = \vec{J_f} + \vec{J_e}$ ahol $J_e = \mathrm{rot}\,\vec{M}$

Lineáris mágneses tulajdonságú anyagok esetében $\vec{M}$ és $\vec{H}$ arányosak ($\vec{M} \sim \vec{H}$):

$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$ $\quad \chi_m$: mágneses szuszceptibilitás

$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \chi_M \cdot \vec{H}$

$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \chi_m \vec{H}) = \mu_0 H \underbrace{(1 + \chi_m)}_{\mu_r} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad \rightarrow \quad \vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$

Ahol: μ_r: anyagjellemző relatív permeabilitás

μ_0: vákuum-permeabilitás $= 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$

-> definiált

Anizotrop anyagokban: μ tenzoriális mennyiség: $\vec{B} = \bar{\bar{\mu}} \cdot \vec{H}$

Speciális: vákuum, levegő: nem mágneses anyagok: $\mu_r = 1$, $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$

Fajtái:
- diamágneses: $\chi_m < 0$ -> ellentétesen állnak be külső erő hatására
- paramágneses: $\chi_m > 0$ „kicsi" -> külső erő nélkül nem mutatnak mágneses tulajdonságot
- ferromágneses: $\chi_m \gg 0$ „nagy" -> állandó mágnes lesz külső mágneses tér hatására + meg is tartja a mágnesességét
- ferrimágneses: Néel-hőmérséklet alatt elvesztik a nagy mágnesezettséget, antiferromágneses anyagok (vasmangán ötvözetek) FeMn

VI. Ismertesse a Maxwell-egyenletek integrális és differenciális alakját, valamint a köztük lévő kapcsolatot!

1. Kiegészítés:

a, Operátorok:

i, rotáció: $\mathrm{rot}\,\vec{v}$: vektortérből csinál vektort, örvényesség dönthető el

↳ forgat: 90°-kal forgat jobbcsavarás szerint

$$\mathrm{rot}\,\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \vec{e_x}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) - \vec{e_y}\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z}\right) + \vec{e_z}\cdot\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$$

ii, divergencia: $\mathrm{div}\,\vec{v}$: vektortérből csinál skalárt, egy pontba húzott érintő meredeksége

↳ deriválást jelent

$$\mathrm{div}\,\vec{v} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

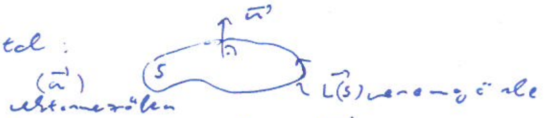
iii, gradiens: grad u : skalárból csinál vektort, egy pontba húzott érintő meredeksége + legnagyobb meredekség irányába mutat.

↳ parciális deriválás

$$\mathrm{grad}\,u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{e_x} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{e_y} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{e_z}$$

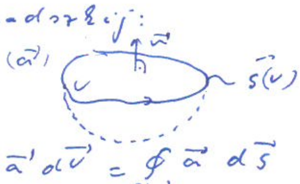
b, Integráltételek:

i, Stokes-tétel:



$$\int_S \mathrm{rot}\,\vec{a}\, d\vec{S} = \oint_{L(S)} \vec{a}\, d\vec{l}$$

ii, Gauss–Osztrogradszkij:



$$\int_V \mathrm{div}\,\vec{a}\, dV = \oint_{S(V)} \vec{a}\, d\vec{S}$$

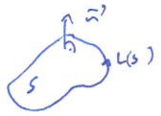
Ezeket használva kapjuk az integrális alakból a differenciális alakot.

2. Maxwell-egyenletek:

A Maxwell-egyenletek differenciálegyenletek, egy pont kicsiny környezetének viszonyait írják le. Ezért az egyenletek feltételezik, hogy a hatások a közvetlen szomszédságban működnek, azaz közelhatási törvények. Evolúciós egyenletek is, a tér pillanatnyi értékeinek ismeretében leírják a tér alakulását, változását a jövőben.

a, I. Ampère-féle gerjesztési törvény:

Az elektromágneses tér „gerjesztett" vektorai között teremt kapcsolatot. A vezetési és eltolási áram mágneses teret kelt:



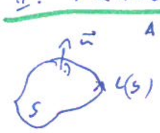
$$\oint_{L(S)} \vec{H}\, d\vec{l} = \int_S \Big(\underbrace{\vec{J}}_{\text{vezetési}} + \underbrace{\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}_{\text{eltolási}}\Big)\, d\vec{S} \xrightarrow{\text{Stokes}} \mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

H: örvényes

H cirkulációja = zárt felületen áthaladó összárammal

b, II. Faraday-féle indukciós törvény:

A mágneses indukció időbeli változása elektromos teret indukál, melynek iránya (Lenz-tv.) ellentétes, mint az őt létrehozó változás. Ez az elektromágneses tér intenzitásvektorai közt teremt kapcsolatot:



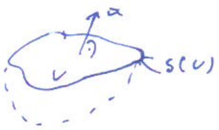
$$\oint_{L(S)} \vec{E}\, d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\, d\vec{S} \xrightarrow{\text{Stokes}} \mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

E: örvényes

↓

S felület változhat időben → mozgási indukció c, III. Elektromos Gauss-törvény:

Zárt felület villamos fluxusa, a belül lévő összes töltéssel egyezik meg.

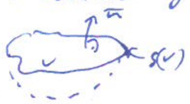


$$\underbrace{\oint_{S(V)} \bar D \, d\bar s}_{\text{összfluxus}} = \underbrace{\int_V \rho \, dV}_{\text{össztöltés}} \xrightarrow{\text{Gauss-Osztr.}} \mathrm{div}\, \bar D = \rho$$

D forrásos: forrása a töltéssűrűség

d, IV. Mágneses Gauss-törvény:

Fluxusmegmaradás törvénye. A mágneses erővonalak zártak, nincs mágneses monopólus.



$$\oint_{S(V)} \bar B \, d\bar s = 0 \xrightarrow{\text{Gauss-Osztr.}} \mathrm{div}\, \bar B = 0$$

B: forrásmentes

e, V. Anyagjellemzők:

$\bar D = \varepsilon \cdot \bar E$; $\bar B = \mu \cdot \bar H$; $\bar J = \sigma(\bar E + \bar E_e)$ → diff. Ohm-törvény

f, VI. Energiasűrűség:

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2$$

Kifejtésük:
- H: mágneses térerősség $[\frac{A}{m}]$
- J: áramsűrűség $[\frac{A}{m^2}]$
- E: elektromos térerősség $[\frac{V}{m}]$
- B: mágneses indukció $[T] = [\frac{Vs}{m^2}]$
- D: elektromos eltolás $[\frac{C}{m^2}] = [\frac{As}{m^2}]$
- ρ: térfogati töltéssűrűség $[\frac{As}{m^3}]$
- ε: permittivitás
- μ: mágneses permeabilitás
- σ: vezetőképesség $[\frac{S}{m}]$
- w: energiasűrűség $[\frac{J}{m^3}]$

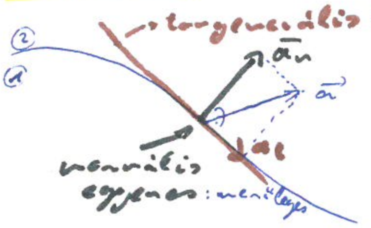
Tulajdonságok:
- lokális
- makroszkopikus
- aszimmetrikus
- B-H és D-E összefüggés megmondható
- anyaghatáron problémás, mivel a terek komponenseinek határa nem, ezért a deriválásban ugrás lép fel, ami baj, így nem differenciálható. Folytonossági feltételek kellenek.
- az integrális alak az általánosabb

VII. Ismertesse az elektromágneses térmennyiségek anyaghatáron teljesülő folytonossági feltételeket!

Sok esetben a közeg nem homogén. A tényállást vizsgáló tétel megfogalmazásához a Maxwell-egyenletek integrális alakját alkalmazzuk egy olyan zárt görbére vagy felületre, amely közvetlenül a határfelület két oldalán helyezkedik el.

A Maxwell-egyenletek differenciális alakját ki kell egészíteni ezekkel a határfeltételekkel, hogy az ugrások hatását kiküszöböljük.

=> Kiegészítés:



$\vec a_n = \vec n\cdot(\vec a\cdot\vec n)$: normális összetevő

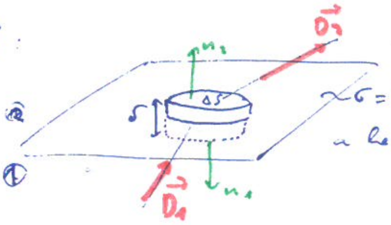
$\vec a_t = \vec n\times(\vec a\times\vec n)$: tangenciális összetevő

$a_n = |\vec a_n| = \vec n\cdot\vec a$

$a_t = |\vec a_t| = |\vec a\times\vec n|$

=> Problémák feloldása:

a) Elektromos eltolás: $\vec D$:



$\sigma = \sigma_f$ (felületi töltéssűrűség)

a henger magassága: $\delta \to 0$

alapterülete: ΔS: kicsi

egyik fele 1-es másik 2-es közegbeli

Maxwell III (elektromos Gauss) alkalmazása:

$$\oint_S \vec D\, d\vec S = \int_V \rho\, dV = Q$$

→ nagy delta

$$\underbrace{-D_{1n}\cdot\Delta S}_{\text{alsó lap}} + \underbrace{D_{2n}\cdot\Delta S}_{\text{fedőlap}} + \underbrace{\Phi(\delta)}_{\text{palást } (\delta \text{ kicsi} \to 0)} = \sigma\cdot\Delta S$$

$$D_{2n}\cdot\Delta S - D_{1n}\cdot\Delta S = \sigma\cdot\Delta S$$

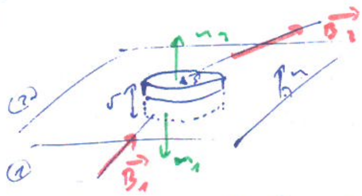
$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma$$

Az eltolás normális irányú komponense ugrik σ-val.

Speciális: $\sigma = 0$: $D_{2n} = D_{1n}$, vagyis D_n folytonosan megy át

Általános: $\vec n\,(\vec D_2 - \vec D_1) = \sigma$ pl.: kondenzátor lemezfelületén

b) Mágneses indukció: $\vec B$:



Maxwell IV (mágneses Gauss) alkalmazása:

$$\int_V \operatorname{div} \vec B\, dV = \oint_S \vec B\, d\vec S = 0$$

$$\oint_S \vec B\, dS = \vec B_2\cdot n\,\Delta S - B_{1n}\,\Delta S + \underbrace{\Phi(\delta)}_{\text{mivel } \delta\to 0 \text{ ezért } =0}$$

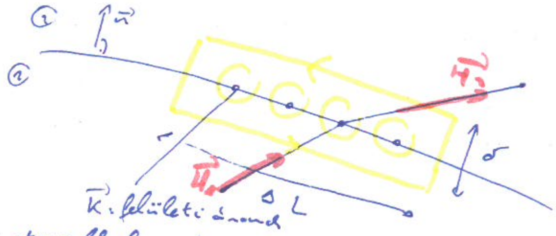
$$\vec B_{2n}\,\Delta S - \vec B_{1n}\,\Delta S = 0$$

$$B_{2n} = B_{1n}$$

B_n folytonosan megy át mindig

Általánosan: $\vec n\,(\vec B_2 - \vec B_1) = 0$

c, Mágneses térerősség: H:



Maxwell I. Ampère-törvény alkalmazása:

$$\oint_l \vec H d\vec l = \int_A \left(\vec J + \frac{\partial \vec D}{\partial t}\right) dA$$

$\vec K = \vec K l$ (csak mozgó töltések hatására)

$\delta \to 0$; Δl kicsi

$$-H_{1t}\cdot\Delta l + H_{2t}\cdot\Delta l + \overbrace{O(\delta)}^{0} = K_\perp \Delta l$$

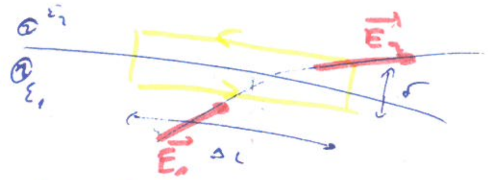
$$H_{2t} - H_{1t} = K_\perp$$

H_t-nek ugrása lehet, ami $K_\perp \Rightarrow K$ a H-ra merőleges irányú része

Speciális: $K_\perp = 0$: nincs felületi áram $H_{1t} = H_{2t}$

Általános: $n \times (\vec H_2 - \vec H_1) = \vec K$ pl.: tekercs felülete

d, Elektromos térerősség: E:



Maxwell II. Faraday alkalmazása:

$$\oint_l \vec E d\vec l = -\frac{\partial}{\partial t}\int_A \vec B dA$$

$$-\vec E_{1t}\cdot\Delta l + \vec E_{2t}\cdot\Delta l = \frac{\partial B_n}{\partial t}\cdot l \cdot dl \qquad \frac{\partial B_n}{\partial t} \to 0$$

$$-E_{1t}\,\Delta l + \vec E_{2t}\,\Delta l = 0$$

$$\vec E_{1t} = \vec E_{2t}$$

Az elektromos térerősség tangenciális komponense folytonos.
pl.: elektród felszíne

Általános: $\vec n \times (\vec E_2 - \vec E_1) = 0$

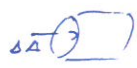
e, Áramsűrűség: J: folytonossági egyenlet alapján @ gondolatmenettel.

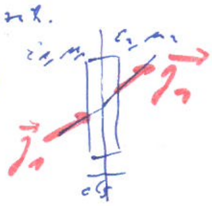
$$J_{2n} - J_{1n} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t}$$ → felületi töltéssűrűség

$$\vec n(\vec J_2 - \vec J_1) = -\frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

Az áramsűrűség normálisa az időegység alatt megváltozott felületi töltéssűrűség arányával változik.

$$\oint_A \vec J d\vec A = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\, dV$$





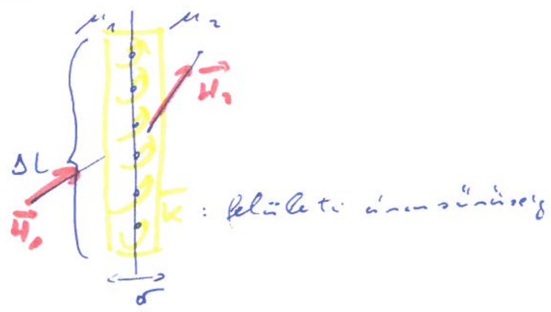
! $\lim_{ds \to 0} \rho = \sigma$

$$-J_{1n}\cdot\Delta A + J_{2n}\cdot\Delta A = -\frac{\partial \sigma}{\partial t}\cdot\Delta A \quad /:\Delta A$$

$$J_{2n} - J_{1n} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

VIII. Hogyan változnak a tér-jellemzők az anyaghatáron, ha ott felületi töltéssűrűség, illetve felületi áram van jelen? Mondjon példát arra, hogy a gyakorlatban milyen körülmények között valósulnak meg ezek!

1, Mágneses térerősség: $\vec{H}$:



Maxwell I.-ből: (Ampère) $\oint_{L(S)} \vec{H}\, d\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial D}{\partial t}\right) d\vec{S}$

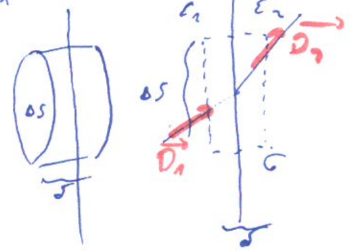
$$-H_{1t}\cdot\Delta L + H_{2t}\cdot\Delta L + \underbrace{O(\delta)}_{0} = K\cdot\Delta L \quad /:\Delta L$$

$$H_{2t} - H_{1t} = \vec{K}$$

$$\vec{n}\times(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{K}$$

A $\vec{K}$ a $\vec{H}$-ban merőleges irányú ugrást okoz, H_t-nek lehet ugrása, ha $K \neq 0$.
Ha $\vec{K} = \vec{0}$ akkor $H_{1t} = H_{2t}$ → nincs ugrás
A felület síkjában folyó áram ($\vec{K}$) esetén a felület áramsűrűségével megfelelően ugrik $\vec{H}$.
Példa: egy tekercs felületén hasonló lép fel.

2, Elektromos eltolás: $\vec{D}$:



Maxwell III (elektromos Gauss):

$$\oint_{SV} \vec{D}\, d\vec{S} = \int \rho\, dV$$

$$\underbrace{-D_{1n}\cdot\Delta S}_{\text{alul}} + \underbrace{D_{2n}\cdot\Delta S}_{\text{fedlap}} + \underbrace{O(\delta)}_{\text{palást } \delta\to 0} = \sigma\cdot\Delta S \quad /:\Delta S$$

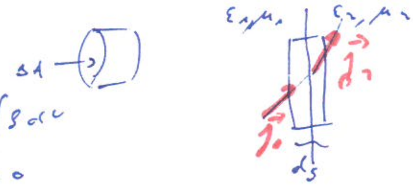
$\Delta S \neq 0$ de $V \to 0$ mivel $\delta \to 0$

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma$$

$$\vec{n}\cdot(D_2 - D_1) = \sigma$$

Tehát, ha a felületi töltéssűrűség σ, akkor az elektromos eltolás normális komponense az anyaghatáron σ-val ugrik.
Példa: egy kondenzátor felületén jellemző.

3, Áramsűrűség: $\vec{J}$:



$\lim \rho = 0$
$ds \to 0$

$$\int_A \vec{J}\, d\vec{A} = -\frac{\partial}{\partial t}\int \rho\, dV$$

$\lim \rho = 0$, $ds \to 0$

$$-J_{1n}\cdot\Delta A + J_{2n}\cdot\Delta A = -\frac{\partial\sigma}{\partial t}\cdot\Delta A \quad /:\Delta A$$

$$J_{2n} - J_{1n} = -\frac{\partial\sigma}{\partial t}$$

$$\vec{n}\,(\vec{J}_2 - \vec{J}_1) = -\frac{\partial\sigma}{\partial t}$$

Az áramsűrűség normális irányú komponense az időegység alatt megváltozott töltéssűrűséggel ugrik az anyaghatáron.
Példa:

IX. Ismertesse az elektromágneses térben az energiasűrűségre és az energiaáramlásra vonatkozó általános összefüggéseket!

Az elektromágneses energia az energiának csak egy fajtája. (Pl.: az ellenálláson átfolyó áram hatására az elektromágneses energia belső energiává alakul az ellenálláson, amelyet az ellenállás mint hőt ad le).
V térfogatban felhalmozott $w = w(t)$ elektromágneses energia kétféleképpen változhat meg időben. Egyrészt feltételezünk olyan $P = P(t)$ teljesítményű folyamatot, amelyek a $P>0$ esetén a tér energiáját csökkentik, illetve $P<0$ esetén a térenergiát növeli.
Másrészt a térfogatot lezáró S zárt felületen áttáramló, vagy átsugárzó $P_S = P_S(t)$ teljesítmény csökkenti a térenergiát, ha $P_S>0$ illetve növeli, ha $P_S<0$.
Így az energiamérleg: $\frac{dw}{dt} + P + P_S = 0$

A számításhoz szükséges fogalmak: → Maxwell 1, 2 differenciális alakban:

$$1,\ \mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad / \cdot -\vec{E} \Rightarrow -\vec{E}\cdot \mathrm{rot}\,\vec{H} = -\vec{E}\cdot\vec{J} - \vec{E}\cdot\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$2,\ \mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad / \cdot \vec{H} \Rightarrow \vec{H}\cdot \mathrm{rot}\,\vec{E} = -\vec{H}\cdot\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \Big\} \oplus$$

$$\text{Így: } \underbrace{\vec{H}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{E} - \vec{E}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{H}}_{\mathrm{div}(\vec{E}\times\vec{H})} = \underbrace{-\vec{E}\cdot\vec{J}}_{(2)} - \underbrace{\left(\vec{E}\cdot\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\cdot\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)}_{(1)\ (=\frac{\partial w}{\partial t})} \text{: alapegyenlet}$$

1. Az elektromágneses tér energiasűrűsége: w : $[w] = \frac{J}{m^3}$ $\left(\frac{dw}{dt}\right)$

(1) $= \frac{\partial w}{\partial t}$ speciális: lineáris közeg
↳ $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$; $\vec{B} = \mu\vec{H}$

$$(1) = \vec{E}\cdot\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\cdot\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{E}\cdot\frac{\partial \varepsilon\vec{E}}{\partial t} + \vec{H}\cdot\frac{\partial \mu\vec{H}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\Big(\underbrace{\tfrac{1}{2}\varepsilon\underbrace{\vec{E}\cdot\vec{E}}_{E^2}}_{w_e\ \text{elektromos}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\mu\underbrace{\vec{H}\cdot\vec{H}}_{H^2}}_{w_m\ \text{mágneses}}\Big)$$

energiasűrűség

Tehát $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(w_e + w_m)$

2. $\vec{E}\cdot\vec{J}$: Az elektromágneses tér teljesítménysűrűsége: $\left[\frac{W}{m^3}\right]$ (P)

$$\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_b) + J_{be} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{J} - \sigma\vec{E}_b}{\sigma} \quad / \cdot \vec{J} \quad \text{ahol } J_{be} = 0$$

$$\vec{E}\cdot\vec{J} = \left(\frac{1}{\sigma}\cdot\vec{J} - \vec{E}_b\right)\cdot\vec{J}$$

$$(2) = -\vec{E}\cdot\vec{J} = -\frac{1}{\sigma}\cdot\vec{J}^2 + \vec{E}_b\cdot\vec{J}$$

3. Lokális energiamérleg:

Az alapegyenlet ezt a formát ölti: $\underbrace{-\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{J^2}{\sigma} - \vec{E}_b\cdot\vec{J} + \mathrm{div}(\vec{E}\times\vec{H})}_{\text{lokális energiamérleg}}$

Integráljuk ezt a térfogatra:
↓ $\int dV$

$$\underbrace{\int_V -\frac{\partial w}{\partial t}\,dV}_{} = \int_V \frac{J^2}{\sigma}\,dV - \int_V (\vec{E}_b\cdot\vec{J})\,dV + \int_V \mathrm{div}(\vec{E}\times\vec{H})\,dV$$

ha V = állandó:
$-\frac{d}{dt}\int w\,dV = -\frac{dw}{dt}$
a térfogatban tárolt energia változási sebessége (-1)-szerese.

|| Gauss-Osztrogradszkij:
$\oint_{A(V)} (\vec{E}\times\vec{H})\cdot d\vec{A}$

Így kapjuk a globális energiamérleget, más néven Poynting-tételt:

$$-\frac{dw}{dt} = \int_V \frac{J^2}{\sigma}\,dV - \int_V \vec{E}_b\cdot\vec{J}\,dV + \oint_{A(V)} (\vec{E}\times\vec{H})\,d\vec{A}$$

a) b) c) d)

Ahol: a/ Az elektromágneses térben tárolt energia változási gyorsasága

b/ Hőteljesítmény, Joule-veszteség → térenergia csökkenés, időegység alatt hővé vált teljesítmény vezető anyagban $\sim R \cdot J^2 \sim \frac{1}{\sigma} \cdot J^2$

c/ Külső töltésmozgató hatás. áramsűrűség (külső erők munkája jelen EM munka

d/ Felületen keresztül kisugárzott teljesítmény, veszteség.

4, Poynting-vektor: $\vec{S}$ (P_s)

↳ Energiaáram-sűrűség (S): megmutatja, hogy milyen irányba áramlik az elektromágneses energia és, hogy mennyi energia áramlik át az S-re merőleges egységnyi felületen időegység alatt. (egységnyi felületen egységnyi idő alatt átáramló energia, azaz felületegységen áthaladó teljesítmény)

$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ $\qquad [\vec{S}] = \frac{W}{m^2}$

P_s: kisugárzott teljesítménysűrűség mely a Poynting-vektor divergenciája

$P_s = \operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H})$

$P_s = \oint_A \vec{S}\, d\vec{A}$

Tehát: $$-\frac{dW}{dt} = \underbrace{\int_V J^2 \cdot \frac{1}{\sigma}\, dV - \int_V \vec{E_e} \cdot \vec{J}\, dV}_{P} + \underbrace{\oint_{A(V)} (\vec{E} \times \vec{H})\, d\vec{A}}_{P_s} \quad / \; W = \int_V w\, dV \text{ és } w = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta V}$$

$\Updownarrow$

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = \underbrace{\frac{J^2}{\sigma} - \vec{E_e} \cdot \vec{J_e}}_{p} + \underbrace{\operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H})}_{P_s}$$

X. Ismertesse az elektromágneses térben az erőhatással kapcsolatos összefüggéseket!

1, Lorentz-erő:

→ pontszerű objektumra: $\vec{F} = Q \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

→ gyakorlatban: kiterjedt testekre: $\vec{f} = \rho_{össz} \cdot \vec{E} + \vec{J}_{össz} \times \vec{B}$

$\rho = \frac{Q}{\Delta V}$ $\qquad \frac{Q \cdot \Delta \vec{v}}{\Delta V} = \rho \cdot \vec{v}$ mivel: $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{A \cdot \rho \cdot \Delta t \cdot \vec{v}}{\Delta t}$

$\frac{I}{A} = J = \rho \cdot \vec{v}$

össz: szabad + kötött

Nem használható jól a gyakorlatban, mivel anyagjellemzők is vannak az egyenletben

pl.: $\vec{f} = \rho_f \cdot \vec{E} - \underbrace{\frac{1}{2} E^2 \operatorname{grad} \varepsilon}_{} + \ldots + \vec{J}_f \times \vec{B} - \underbrace{\frac{1}{2} H^2 \operatorname{grad} \mu}_{} \ldots$

szabad töltés $\qquad$ szabad áram

anyagjellemző-változásból adódik.

Fentebb látható, hogy az erőnek két komponense van: egy elektromos és egy mágneses.

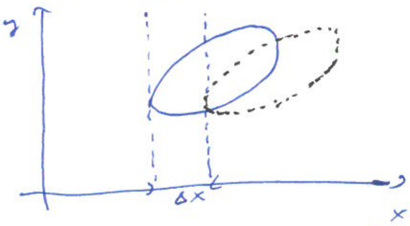
↳ Elektromos: $\vec{F}_e = Q \cdot \vec{E}$

Ha a töltés pozitív, akkor az elektromos erő iránya azonos az elektromos térével.

↳ mágneses: $\vec{F}_M = Q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$

Homogén mágneses térben mozgó töltésre a mágneses tér sebességre merőleges komponense erőt fejt ki. Mivel a Lorentz-erő mindig merőleges marad a részecske sebességére, ezért munkát nem végez. Ez azt jelenti, hogy a mágneses tér egy mozgó töltés kinetikus energiáját nem változtatja meg, a részecske csak haladási irányában térülhet el. A mágneses erő irányát a jobbkéz-szabály határozza meg. Ez a formula gyakorlati számításokra nem alkalmas. Egy mágneses térben mozgó vezetőre hat a Lorentz-erő, így a vezető két vége közt feszültség mérhető.

2, virtuális munka elve:



x irányba mozgatjuk

W_{EM} változik, mert az EM-tér munkát végez a testen.

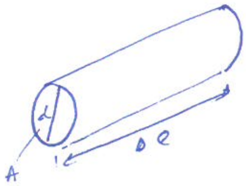
$$-\Delta W_{EM} = F_x \cdot \Delta x$$

Ha más forrás nem játszik szerepet az átalakulásban:

$$F_x = \lim_{\Delta x \to 0} \left[-\frac{\Delta W_{EM}}{\Delta x} \right] = -\frac{\partial W_{EM}}{\partial x} = F_x$$

XI. Ismertesse az Ohm-törvény differenciális alakját, valamint a nem elektromágneses eredetű töltésmozgató hatás figyelembevételének módjait. (Példával)

Az Ohm-törvény differenciális alakja azt mondja ki, hogy a konduktív (vezetési) áramsűrűség arányos az elektromos térerősséggel.



$R = \frac{U}{I} \Rightarrow U = R \cdot I$

és

$R = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\Delta l}{\Delta A}$

és

$I = J \cdot \Delta A$

és

$U = E \cdot \Delta l$

$$E \cdot \cancel{\Delta l} = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\cancel{\Delta l}}{\cancel{\Delta A}} \cdot J \cdot \cancel{\Delta A}$$

$$\sigma \bar{E} = \bar{J}$$

ahol σ: fajlagos vezetőképesség $\frac{1}{\Omega}$
$\rho = \frac{1}{\sigma}$: fajlagos ellenállás

↳ Ehhez hozzáadódhatnak a nem elektromágneses eredetű térerősségek ($\bar{E}_b$) és áramsűrűségek ($\bar{J}_b$) (beiktatottak), így: $\bar{J} = \sigma(\bar{E} + \bar{E}_b) + \bar{J}_b$

↳ a töltésekre hat egy nem elektromos eredetű erő

↳ Beiktatott térerősség (E_b) lehet például egy mágneses térben mozgó (~~áramló~~) vezetőben fellépő $\bar{v} \times \bar{B}$ indukált elektromos térerősség. Másik példa egy kémiai eredetű telep diffúzió, ahol az $\bar{E}_b$ az elektrolitban lép fel és a töltésdiffúziót az elektródák közt (Külső energiaforrás ~~hatás~~ munkájára) megakadályozza el

↳ $\bar{J} = \sigma(\bar{E} + \bar{E}_b)$

↳ Beiktatott áramsűrűség (J_b) is fontos, melyre jó példa a van-de Graaf generátor, ahol nem folyik áram, de mégis mozognak a töltések, mivel egy szalag szállítja őket.

↳ Így a végső képlet:

$$\bar{J} = \sigma(\bar{E} + \bar{E}_b) + \bar{J}_b$$

Példa a mindennapokból:
↳ a beiktatott térerősségre jó példa az az elem amit a boltban lehet venni; itt ad a két vége közti potenciálkülönbség ismert → ebből számítható $\bar{E}_b$

XII. Ismertesse a Maxwell-egyenletek teljes rendszerét (csak differenciális alakban, de kiegészítve a konstitúciós egyenletekkel, folytonossági feltételekkel, valamint az erőhatást és energiaviszonyokat leíró egyenletekkel)!

=> Maxwell-egyenletek differenciális alakja:

-> I. $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

-> II. $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

-> III. $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$

-> IV. $\operatorname{div} \vec{B} = 0$

- mezőhatáron nem értelmezhetők
- evolúciós egyenletek + kezdeti feltételek.

=> Konstitúciós egyenletek, anyagegyenletek:

-> $\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P}$

-> $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$

-> $\vec{J} = \sigma_0(\vec{E} + \vec{E}_{be}) + \vec{J}_{be}$

=> Folytonossági (határ) feltételek:

-> $\vec{n}(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma$ } ugrása van } normális irány

-> $\vec{n}(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$

-> $\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = K$ } ugrása van } tangenciális irány

-> $\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$

=> Energia, erő:

-> $\frac{\partial w}{\partial t} = \vec{E} \cdot \frac{\partial \varepsilon \cdot \vec{E}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \mu \cdot \vec{H}}{\partial t} = \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

-> $\vec{f} = \rho_{össz} \cdot \vec{E} + \vec{J}_{össz} \times B$

$\frac{Q}{\Delta V}$ $\qquad$ $\frac{Q \cdot \vec{v}}{\Delta V} = \rho \cdot \vec{v} = \vec{J}$

-> Fennálnak még kezdeti feltételek is, illetve a kauzalitás (ok-okozati összefüggés). Így az egész egyenletrendszernek létezik egyértelmű megoldása. Ezt nevezzük egzisztencia és unicitás tételnek. => determinisztikus modell.

XIII. Ismertesse az elektrodinamika felosztásait!

Az elektrodinamika módszertani felosztása az időbeli változás sebessége szerint történik, így léteznek állandó, lassan változó, illetve változó terek.

1, Sztatikus és stacionárius terek:

- nincs vagy elhanyagolható az időbeli változás: $\frac{\partial}{\partial t}=0$
- pl.: hálózati 50 Hz határai
- ha az idő szerinti deriváltakat elhagyjuk, akkor a Maxwell-egyenletrendszer két részre válik, elektrosztatikára és magnetosztatikára.

a, Elektrosztatika:

- Faraday: $\text{rot}\,\vec{E}=0$ → az elektrosztatikus tér örvénymentes, van zárt görbén önmagában potenciálos
- Gauss(el): $\text{div}\,\vec{D}=\rho$ → az elektromos tér forrása a töltés
- Anyagjellemző: $\vec{D}=\varepsilon\cdot\vec{E}$ ($\vec{D}=f(\vec{E})$) → lineáris anyagok, homogén tér

Fogalmak: elektróda, potenciál, kapacitás
Alkalmazás: nagyfeszültségű technika

b, Magnetosztatika: (permanens mágnesek tere)

↳ statikus mágneses tér, ahol áram nem folyik.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \text{rot}\,\vec{H}=0 \\ \bullet\ \text{div}\,\vec{B}=0 \\ \bullet\ \vec{B}=\mu\cdot(\vec{H}+\vec{M})=f(\vec{H}) \end{array}\right\}$$ Homogén egyenletrendszer-skalár tér, a megoldása

ahol M: permanens mágnes mágnesezettsége

Fogalmak: mágneses skalárpotenciál
Alkalmazás: villamos gépek.

c, Stacionárius áramlási tér:

↳ stacionárius áram folyik ($J\neq 0$ és $J=$ áll.)

$$\left.\begin{array}{l} \text{rot}\,\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \\ \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=0 \\ \text{div rot}\,\vec{H}=\text{div}\,\vec{J} \\ \quad\text{div rot}\,\vec{x}=0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \bullet\ \text{div}\,\vec{J}=0 \\ \bullet\ \text{rot}\,\vec{E}=0 \\ \bullet\ \vec{J}=\sigma(\vec{E}+\vec{E_i})+\vec{J_c} \end{array}\right\}$$ áramlást leíró egyenletek

Fogalmak: ellenállás, áramkörök
Alkalmazás: földelés, biztosítások, orvosi műszerek (idegi stimuláció)

d, Stacionárius mágneses tér:

↳ stacionárius áram hozza létre

- $\text{rot}\,\vec{H}=\vec{J}$
- $\text{div}\,\vec{B}=0$
- $\vec{B}=\mu(\vec{H}+\vec{M})=f(\vec{H})$

Fogalmak: induktivitás, vektorpotenciál
Alkalmazás: villamos gépek, villamos energia átvitel

A stacionárius tér egyirányú csatolásban van az áramlási térrel, nincs rá visszahatással.

2, Kvázistacionárius terek: - lassú időbeli változás

a, Mágneses (örvényáramú tere): $\frac{\partial \vec D}{\partial t} \approx 0$; $\vec J >> \frac{\partial \vec D}{\partial t}$

↳ eltolási áramok hatása elhanyagolható ($\frac{\partial \vec D}{\partial t}$)

↳ mert a fémekben a vezetési áramsűrűség sokkal nagyobb mint az eltolási $|\vec J| >> |\frac{\partial \vec D}{\partial t}|$

- rot $\vec H = \vec J$
- rot $\vec E = -\frac{\partial \vec B}{\partial t}$ → elektromos és mágneses tér csatolásban vannak.
- div $\vec B = 0$
  - $\vec B = f(\vec H) = \mu \cdot \vec H$
  - $\vec J = \sigma \vec E + \vec J_c$

Fogalmak: időben szinuszosan változó terek, skin hatás, behatolási mélység

Alkalmazás: villamos gépek, roncsolásmentes anyagvizsgálat, indukciós hevítés

b, Elektromos (kvázistacionárius áramlás): $\frac{\partial \vec B}{\partial t} \approx 0$

↳ az induktív csatolás elhanyagolható ($\frac{\partial \vec B}{\partial t} \approx 0 \to$ rot $\vec E = 0$)

↳ kapacitív csatolás az eltolási áram között van.

- rot $\vec E = 0$
- div$(\vec J + \frac{\partial \vec D}{\partial t}) = 0$
  - $\vec D = \varepsilon \cdot \vec E$
  - $\vec J = \sigma \cdot \vec E$

Alkalmazás: nagyfeszültségű szigeteléstechnika.

3, Hullámterek:

a, Hullámterjedés:

↳ a térforrásai nem jelennek meg az egyenletekben, jellemzően lineáris közeg, szinuszos változás (tehát $\rho = 0$; $J = 0$)

- rot $\vec H = \varepsilon \cdot \frac{\partial \vec E}{\partial t}$
- rot $\vec E = -\mu \cdot \frac{\partial \vec H}{\partial t}$

Fogalmak: komplex térvektor, (~~hullámterjedés~~), térvektor, síkhullám, TL, polarizáció, reflexió

Alkalmazás: antennák, hullámvezetők, optika, mikrohullámú eszközök

b, Hullámok keltése:

- ~ teljes Maxwell

Hullámhossz: $\lambda = \frac{c}{f}$

konfigurációs jellemző mérete: D

$\lambda >> D$: sztatikus (kvázistac.)

$\lambda \sim D$: hullámtér : full-wave

$\lambda << D$: optikai közelítéssel: ⟨ fizikai „nyaláb"
geometriai „sugár"

XIV. Ismertesse és értelmezze az elektrosztatika alapegyenleteit és jelölje meg néhány alkalmazási területét!

=> Elektrosztatika => stacionárius tér. Az időbeli változás elhanyagolható, vagy nincsen => $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

-> statikus (állandó => időben állandó) elektromos tér. Ha az idő szerinti deriváltakat elhanyagoljuk, akkor a Maxwell-egyenletrendszer két részre válik szét, elektrosztatikára és magnetosztatikára

-> nyugvó töltések tere

=> Alapegyenletek:

-> Maxwell 2: Faraday:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \xRightarrow{\frac{\partial}{\partial t}=0} \operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0}$$

Tehát az elektromos tér örvénymentes, más néven potenciálos.

-> Maxwell 3: Elektromos Gauss:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

Tehát a forrás az elektromos töltés.

↳ Kettő közti összefüggés:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

Lineáris közegben: $\vec{P} \sim \vec{E}$

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} \Rightarrow \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} = \varepsilon_0 \vec{E} \underbrace{(1 + \chi_e)}_{\varepsilon_r}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$$

$$\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}$$

+ : $w = \frac{1}{2} \varepsilon \cdot E^2$

++: Mivel $\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0}$, ezért potenciálos, tehát:

$$E = -\operatorname{grad} \phi \qquad (\text{mert } \operatorname{rot} \operatorname{grad} \phi = 0)$$

ahol ϕ: elektromos skalárpotenciál

=> Alkalmazási területek:

-> nagyfeszültségű technika

-> nagyfrekvenciás technika (pl.: kondenzátor)

-> analógia a stac. áramlási térrel

↳ fogalmak: elektróda, kapacitás, potenciál.

XV. Ismertesse az elektrosztatikus skalárpotenciál fogalmát, bevezetésének módját, valamint kapcsolatát a feszültséggel és térerősséggel!

A skalárpotenciál segédmennyiség. A vektoranalízis integrálfajtáinak egyike. Azt a skalárteret határozza meg, aminek az adott vektortere a gradiense.
Feltételezzük, hogy a töltések mozdulatlanok.

↳ Elektrosztatikus tér: $\text{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ de $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

$\text{rot}\,\vec{E} = 0$: örvénymentes, potenciálos

$\vec{E} = -\text{grad}\,\phi$, mivel $\text{rot}\,\vec{E} = -\text{rot}\,\text{grad}\,\phi$
és $\text{rot}\,\text{grad}\,x = 0$
$\text{rot}\,\vec{E} = 0$

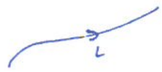
ahol ϕ : elektromos skalárpotenciál

↳ tulajdonságai: → ϕ a tér minden pontjában tetszőleges állandóval eltolható
→ ϕ egy additív k állandó erejéig határozott
↳ k konstans és helyfüggetlen, ezért gradiense 0

$\phi'(\vec{r}) = \phi(\vec{r}) + k$
$\text{grad}(\phi'(\vec{r})) = \text{grad}(\phi(\vec{r})) + \underbrace{\text{grad}(k)}_{0} = \text{grad}(\phi(\vec{r}))$

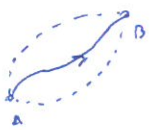
Feszültség (és elektromotoros erő):

a, EMF (electromotive force) jele: ε_L



$\varepsilon_L = \int_L \vec{E}\,d\vec{l}$

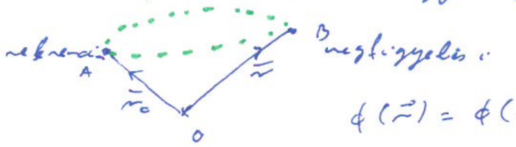
b, speciális: $\text{rot}\,\vec{E} = 0$, a tér potenciálos



$\varepsilon_L = \int_L (-\text{grad}\,\phi)\,d\vec{l} = \phi_A - \phi_B$
$u_{AB} = \phi_A - \phi_B = \int_A^B \vec{E}\,d\vec{l}$

A feszültség az elektromotoros erő egy speciális esete potenciálos térben.
A feszültség nem más mint potenciálkülönbség (jelen esetben A és B pontok között)
Az útvonaltól ezért akkor független, ha a tér potenciálos, csak a két végponttól függ.
A potenciált egy referenciaponthoz képest mérjük (r_0)

$\phi_B = \phi_A - u_{AB}$



$\phi(\vec{r}) = \phi(\vec{r}_0) - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}\,d\vec{l} = \phi(\vec{r}_0) + \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_0} \vec{E}\,d\vec{l}$

Általában a referenciapont a ∞-ben van, potenciálja a referenciapotenciál, ami 0.

Potenciál és térerősség kapcsolata:

$\text{rot}\,\vec{E} = 0$
$\Downarrow$
$\vec{E} = -\text{grad}\,\phi$ mivel $\text{rot}\,\vec{E} = -\text{rot}\,\text{grad}\,\phi$ és $\text{rot}\,\text{grad}\,x = 0$
$\text{rot}\,\vec{E} = 0$

ϕ: segédváltozó, amelyből E kiszámolható, csak egy leírása E-nek
$\vec{E}$: valódi

XVI. Írja fel és értelmezze az elektrosztatika Poisson-egyenletét és adja meg a homogén közegben érvényes, általános megoldását! Miért különleges ennek a formulának a használata a gyakorlati esetek nagy részében?

=> $\varphi(r) \int_{r}^{r'} \vec{E}(r)\,dr = -\int_{r'}^{r} \vec{E}(r)\,dr \quad \rightarrow \quad \mathrm{grad}\,\varphi(r) = -E$

$E = -\mathrm{grad}\,\varphi$

Elektrosztatika: $\frac{\partial}{\partial t} = 0 \qquad \mathrm{rot}\,E = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$: Maxwell II

$\mathrm{rot}\,\vec{E} = 0$

$\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\phi$

$\mathrm{div}\,\vec{D} = \rho$

$\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}$ (lineáris közeg)

$\mathrm{div}(\varepsilon \cdot \vec{E}) = \rho$

$\mathrm{div}(-\varepsilon \cdot \mathrm{grad}\,\phi) = \rho$ (ε kiemelhető, mert homogén az anyag és ε konstans)

$-\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,\phi) = \frac{\rho}{\varepsilon}$

$\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$ (homogén közegben)

$$\underbrace{\mathrm{div}\,\underbrace{\mathrm{grad}\,\phi}_{\text{vektor}}}_{\text{skalár}} = \nabla^2 \phi = \Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

Laplace-operátor

Példa: fizikában különféle eloszlásoknál

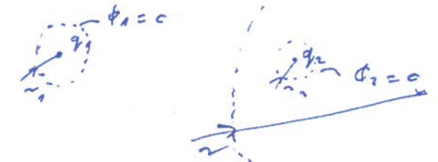
=> Szuperpozíció-elv: tegyük fel, hogy: $\varepsilon_1(\vec{r}) = \varepsilon_2(\vec{r}) = \varepsilon(\vec{r})$

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2 \phi_1 &= -\frac{\rho_1}{\varepsilon} \\ \nabla^2 \phi_2 &= -\frac{\rho_2}{\varepsilon} \end{aligned}\right\} \phi \quad \nabla^2 \underbrace{(\phi_1 + \phi_2)}_{\phi} = -\frac{(\rho_1 + \rho_2)}{\varepsilon}$$

Hol lesz a 0 potenciál?

a, Ha $\phi_1(\infty) = 0$ és $\phi_2(\infty) = 0$ => $\phi(\infty) = 0$

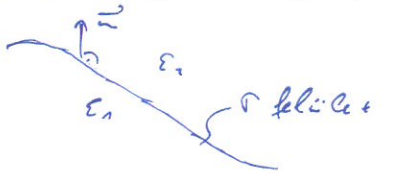
b,



a közösen létrehozott potenciálnál az egyiket különböző helyen lesz, de egyiknek sem középpontja

c, speciális: $\left.\begin{aligned} r_1 &= r_2 \\ q_1 &= q_2 \end{aligned}\right\} \phi = 0$ a felezősík (ekvipotenciális terület)

=> A Δ operátor nem értelmezhető anyaghatáron, mert a térnek ugrása van, tehát folytonossági feltételek kellenek φ-re



a, $E_{2t} = E_{1t}$ (elektromos térerősség érintő irányú komponense megegyezik a két anyag határán)

$\phi_2(\vec{r}) = \phi_1(\vec{r}) + k \qquad r \in \Gamma$

k konstans

felület két oldalán azonos mértékben.

spec: $k = 0$ => φ folytonos Γ-n

b, $D_{2n} = D_{1n} + \sigma$ (az eltolás normális irányú komponense)

$\vec{n} \cdot \varepsilon_2 \cdot (-\mathrm{grad}\,\phi_2) = \vec{n} \cdot \varepsilon_1 (-\mathrm{grad}\,\phi_1) + \sigma$

merőleges irányamenti derivált

$-\varepsilon_2 \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial n} = -\varepsilon_1 \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial n} + \sigma$

spec: $\sigma = 0$ => $\varepsilon \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial n}$ folytonos Γ-n

⇒ **Általános megoldás:**

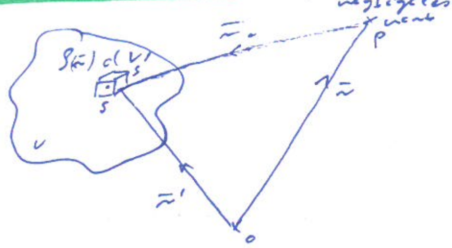
→ követelmények: - homogén, lineáris, izotróp közeg } pl.: levegő, vákuum
- végtelen tartomány

a, **elemi megoldás:** „ponttöltés" $\vec{r}\,'$-ben

$$\rho(\vec{r}) = Q \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}\,') : Q \text{ az } \vec{r}\,' \text{ helyen, } \vec{r} \text{ a megfigyelési helye}$$

$$\nabla^2 \phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon} Q\, \delta(\vec{r} - \vec{r}\,') \to \phi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

b, **általános megoldás** (szuperpozícióval):



kis darabokra szedjük, s a kis kocka középpontja helyén kicsi, legyen ponttöltés

1. lépés: $\oint_A D\,dA = \int_{dV_s'} \rho\, dV_s'$

$$\varepsilon \cdot dE(r) \cdot \oint_0^{4r_0^2\pi} dA = \int_{dV_s'} \rho\, dV_s'$$

$$\varepsilon \cdot dE(r) \cdot 4r_0^2\pi = \int_{dV_s'} \rho\, dV_s'$$

$$dE(r) = \frac{1}{4r_0^2\pi\varepsilon} \int_{dV_s'} \rho\, dV_s'$$

2. lépés: $d\phi(r) = \int_r^{r=\infty} dE(r) = \frac{1}{4r_0\pi\varepsilon} \int_{dV_s'} \rho\, dV_s'$

3. lépés: $\phi(P) = \int_V \frac{\int_{dV_s'} \rho(s)\, dV_s'}{4\pi\varepsilon r_0}\, dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_V \frac{\int_{dV_s} \rho(s)\, dV_s}{r_0}\, dV$

ahol $r_0 = |\vec{r} - \vec{r}\,'|$

Így: $\phi(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \int_{V'} \frac{\int_{dV_s} \rho\, dV_s}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\, dV'$

$$\phi(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')\, dV}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

Használata körülményes, mivel ρ-t ismerni kell, de ez nem adott mindig, valamint az egyenlet megoldásához szükséges feltételek (végtelen, homogén, lineáris közeg) nem áll fenn ~~(...)~~ mindig.

XVII. Mutassa be milyen egyszerű töltéselrendezés (ponttöltés, egyenes vonaltöltés, töltött sík felület) sztatikus elektromos terét és potenciálterét! Milyen módszerrel lehet, illetve célszerű ezeket számolni?

Töltéseloszlásból elektromos terét a Gauss-tétel felhasználásával kapjuk, hogy:

$$\oint_A \vec{D}\, d\vec{A} = \int_V \rho\, dV \qquad D = \varepsilon \cdot E$$

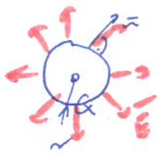
$$\varepsilon \cdot \vec{E} \cdot \oint 1\, d\vec{A} = \int_V \rho\, dV$$

$$\oint_A \vec{E}\, d\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon} \int_V \rho\, dV = \frac{Q}{\varepsilon}$$

A potenciálteret úgy kapjuk, hogy az elektromos térre kapott összefüggést integráljuk a forrástól r tetszőleges távolságban lévő ponttól az r_0 referenciapontig.

$$\varphi = \int_r^{r_0} \vec{E}(r)\, d\vec{r} \qquad \text{ha } \phi(\infty)=0, \quad r_0 \to \infty$$

=> Ponttöltés:
- vákuumban elhelyezkedő ponttöltés
- az elektromos térerősség mindenhol merőleges a gömbhéjra, és nagysága csak r-től függ
- gömbszimmetrikus elektromos tér



$$\vec{E} = E(r) \cdot \vec{e}_r$$

Gauss: $\oint_A D\, dA = \int_V \rho\, dV$

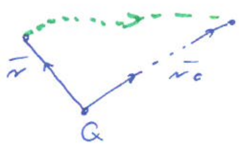
$$\oint_A \varepsilon_0 E\, dA = Q$$

$$\varepsilon_0 E \int_0^{4r^2\pi} 1\, dA = Q$$

$$\varepsilon \cdot E \cdot 4r^2\pi = Q$$

$$E = \frac{Q}{4r^2\pi\varepsilon} \rightarrow \vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\vec{e}_r$$

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{\vec{r}}{r^3}$$

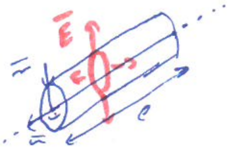


$$\Downarrow$$

$$\varphi(r) = \int_r^{r_0} \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r^2}\, dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left[-\frac{1}{r}\right]_r^{r_0} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left[-\frac{1}{r_0} - \left(-\frac{1}{r}\right)\right] \qquad \phi(\infty)=0 \quad r_0 \to \infty$$

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{1}{r}$$

=> Végtelen hosszú, egyenes vonaltöltés:
- a tér geometriája hengerszimmetrikus



Gauss: $\underbrace{\oint_A D\, dA}_{\text{hengerfelszín}} = \int_V \rho\, dV$ ↳ henger térfogat

- a henger palástjára merőleges E -> szorzás $n \parallel E$
- a henger alapjaival párhuzamos (alul+felül) E -> 0 $n \perp E$

$$\varepsilon_0 E(r) \cdot 2r\pi \cdot l = l \cdot q \quad \text{(q vonaltöltés sűrűség)}$$

$$E(r) = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\cdot\frac{1}{r} \rightarrow \vec{E}(r) = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\cdot\frac{\vec{r}}{r^2} \rightarrow \vec{E}(r) = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\cdot\frac{1}{r}\vec{e}_r$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi(r) = \int_r^{r_0} E(r)\, dr = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\cdot\ln\frac{r_0}{r} = \frac{q}{2\pi\varepsilon}(\ln r_0 - \ln r)$$

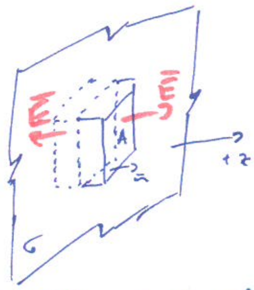
legyen $r_0 = 1$ mivel $\ln r_0 = 0$ kell

$$\varphi(r) = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\cdot\ln\frac{1}{r}$$

=> Végtelen kiterjedésű sík:

-> Az erővonalak merőlegesek a síkra, homogén tér

-> σ felületi töltéssűrűséggel



$z=0$ síkban egyenletes
↳ alapja párhuzamos a síkkal

Gauss: $\oint_A \vec{D}\, d\vec{A} = \int \rho\, dV \qquad \vec{E} \perp A \to \vec{E} \parallel \vec{n}$

$$\varepsilon \cdot E \int_0^{2A} 1\, dA = \int \rho\, dV$$

$$\varepsilon \cdot E \cdot 2A = A \cdot \sigma$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon} \to \vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon}\vec{e_z}$$

és

$z>0 \to$ pozitív, $z<0 \to$ negatív $\Big\} \; \vec{E} = \pm \frac{\sigma}{2\varepsilon} e_z$

Tehát a térerősség nem függ a távolságtól!

$$\varphi(z) \overset{!}{=} \int_z^{z_0} \vec{E}(z)\, dz = \pm \frac{\sigma}{2\varepsilon} \cdot [z]_z^{z_0} = \pm \frac{\sigma}{2\varepsilon}(z_0 - z)$$

$\Downarrow$ ha $z_0 = 0$

$$\varphi(z) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon} \cdot |z|$$

=> Számítási módszerek:

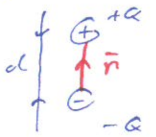
Az elektrosztatikus feladatok megoldása egyértelmű adott töltéselrendezés és peremfeltételek mellett. Olyan elrendezést kell találnunk, amely ugyanazt a peremfeltételt biztosítja mint az eredeti eset. Tetszőleges töltés/áram elrendezés visszavezethető szuperpozícióval pontszerű/vonalszerű töltések terére. Ugyanezek a szuperpozíció segítségével alkalmazható a villamos tükrözés is.

XVIII. Mutassa be a sztatikus töltésdipólus elektromos- és potenciálterét!

=> Dipólus: - két, egymáshoz nagyon közel elhelyezkedő, azonos nagyságú, de ellentétes előjelű töltés.

- definíció: $\vec{T} = \vec{p} \times \vec{E}$ $\quad$ $\vec{T}$: forgatónyomaték; $\vec{p}$: dipólusmomentum

- reprezentáció: töltéspárral:

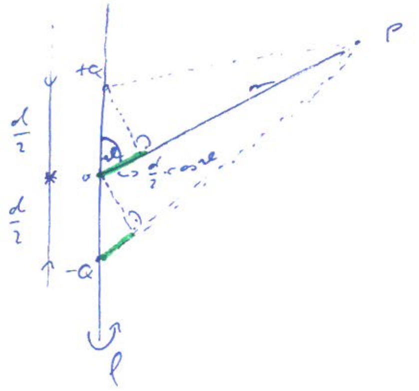


$|\vec{p}'| = |\vec{p}| = p = Q \cdot d$

$\vec{p}$ definíció szerint a ⊖-ból a ⊕-ba mutat.

1, Potenciáltér:

Forgásszimmetria miatt gömbi koordinátarendszerben:



$\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$; $r \gg d$; $\phi(r, \vartheta, \varphi) = \phi(r, \vartheta)$

$\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r}$

↓

két ponttöltés elektromos terének szuperpozíciója

$$\phi(P) \cong \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\Bigg(\underbrace{\frac{1}{r - \frac{d}{2}\cos\vartheta}}_{\text{táv } +Q\text{-tól}} - \underbrace{\frac{1}{r + \frac{d}{2}\cos\vartheta}}_{\text{táv } -Q\text{-tól}}\Bigg)$$

$(a-b)\cdot(a+b) = a^2 - b^2$

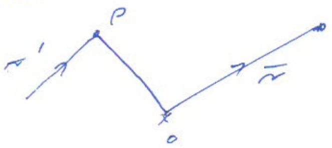
lesz d^2-es tag, ami elhanyagolható mivel $r \gg d$

így: $\phi(P) = \frac{Q \cdot d}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{\cos\vartheta}{r^2}$

↳ irányfüggő
↳ négyzetesen sugárfüggő
↳ felezősíkon 0 a potenciál
↳ dipólus potenciálja eggyel nagyobb rendben csökken, mint a ponttöltésé

dipólusmomentum: $p = Q \cdot d$: $\phi(r) = \frac{p}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{\cos\vartheta}{r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\varepsilon r^3}$ $\quad [p \cdot r \cdot \cos\vartheta = \vec{p} \cdot \vec{r}]$

Általánosan:



$\phi(\vec{r}) = \frac{\vec{p}(\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\varepsilon |\vec{r} - \vec{r}'|^3}$

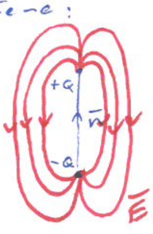
2, Térerősség:

$E = -\operatorname{grad}\phi = -\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\vartheta}\vec{e_\vartheta} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\vec{e_\varphi}\right)$

$\left.\begin{array}{l} E_r = \frac{p}{2\pi\varepsilon} \cdot \frac{\cos\vartheta}{r^3} \\ E_\vartheta = \frac{p}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{\sin\vartheta}{r^3} \end{array}\right\}$ eggyel hatványával gyorsabban csökken, mint a ponttöltésé

$E_\varphi = 0$

Dipólus tere:



-> a térerősségvonalak párhuzamosan indulnak és végződnek a dipólusmomentummal
-> jelentősége: - dielektrikumok
- kettősrétegek.

-> z tengelyre forgásszimmetrikus

3, Polarizáció: $\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P}$

$\vec{P}$: polarizációvektor: divergenciája a kötött töltéseket adja meg a szigetelőben.

$$\vec{P} \triangleq \left(\frac{\sum_i \vec{p}_i}{\Delta V} \right) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum_i \vec{p}_i}{\Delta V}$$

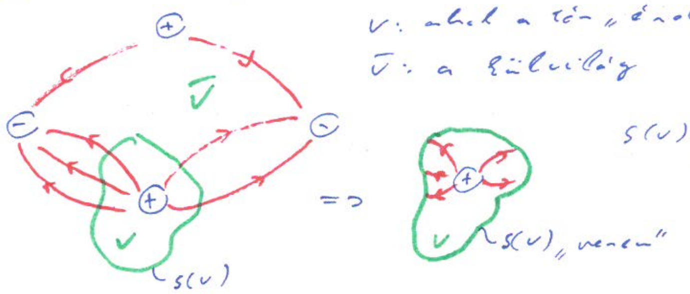
$$\rho_k = -\operatorname{div} \vec{P}$$

Ezen dipólusmomentumok térfogati sűrűsége a polarizáció.

XIX. Fogalmazza meg az elektrosztatika peremérték-feladatát, és illusztrálja vázlatokkal a vonatkozó peremfeltételeket!

Egy peremérték-feladatnak három komponense van: egy V tértartomány, egy egyenlet, amit a keresett függvénynek ki kell elégítenie V belsejében, és egy másik egyenlet, amit a keresett függvénynek ki kell elégítenie V határán (peremén). A megoldását kereshetjük zárt tértészben, vagy nyitott (végtelen) térben. Az első esetben a zárt tértészen kívül, a „külvilágban" szereplő gerjesztések hatását úgy vesszük figyelembe, hogy a tértészt határoló zárt felületen peremfeltételeket írunk elő.

A Maxwell-egyenletek megoldása zárt térfogatban egyértelmű, ha a térfogat határoló felületén a potenciál, vagy a térerősség normális komponense (ez a töltéssűrűség ugrásának felel meg) adott. A bizonyítás homogén közeget feltételez.

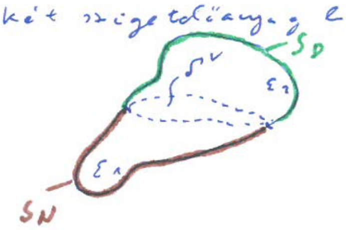


V: ahol a tér „érdekel"

$\bar{V}$: a külvilág

$S(V)$ peremre olyan feltételeket kell felírni, amik a kívül rekedt töltések (⊖) hatását közvetítik.

két szigetelőanyag határán:



→ Ω: anyaghatár

→ S: perem és: $S_D \cap S_N = 0$ → diszjunktak

$S_D \cup S_N = S$

① Ha a tértészből kivesszük az anyaghatárt, akkor felírható a Laplace-Poisson-egyenlet:

$$-\mathrm{div}(\varepsilon\,\mathrm{grad}\,\phi) = \rho \quad \text{ha } \vec{r} \in V/\Omega \text{ (mindenhol, kivéve: } \Omega)$$

$$\downarrow$$

$$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad \text{ez a potenciális differenciálegyenlet}$$

② A határfelületre határfeltételeket kell felírni, hogy teljes legyen az egyenletrendszer.
Tehát, ha: $K = 0$ → ϕ folytonos

$\sigma = 0$ → $\varepsilon \frac{\partial\phi}{\partial n}$ folytonos a határon

Így ezekre határfeltételeket írunk fel.

③ Dirichlet-típusú peremfeltétel: elő van írva, mennyi legyen a potenciál a peremen.

S_D: $\phi = f$ (előírt)

$\phi(\vec{r}) = f(\vec{r}) \quad \vec{r} \in S_D$

④ Neumann-típusú peremfeltétel: a peremen elő van írva az elektromos térerősség normálkomponense

S_N: $\frac{\partial\phi}{\partial n} = g$ (előírt)

$\left.\frac{\partial\phi}{\partial n}\right|_{\vec{r}} = g(\vec{r})$

S_D és S_N a tartományon (V) kívüli töltések hatását jellemzi.

Feltételek:
- létezik megoldása (egzisztencia)
- egyetlen megoldása van (unicitás)

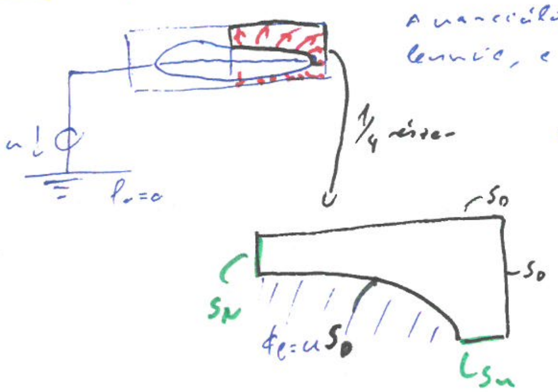
} egyértelmű a megoldás, csak egyetlen ϕ elégíti ki a Poissont és a peremfeltételeket.

- az elektródákat célszerű kizárni V-ből és S_D-vel felírni, mert ϕ = feltétel
- ahol σ ismert, ott célszerű S_N-t felírni ($\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0$)
- S_N-t általában szimmetriasíkra írjuk elő.

Gyakorlatban ezt használjuk a lebegtetett töltések módszerénél.

Példa: végtelen hosszú kábel U potenciálon:

A parciális differenciálegyenletnek ($\Delta\phi$) egyértelműnek kell lennie, ezért definiáljuk a peremfeltételeket.



A szimmetriasíkra, melyet $\vec{E}$ párhuzamos, Neumannt írunk fel, mert $E_{1t}=E_{2t}$ és így $E=0$ tehát $-\text{grad}\,\phi=0$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n}=0$$

Neumann!

$\phi_2=0$

$\phi_1=U$; $\phi_2=0$

↳ konstans → deriváltja 0 ⇒ $\frac{\partial\phi}{\partial n}=0$ ⇒ S_N

S_N: szimmetriasíkon

de ismert a potenciál, ezért mivel a Dirichlet „szigorúbb" azt vesszük fel!

IX. Ismertesse a helyettesítő töltések módszerét és a töltéstükrözés elvét! Hogyan épül ez a módszer a Poisson-egyenlet egyértelmű megoldhatóságára?

1, Az elektródák terét úgy számítjuk ki módszerünkkel, mintha azt a teret a helyettesítő fiktív töltések hoznák létre. Azt várjuk az elrendezéstől, hogy a helyettesítő töltések együttes potenciálja valamennyi elektródát ekvipotenciálissá tegye.

Jellemzői:
- kielégítik a Laplace egyenletet ($\Delta\phi = 0$) [kivéve a töltés helyén, de a nem baj, mivel a helyettesítő töltés az elektródán belül van és ott úgyis érdektelen a mező]
- konstans potenciált hoznak létre, így a peremfeltételeket is kielégítik.
- peremfeltételeket helyettesítjük $\bar{V}$-beli fiktív töltésekkel
- nem egyértelmű
- egyszerűen számolható konfigurációk (pl: vonaltöltés, dipólus)
- hátterében az unicitás áll.

Helyettesítjük a peremfeltételeket a külsőleg lévő fiktív töltésekkel.

Példák: Magában álló töltött gömb (vagy henger)

$Q = \sigma \cdot 4R^2\pi$

$$E_r(r) = \begin{cases} 0 & \text{ha } r < R \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon} & \text{ha } r \geq R \end{cases}$$

a, Helyettesítés ponttöltéssel: (hengernél hasonlóan vonaltöltéssel)

$$E_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{1}{r^2} \rightarrow U_r = \int_r E(r)dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r}$$

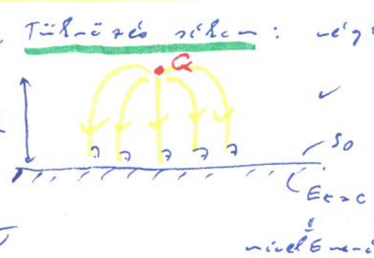
b, Helyettesítés töltött szigetelőgömbbel: $r_0 < R$

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4r_0^3\pi}{3}}$$

$$E_r = \begin{cases} \frac{\rho r}{3\varepsilon} & \text{ha } r \leq r_0 \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r^2} & \text{ha } r \geq r_0 \end{cases}$$

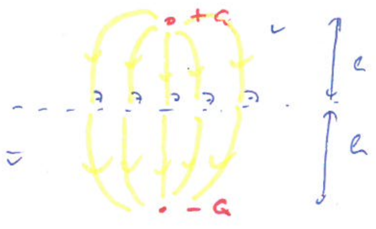
2, Töltéstükrözés elve:

a, Tükrözés síkon: végtelen (igen nagy kiterjedésű) föld vagy fémsík.



mivel E merőleges a felületre
⇓
ϕ konstans
$\phi = c \Rightarrow$ Dirichlet

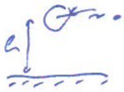
=>



Az eredeti tér és a tükrözött tér hasonló, hiszen −Q fiktív töltésnél, sőt V-ben egzakt minden megegyezik. Viszont ha $\bar{V}$-ben vagyunk, akkor mindenhol nulla, mivel a fém belsejében nincsenek töltések. Határfelületi úgy viselkedik mint a V, viszont a potenciálja nulla.

Kielégíti: - Poisson-egyenletet
- peremfeltételt

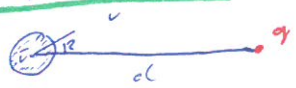
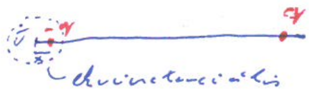
Analóg problémák: - fémgömb (vagy henger) kis sugarú közelítéssel + föld



ha h >> r, akkor használható kis sugarú közelítés és használható a vonaltöltéses helyettesítő töltések.

$\frac{r_0}{h} \le \frac{1}{8}$ (vagy $\frac{1}{10}$)

b, **Hengeres tükrözés:**

 => 

ekvipotenciális $\quad x = \frac{R^2}{d}$

3db vonaltöltés terének szuperpozíciója.

elszigetelt eset:

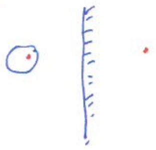
=> így a henger össztöltése zérus lesz

Speciális: kis sugarú közelítés: $d >> R$ (pl: 10:1) => $x \approx 0$

Analóg problémák: - 2 henger:

(ez nem kissugarú)

- henger + sík: 2 vonaltöltés tere henger



c, **Gömbi tükrözés:**

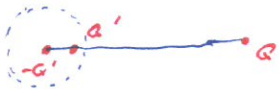
 => 

ez a földelt eset

$x = \frac{R^2}{d}$

$Q' = -Q\frac{R}{d}$

elszigetelt eset:



=> gömb össztöltése zérus lesz

Speciális: kis sugarú közelítés: $d >> R$ $\quad x \to 0$; $Q' \to 0$

Analóg problémák: - gömb + gömb } csak kissugarú esetben
- gömb + sík } és 2 ponttöltés esetén csak egyetlen gömbfelületre.

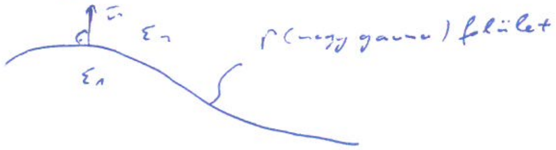
3, Visszavezetés Poisson-egyenletre:

Választunk egy önkényes töltéselosztást, majd meghatározzuk a potenciálfüggvényt.

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int \frac{\rho(r')}{|r'-r|}\,dV$$

Majd $\phi(r) = \Phi_i$ ekvipotenciális felület. Ezzel rendelkezésünkre áll egy olyan, a Laplace-egyenletet kielégítő potenciálfüggvény, ami ismert felületeken állandó. Kellő számú ilyen megoldást összegyűjtve, adott alakú elektródák esetén van olyan potenciálfüggvény, amely az elektródákon állandó, vagyis az elektrosztatikus, vagy stacionárius elektromos probléma megoldását adja.

XXI. Fogalmazza meg az elektromos teret leíró vektormezők anyaghatáron érvényes folytonossági feltételeit a skalárpotenciál segítségével!



$E_{2t} = E_{1t}$ (elektromos térerősség érintőirányú (tangenciális) komponense megegyezik a két anyag határán)

$D_{2n} - D_{1n} = \sigma$ (az eltolás normális (merőleges irányú) komponense

a, $E_{2t} = E_{1t}$

$-\text{grad}\,\phi_2 = -\text{grad}\,\phi_1$

$\phi_1 = \phi_2$

↓

ϕ folytonos az anyaghatáron

vagy: $\phi_2(\bar r) = \phi_1(\bar r) + k \quad \bar r \in \Gamma$

k konstans

felület két oldalán azonos mentén

Ha $k = 0 \Rightarrow \phi$ folytonos Γ-n

b, $D_{2n} = D_{1n} + \sigma$

$\bar n \cdot \bar D_2 = \bar n \cdot \bar D_1 + \sigma$ ahol: $D = \varepsilon \cdot E$ és $E = -\text{grad}\,\phi$

$\bar n \cdot \varepsilon_2 \cdot (-\text{grad}_2\,\phi_2) = \bar n \cdot \varepsilon_1(-\text{grad}_1\,\phi_1) + \sigma$ grad₂: a 2-es közegben képzett gradiens

$\Downarrow$ $\bar n \cdot \text{grad}\,x = \frac{\partial x}{\partial n}$ (normális irányú derivált)

$-\varepsilon_2 \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial n} = -\varepsilon_1 \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial n} + \sigma$

$\varepsilon_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} - \varepsilon_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} = \sigma$

↓

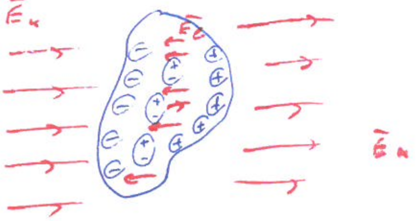
$\frac{\partial \phi}{\partial n}$-nek ugrása van az anyaghatáron

Speciális: $\sigma = 0$ akkor is $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ folytonos Γ-n

XXII. Ismertesse a vezető anyagok viselkedését elektrosztatikus térben, valamint a vezető–szigetelő határon érvényes folytonossági feltételeket; definiálja az elektróda fogalmát!

1, Vezetők viselkedése elektrosztatikus térben: (vezetők (szabad) és szigetelők (~~...~~ kötött) töltések)

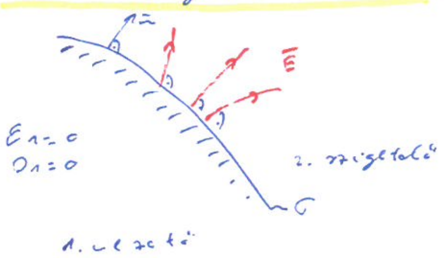
A vezetőben szabad töltések vannak, melyek a külső elektromos tér hatására elmozdulnak.
Ez a töltésmegosztás, más néven influencia.



A töltésmegosztás lecseng a külső tér hatására. Az átrendeződés addig tart, amíg $E_k = E_b$ nem lesz. (Tehát míg a fém belsejében 0 lesz a tér, beáll az egyensúly $\sim 10^{-19}$ s fémeknél.

A vezetőket, szigetelőket szabad és kötött töltések alapján választjuk szét. A tér hatására a semleges töltések szétválnak, belső teret hoznak létre amely a külsőt kompenzálja. Viszonyítás kérdése, hogy milyen vezető vagy szigetelő az anyag. Ez függhet alkalmazási területtől, frekvenciától, vagy a szétválás gyorsaságától (relaxációs idő).
Az elektróda fogalmán vezető anyagot értünk, tehát az az anyag tekinthető elektródának, mely elegendő szabad töltést tartalmaz töltésmegosztáshoz. Az anyag szélein felületi töltéssűrűség halmozódik fel (elegendő, hogy kompenzálja a külső teret). Továbbá az elektróda ekvipotenciális, tehát egy potenciállal jellemezhető lesz. Felületére (~~...~~) merőleges az $\bar{E}$ és $\bar{D}$, és nem lenne, sem a felületén nem változik E.

2, Vezető – szigetelő határa:



$E_{2t} = E_{1t}$, $E_1 = 0$ $\Big\}$ $E_{2t} = 0$ → az elektromos térnek nincs tangenciális komponense a vezetőn kívül, mivel az erővonalak merőlegesen lépnek ki a vezető anyagból

$D_{2n} = D_{1n} + \sigma$, $D_1 = 0$ $\Big\}$ $D_{2n} = \sigma$ → a merőlegesen kilépő elektromos eltolás a felületi töltéssűrűséggel egyenlő

Az elektróda ekvipotenciális.

+ Elektródát a stacionárius áramlási térnél is definiálunk, pl: földelés.
↳ Áramlási térnél a föld már nem elektróda, mert: $\sigma_{földelés} \gg \sigma_{föld}$ → földelés az elektróda
↳ Viszont elektrosztatikában egy statikus tér áll be, ezért a rosszul (~~szigetelő~~) vezetőképességű anyagok is elektródák pl: föld.
↳ Növelve frekvenciánál a rosszul σ-jú anyagok nem tudják követni a töltés szétválasztást → nem elektróda.

Az áramlási térnél minden vezető (jól vezet)

$\sigma_{vez} \gg \sigma_{szig.}$ $\qquad \dfrac{\sigma_{elektród}}{\sigma_{közeg}} \geq 10 - 10^2$

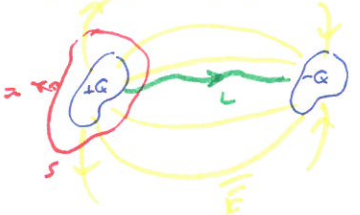
vezető ⊥ közeg,
ha ugyanazon mellékelten szereplő
anyagok szigetelő képességéhez képest
jóval nagyobb a vezetőképessége

XXIII. Ismertesse a kapacitás fogalmát és energetikai kötetét, fejezze ki a kapacitást a térjellemző mennyiségekkel. Térjen ki az önmagában álló elektróda esetére is!

1, Kapacitás:

↳ töltéstárolási képességet jelent.

↳ elektródapáron vizsgálva: $(\Sigma Q = 0)$



Tapasztalat: $U = \varphi^+ - \varphi^-$
és U arányos Q-val, ez az arány a kapacitás

$$C \hat{=} \frac{Q}{U} \qquad [C] = \text{Farad}$$

Térelméleti definíció: $$C = \frac{\oint_S \vec{D}\, d\vec{S}}{\int_L \vec{E}\, d\vec{l}}$$

2, Energetikai kötet: (k db elektróda)

↳ elektróda:

↳ $W_e = \frac{1}{2}\int_V \varphi \rho\, dV = \frac{1}{2}\sum_k Q_k \cdot \varphi_k \,/\, = \frac{1}{2}\sum_k \varphi_k \cdot \int_{V_k} \rho\, dV = \frac{1}{2}\sum_k \varphi_k \cdot \underbrace{\oint_{S_k} \sigma\, d\vec{S}}_{Q_k}$

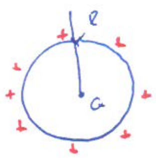
Tehát: $W_e = \frac{1}{2}\sum_{1}^{k} \varphi_k \cdot Q_k \overset{k=2}{=} \frac{1}{2}\varphi^+ \cdot Q + \frac{1}{2}(-Q)\cdot\varphi^- = \frac{1}{2}Q\underbrace{(\varphi^+ - \varphi^-)}_{U} = \frac{1}{2}Q\cdot U$

$C = \frac{Q}{U} \Rightarrow W_e = \frac{1}{2}C\cdot U^2$ és így: $C = \frac{2W_e}{U^2}$ egyenértékű def.

$W_e \overset{B}{=} \frac{Q^2}{2C}$

3, Önmagában álló elektróda:

↳ Egy Q töltésű gömb alakú elektróda így számolható, hogy ha $r > R$ (R a gömb sugara):



Gauss: $\oint_A \vec{E}\, d\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon}Q$

$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r^2}$

$\Downarrow$

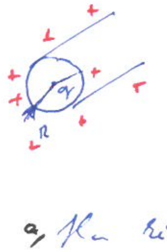
$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{1}{r} + \varphi(r_0)$ ahol $r_0 \Rightarrow \infty$, $\varphi(r_0) = 0$

$\Downarrow$

$U = \varphi - \varphi(r_0) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r}$

így: $C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r}} = 4\pi\varepsilon r$

↳ Egy önmagában álló, végtelen hosszú q vonaltöltés: (vagy henger): $r > R$

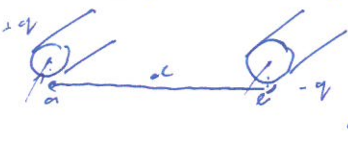


Gauss: $E(r) = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\frac{1}{r}$

$\varphi(r) = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\cdot \ln\frac{r_0}{r}$ ahol r_0 legyen 1

$\varphi_r = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{1}{r}$

a, Ha két ilyen van a és b sugárral d távolra:



$\varphi(r) = \int E(r)\,dr \Rightarrow \varphi_1(a) = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln\left(\frac{1}{a}\right) + \frac{-q}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{1}{d} = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{d}{a}$

$\varphi_2(b) = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{1}{d} + \frac{-q}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{1}{b} = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{b}{d}$

$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\cdot\left(\ln\frac{d}{a} - \ln\frac{b}{d}\right) = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\cdot\ln\frac{d^2}{ab} \rightarrow C' = \frac{q}{U} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\frac{d^2}{ab}}$

e) Hengerkondenzátor:

$$E(r) = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\frac{1}{r}$$

$$\Downarrow$$

$$U = \int_{r_1}^{r_2} E(r)\,dr = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

$$\Downarrow$$

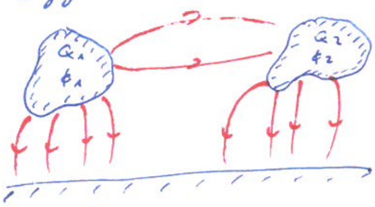
$$C' = \frac{q}{U} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\frac{r_2}{r_1}}$$

XXIV. Ismertesse az elektródarendszert jellemző együtthatókat, különös tekintettel a részkapacitásokra. Adjon az utóbbiakra szemléletes értelmezést!

Több elektródából álló rendszer: $i=0 \dots n$ $(n+1$ db$)$
referencia lehet a föld

1, Részkapacitások:

Legyen a példában $n=2$ → 3 elektróda, egyik a referencia.



Q_0 $\phi_0 = 0$

$Q_0 = -(Q_1+Q_2)$

$\sum_{i=0}^{n} Q_i = 0$ Minden töltés létrehoz részpotenciálokat

itt: $\phi_1 = r_{11} \cdot Q_1 + r_{12} Q_2$ ahol: r_{ij}: potenciálegyütthatók (részpotenciálok)

$\phi_2 = r_{21} Q_1 + r_{22} Q_2$

Jellemzőik: csak függ a geometriától, anyagjellemzőktől, anyagelrendezéstől
→ $r_{ij} = r_{ji}$: reciprok → főátlóra szimmetrikus

így: $\underline{\phi} = \underline{\underline{r}} \cdot \underline{Q}$ itt $\underline{\underline{r}} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}$

Innen vezethető le a részkapacitások:

$\underline{Q} = \underline{\underline{r}}^{-1} \cdot \underline{\phi} = \underline{\underline{\gamma}} \cdot \underline{\phi}$ tehát $\underline{\underline{\gamma}} = \underline{\underline{r}}^{-1}$

ahol γ_{ij}: kapacitás együttható és $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$: reciprok

$\underline{\underline{\gamma}} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix}$

$Q_1 = \gamma_{11} \cdot \phi_1 + \gamma_{12} \phi_2$ $/ +\gamma_{12}\phi_1 - \gamma_{12}\phi_1$

$Q_2 = \gamma_{21} \phi_1 + \gamma_{22} \phi_2$ $/ +\gamma_{21}\phi_2 - \gamma_{21}\phi_2$

⇓

$Q_1 = \gamma_{11}\phi_1 + \gamma_{12}\phi_1 - \gamma_{12}\phi_1 + \gamma_{12}\phi_2 = \underbrace{(\gamma_{11}+\gamma_{12})}_{C_{10}\text{ földkapacitás}}\phi_1 - \underbrace{\gamma_{12}}_{C_{12}\text{ főkapacitás}}(\phi_1-\phi_2)$

$Q_2 = \gamma_{21}\phi_1 + \gamma_{21}\phi_2 - \gamma_{21}\phi_2 + \gamma_{22}\phi_2 = \underbrace{(\gamma_{22}+\gamma_{21})}_{C_{20}}\phi_2 - \underbrace{\gamma_{21}}_{C_{12}}(\phi_2-\phi_1)$

Így a részkapacitásokkal:

$C_{10} = \gamma_{11} + \gamma_{12}$
$C_{20} = \gamma_{21} + \gamma_{22}$ } földkapacitások
$C_{12} = C_{21} = -\gamma_{12} = -\gamma_{21}$ → főkapacitás

Földkapacitás: elektróda - föld közt
Főkapacitás: két elektróda közt

$Q_1 = C_{10}(\phi_1 - 0) + C_{12}(\phi_1 - \phi_2)$ $\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} C_{10} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$

$Q_2 = C_{20}(\phi_2 - 0) + C_{12}(\phi_2 - \phi_1)$

A részkapacitás és részpotenciál önmagában értelmetlenek, csak segédmennyiségek. A kapacitással és potenciállal együtt értelmesek.

Általánosan:

$Q_i = C_{i0} \cdot (\phi_i - 0) + \sum_{k=1}^{n} C_{ik} \cdot (\phi_i - \phi_k)$ $i = 1 \dots n$

Szemléltetés:

Tehát az i-ik és k-ik elektróda közt egy C_{ik} kapacitású kondenzátor van, melynek töltése: $Q = C_{ik}(\phi_i - \phi_k) = C_{ik} \cdot U_{ik}$. Az i-ik elektróda és a föld közé egy C_{i0} kapacitású kondenzátor van kapcsolva, melynek töltése: $Q = C_{i0} \cdot \phi_i = C_{i0} \cdot U_{i0}$

XXV. Hogyan számítható ki a sztatikus elektromos térben tárolt energia? Ismertesse az elektródarendszer energiájára vonatkozó formulákat is!

1, Elektrosztatikus térben tárolt energia:

Kell: → végtelen, homogén, lineáris közegben

→ töltéseloszlás véges kiterjedésű, végtelenben véges töltés van.

→ $\mathrm{div}(a \cdot \mathrm{grad}\, b) = \mathrm{grad}\, a \cdot \mathrm{grad}\, b + a \cdot \mathrm{div}(\mathrm{grad}\, b)$ itt $a = b = \Phi$ lesz

$$W_e = \int_V w_e\, dV = \int_V \frac{1}{2} \varepsilon E^2 dV = \frac{1}{2} \varepsilon \cdot \int_V |\mathrm{grad}\, \Phi|^2 dV$$

$$\mathrm{div}(\Phi \cdot \mathrm{grad}\, \Phi) = |\mathrm{grad}\, \Phi|^2 + \Phi \cdot \underbrace{\mathrm{div}\, \mathrm{grad}\, \Phi}_{\Delta\Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}} = |\mathrm{grad}\, \Phi|^2 - \Phi \cdot \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

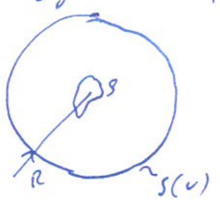
a, véges térfogat:

$$W_e^V = \frac{1}{2} \int \varepsilon |\mathrm{grad}\, \Phi|^2 dV = \frac{1}{2} \int_V \Phi \rho\, dV + \underbrace{\frac{1}{2} \varepsilon \int_V \mathrm{div}(\Phi\, \mathrm{grad}\, \Phi)\, dV}$$

Gauss: $\frac{1}{2} \varepsilon \oint_{S(V)} \Phi\, \mathrm{grad}(\Phi)\, dS$

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \Phi \rho\, dV + \frac{1}{2} \varepsilon \cdot \underbrace{\oint_{S(V)} \Phi\, \mathrm{grad}\, \Phi\, dS}$$

b, végtelen térfogat:



gömb és környezete:

$$\lim_{R \to \infty} W_e^V$$

$$\lim_{R \to \infty} \oint_{S(V)} \Phi\, \mathrm{grad}\, \Phi\, dS = \lim_{R \to \infty} 4R^2\pi \cdot \frac{k_1}{R} \cdot \frac{k_2}{R^2} = 0$$

~~$\Phi\, \mathrm{grad}\, \Phi \cdot S = \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot 4R^2\pi = \lim_{R \to \infty} \frac{4\pi}{R} \to 0$~~

mivel nagy távolságban

$\Phi \sim \frac{1}{R}$

$\mathrm{grad}\, \Phi \sim \frac{1}{R^2}$ } $\to 0$

gömb felülete: $4R^2\pi$

Így a teljes térre: $W_e = \frac{1}{2} \int_V \Phi \rho\, dV$

ahol töltés van, azon tartományra vonatkozik.

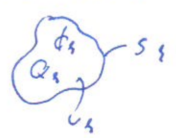
elektromos mezőben tárolt energia

2, Elektródarendszer energiája:

Tudjuk, hogy: $W_e = \frac{1}{2} \int_V \Phi \rho\, dV$

⇓

k-dik elektróda:



diszkrét:

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_k \Phi_k \cdot \int_{V_k} \rho\, dV$$

V_k → k. elektróda térfogata

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_k \Phi_k \cdot \underbrace{\oint_{S_k} \sigma\, dS}_{Q_k}$$

Tehát: $W_e = \frac{1}{2} \sum_k Q_k \cdot \Phi_k$

Ponttöltésre nem jó, mert a térnek szingularitása (egyediség) van a ponttöltés helyén

Például n=2:

$$W_e = \frac{1}{2} \Phi_1 \cdot Q_1 + \frac{1}{2} \Phi_2 Q_2$$

$$W_e = \frac{1}{2} n_{11} Q_1^2 + \frac{1}{2} n_{22} Q_2^2 + n_{12} Q_1 Q_2$$ /részpotenciálokkal/

$$W_e = \frac{1}{2} \gamma_{11} \Phi_1^2 + \frac{1}{2} \gamma_{22} \Phi_2^2 + \gamma_{12} \Phi_1 \Phi_2$$ /részkapacitásokkal/

$$W_e = \frac{1}{2} C_{10} (\Phi_1 - 0)^2 + \frac{1}{2} C_{20} (\Phi_2 - 0)^2 + \frac{1}{2} C_{12} (\Phi_1 - \Phi_2)^2$$

Olyan mintha 3 független kondenzátor energiájának összege lenne

XXVI. Ismertesse és értelmezze a stacionárius áramlási tér alapösszefüggéseit! Mely területen alkalmazható a modellalkotás?

1, Alapösszefüggések: $\frac{\partial}{\partial t} = 0 \Rightarrow$ minden időben állandó, csak a töltések ~~[illegible]~~ mozognak

a, Maxwell I - Ampère:

$$\text{rot}\,\bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$$

$$\text{rot}\,\bar{H} = \bar{J}$$

$$\text{div rot}\,\bar{H} = \text{div}\,\bar{J} \qquad \text{div rot}\,\bar{v} = 0$$

$\text{div}\,\bar{J} = 0 \Rightarrow$ forrásmentes, ez a folytonossági egyenlet időfüggetlen alakja.

b, Maxwell II - Faraday:

$$\text{rot}\,\bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$$

$\text{rot}\,\bar{E} = 0 \Rightarrow$ örvénymentes, potenciálos

c, Differenciális Ohm-törvény:

$$\bar{J} = \sigma(\bar{E} + \bar{E}_e) + \bar{J}_e$$

→ nem függ a közeg vezetőképességétől, ahol van de grad. gen.

d, Laplace - Poisson:

$$\text{rot}\,\bar{E} = 0 \Leftarrow \bar{E} = -\text{grad}\,\phi$$

$$\text{div}\left[\sigma(-\text{grad}\,\phi + \bar{E}_e) + \bar{J}_e\right] = 0$$

$$\text{div}(\sigma\,\text{grad}\,\phi) = \text{div}(\sigma \bar{E}_e + \bar{J}_e)$$

homogén közegre: $\Delta\phi = \text{div}\left(\bar{E}_e + \frac{\bar{J}_e}{\sigma}\right)$

2, Elemi elrendezések (alkalmazás):

Tegyük fel, hogy adott az ideális vezetőnek tekintett elektródák alakja, valamint, hogy egy zárt felületen $\bar{J}$ állandó, vagy a felület egy A részén állandó, a többin 0. $\bar{J}$ legyen a felületre merőleges. Így az áramsűrűség és az áram kapcsolata:

$$I = \int_A \bar{J}\, d\bar{A} = J \cdot A$$

a, Áram-pontforrás (gömbi felület):

σ 

$$J_r(r) = \frac{I}{A} = \frac{I}{4\pi r^2} = \bar{J} \quad : \text{áramsűrűség}$$

$\downarrow$ diff. Ohm-tv.

$$\bar{E}_r(r) = \frac{1}{\sigma}\bar{J}_r(r) = \frac{I}{4\pi\sigma r^2} = \bar{E} \quad : \text{elektromos térerősség}$$

$\downarrow$

$$\varphi(r) = \int_r^\infty E_r(r)\,dr = \int_r^\infty \frac{I}{4\pi\sigma r^2}\,dr = \frac{I}{4\pi\sigma r} = \varphi(r) \quad : \text{potenciál}$$

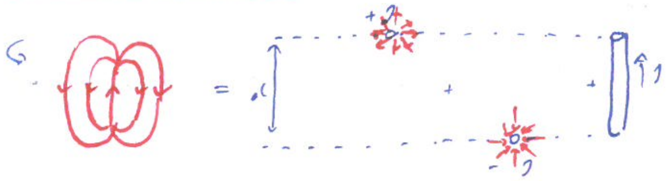
$\downarrow$

$$U_{12} = \varphi(r_1) - \varphi(r_2) = \frac{I}{4\pi\sigma}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{I}{4\pi\sigma}\,\frac{r_2 - r_1}{r_1 \cdot r_2} \quad : \text{feszültség}$$

Ha két elektródánk van és egyik áramot $+I$ a másik $-I$, akkor a két elektróda közötti U feszültség segítségével kifejezhető a G konduktancia:

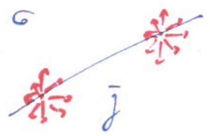
$$G = \frac{I}{U} = 4\pi\sigma \cdot \frac{r_1 \cdot r_2}{r_2 - r_1}$$

b, Áram-dipólus:



dipólusmomentum: $I \cdot d$

c, Áram-vonalforrás:



$J \cdot \underbrace{2\pi \cdot r \cdot l}_{\text{palást}} = I \;\rightarrow\; J = \frac{I}{2r\pi l} \qquad i = \frac{I}{l}$

$E = \frac{J}{\sigma} = \frac{i}{2r\pi\sigma}$

$\Downarrow$

$\varphi(r) = \frac{i}{2\pi\sigma} \ln\left(\frac{r_0}{r}\right)$

3, A modelltípusok alkalmazhatósága:

- földeléskialakítás: földelés
- Emberi védőeszközök: OBS
- fogalmak: ellenállás, áramkörök

XXVII. Ismertesse a stacionárius áramlási tér Laplace-egyenletét! Sorolja fel és példával illusztrálja az egyenlet egyértelmű megoldhatóságát biztosító perem-feltételeket!

$\Rightarrow$ $\mathrm{rot}\,\bar{E} = 0$ $\qquad \Leftarrow \bar{E} = -\mathrm{grad}\,\phi$

$\mathrm{div}\,\bar{J} = 0$

$\bar{J} = \sigma(\bar{E} + \bar{E}_b) + \bar{J}_b \xrightarrow[\bar{E}_b, \bar{J}_b = 0]{} \bar{J} = \sigma \cdot \bar{E}$

$\mathrm{div}\,\bar{J} = 0$

$\mathrm{div}\,(\sigma \cdot \bar{E}) = 0$

$\mathrm{div}\,(\sigma \cdot (-\mathrm{grad}\,\phi)) = 0$

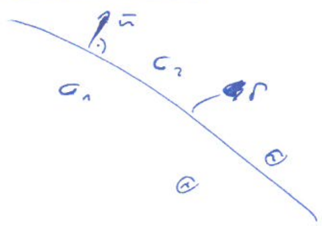
$\downarrow$ σ = állandó, ha homogén a közeg $\rightarrow$ osztunk vele.

$\mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\,\phi) = 0$

$\downarrow$

$\Delta\phi = 0$ $\qquad$ ahol Δ a Laplace-operátor: $\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$

$\Rightarrow$ Peremfeltételek:



a) $E_{2t} = E_{1t}$ $\rightarrow$ $\phi_2 = \phi_1 + \underbrace{\text{konstans}}_{=0}$

$\phi_2 = \phi_1 \rightarrow \phi$ folytonos

b) $J_{2n} = J_{1n} - \frac{\partial \rho_s}{\partial t}$: folytonossági egyenletből: $\oint_A \bar{J}\,d\bar{A} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\,dV$

ahol ρ_s : felületi töltéssűrűség, ami σ-ban foglalt.

$\downarrow \frac{\partial}{\partial t} = 0$

$J_{2n} = J_{1n}$ $\quad / \bar{J} = -\sigma\,\mathrm{grad}\,\phi$

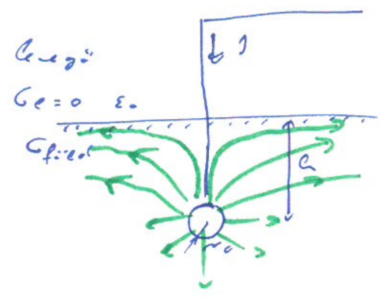
$-\sigma_2 \cdot \frac{\partial\phi}{\partial n} = -\sigma_1 \cdot \frac{\partial\phi}{\partial n}$

$\Downarrow$

$\sigma \cdot \frac{\partial\phi}{\partial n}$ folytonos

[Ha J normálisában közt különbség van, akkor töltés halmozódik fel a felületen, vagy töltés távozik a felületről]

$\Rightarrow$ Példa: földbe ásott gömb (földelő)
$\hookrightarrow$ elektróda



$h \gg r_0$; $\quad \sigma_l = \sigma_1$
$\sigma_{föld} = \sigma_2$

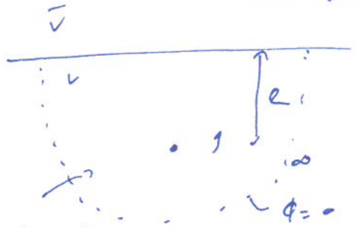
$J_{2n} = J_{1n}$

$-\sigma_2 \cdot \frac{\partial\phi}{\partial n} = -\underbrace{\underset{0}{\sigma_1} \cdot \frac{\partial\phi}{\partial n}}_{0}$

$\Downarrow$

$\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0$ $\quad$ tehát J-nek nincsen a felületre merőleges komponense $\rightarrow$ nem folyik ki áram a földből.

$\Downarrow$ helyettesítés modellezéssel

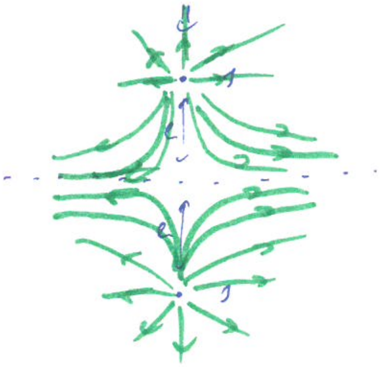


$J_n = \bar{n} \cdot (-\sigma\,\mathrm{grad}\,\phi) \rightarrow \frac{\partial\phi}{\partial n} = 0$

Neumann-homogén

V-ben: $\phi = 0$ $\qquad$ (Dirichlet a ∞-ben)

$\Downarrow$ tükrözés



A Neumann a szimmetria miatt teljesül!

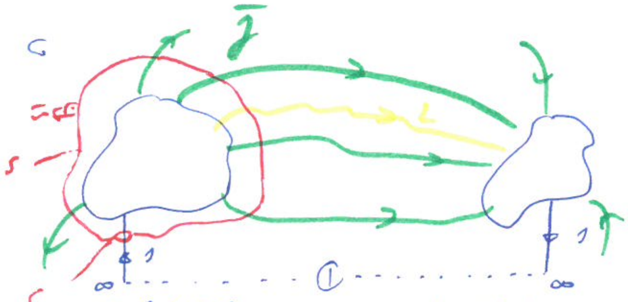
XXVIII. Ismertesse az ellenállás fogalmát és fejezze ki a térjellemző mennyiségekkel!

Az elektromos ellenállás (R) az anyag azon tulajdonsága, amely az áram folyását gátolja és az I^2R villamos teljesítményt hővé alakítja.

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A} \quad [\Omega] \qquad \rho = \frac{E}{J}$$

$$R = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{l}{A} \quad [\Omega]$$

ahol: ρ $[\Omega m]$: fajlagos ellenállás,
l: vezető hossza
A: keresztmetszete
σ $[S/m]$: fajlagos vezetőképesség



=> két elektróda

S_0: itt folyik le, itt nem integrálunk, folytonossági egyenlet miatt 0 lenne ha belevennénk.

=> $\bar{E}$ L szakaszon vett integrálja megadja az U feszültséget:

$$U = \int_L \bar{E}\, d\bar{l}$$

=> $\bar{J}$ S felületen vett integrálja (ami a befolyó I áramot nem tartalmazza) megadja az I áramot

$$I = \int_{S \setminus S_0} \bar{J}\, d\bar{S}$$

U arányos I-vel és ez az arányosság az ellenállás:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\int_L \bar{E}\, d\bar{l}}{\int_{S/S_0} \bar{J}\, d\bar{S}} \qquad [R] = \Omega \quad : \text{ellenállás}$$

$$G = \frac{I}{U} = \frac{\int_{S/S_0} \bar{J}\, d\bar{S}}{\int_L \bar{E}\, d\bar{l}} \qquad [G] = S \quad : \text{konduktancia/vezetés}$$

XXIX. Hogyan számítható a térbeli áramlás által vezető anyagban keltett veszteség (Joule-veszteség)?

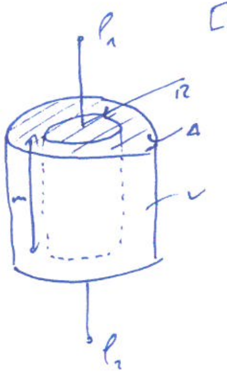
Globális energiamérleg:

$$-\frac{dW}{dt} = \underbrace{\int_V \frac{J^2}{\sigma}\, dV}_{\text{hőteljesítmény, Joule-veszteség}} - \int_V \vec{E}_e \cdot \vec{J}\, dV + \oint_{A(V)} (\vec{E} \times \vec{H})\, d\vec{A}$$

A teljesítménysűrűség az áramsűrűségből és az elektromos térerősségből számítható:

$$p = \vec{J} \cdot \vec{E} = \vec{J} \cdot \frac{\vec{J}}{\sigma} = \frac{J^2}{\sigma} \quad (\text{ha } \vec{E}_e = 0)$$

$[p] = \frac{W}{m^3}$ teljesítménysűrűség $\Rightarrow R \hat{=} \frac{\int_V p\, dV}{I^2}$: az ellenállásban hő formájában eldisszipálódó



$\Rightarrow R$: alaplap sugara

$\Rightarrow m$: henger magassága

$\Rightarrow U = \varphi_1 - \varphi_2$ feszültségesés az ellenálláson

Levezetés:

$$\int_V p\, dV = \int_V \frac{J^2}{\sigma}\, dV = \int_V \vec{J} \cdot \vec{E}\, dV \quad (\text{bal oldal})$$

$$I^2 \cdot R = \left(\int_A \vec{J}\, d\vec{A}\right)^{\cancel{2}} \cdot \frac{\int_l \vec{E}\, d\vec{l}}{\cancel{\int_A \vec{J}\, d\vec{A}}} = \int_A \vec{J}\, d\vec{A} \cdot \int_l \vec{E}\, d\vec{l} \quad (\text{jobb oldal})$$

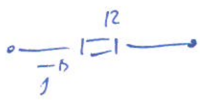
$$\Downarrow$$

$$\int_V \vec{E} \cdot \vec{J}\, dV = \int_A \vec{J}\, d\vec{A} \cdot \int_l \vec{E}\, dl$$

$$\vec{E} \cdot \vec{J} \cdot \cancel{R^2\pi \cdot m} = \vec{J} \cdot \cancel{R^2\pi} \cdot \vec{E} \cdot \cancel{m}$$

tehát egyenlőek!

$$\Downarrow$$



$P_{veszt} = \int_V p\, dV = I^2 \cdot R$: az eldisszipált teljesítményt az $I^2 \cdot R$ formula adja meg, az energiamérlegben negatív előjellel szerepel.

$$R = \frac{\int_V \frac{J^2}{\sigma}\, dV}{I^2}$$

továbbá: $P = R \cdot I^2 = \frac{U^2}{R} = U \cdot I$

XXX. Milyen áll és meddig terjed a stacionárius áramlás és az elektrosztatika analógiája? Milyen és hogyan alkalmazható a tükrözés módszere áramlási tereknél?

Stacionárius áramlási tér:

$\mathrm{rot}\,\bar{E} = 0$ $\qquad$ $\bar{E}_t, \bar{J}_n = 0$

$\mathrm{div}\,\bar{J} = 0$ $\qquad$ $E = -\mathrm{grad}\,\phi$

$\bar{J} = \sigma \cdot \bar{E}$ $\qquad$ $\Delta\phi = 0$

Elektrosztatika:

$\mathrm{rot}\,\bar{E} = 0$ $\qquad$ $\rho = 0$: töltésmentes analógia

$\mathrm{div}\,\bar{D} = 0$ $(\mathrm{div}\,\bar{D} = \rho)$ $\qquad$ $\bar{E} = -\mathrm{grad}\,\phi$

$\bar{D} = \varepsilon \cdot \bar{E}$ $\qquad$ $\Delta\phi = 0$

1, Analógia: - két jelenség analóg, ha azonos alakú differenciálegyenletek és azonos peremfeltételek írják le őket.

↳ peremfeltételek: elektródák:

$\sigma_{elektróda} \gg \sigma_{közeg}$ — ekvipotenciális felület

↓

ekvipotenciális

- a következő megfeleltetések értelmezhetők az áramlási tér és az elektrosztatika között:

Elektrosztatika	Q	$\phi(P)$	ε	D	E	C	U
Stac. áramlás	I	$\phi(P)$	σ	J	E	G	U

pl.: $R = \frac{1}{G} \Leftrightarrow \frac{G}{C} = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ $\quad G = \frac{\sigma \cdot C}{\varepsilon}$ $\Rightarrow R = \frac{1}{G} = \frac{\varepsilon}{C \cdot \sigma}$

Ez fennáll azonos konfiguráció (geometria, peremfeltétel) mellett.

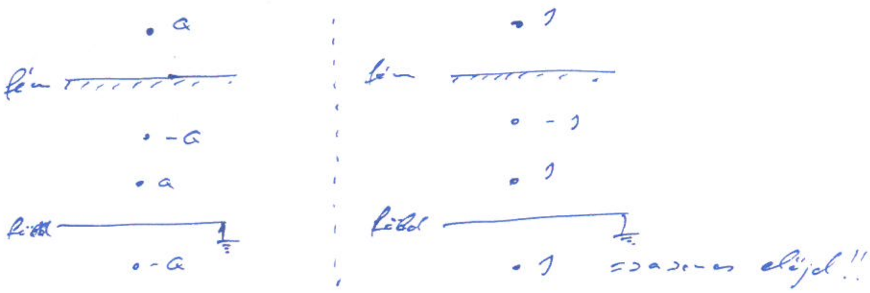
Kivétel: $\Rightarrow \sigma = 0$ jellemzőjű anyag van (ideális szigetelő), de $\varepsilon = 0$ jellemzőjű anyag nincs, ezért az áramlásos példáknak, ahol $\sigma = 0$, nincs elektrosztatikai megfelelőjük, ha az egyik feladatot megoldottuk - a létünnen.

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\oint \bar{D}\,d\bar{A}}{U} = \frac{\varepsilon \cdot \oint \bar{E}\,d\bar{A}}{U}$$

$$G = \frac{I}{U} = \frac{\int_A \bar{J}\,d\bar{A}}{U} = \frac{\sigma \cdot \int \bar{E}\,d\bar{A}}{U}$$

$$\frac{G}{C} = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

$\Rightarrow$ tükrözés esetén:



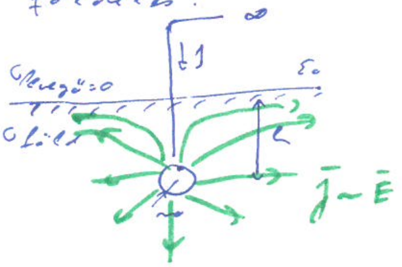
2, Tükrözés módszere:

Az adott σ vezetőképességű közegben a tükrözés módszere úgy alkalmazható, hogy az az eredeti peremfeltételeket kielégítő áramlási teret eredményezzen.

$J_{2n} = J_{1n}$ és $E_{2t} = E_{1t}$

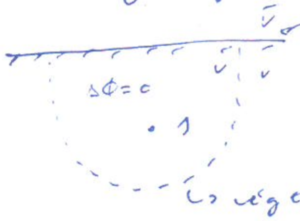
$\left(\hookrightarrow \frac{\partial \rho_s}{\partial t} = 0 \right)$

Példa: földelés:



$h \gg a$

⇓ Helyettesítés [illegible]



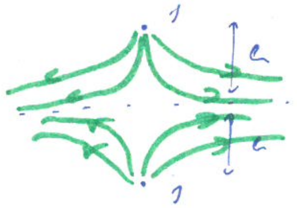
$J_n = 0$, mivel nem folyik ki áram a földből

$J_n = \bar{n} \cdot (-\sigma \cdot \mathrm{grad}\,\phi)$

$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$: homogén Neumann

és végtelenben $\phi = 0$ → Dirichlet.

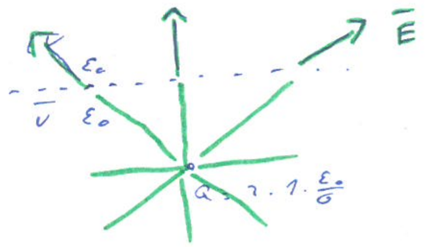
⇓ Tükrözés



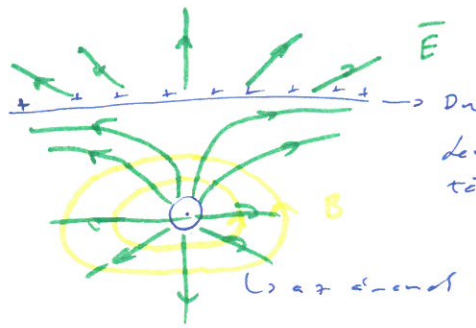
Homogén Neumann a szimmetria miatt teljesül.

Akkor alkalmazható, ha a két tér (v) egymást végtelen megegyezik.

Mi a helyzet a levegőben?



Teljes kép:



→ Dn ugrik

Levegőben lévő teret a statikus töltéssűrűség kelti.

és az áramok mágneses teret keltenek

XXXI. Ismertesse a stacionárius áram mágneses terére vonatkozó alapegyenleteket, és a vektorpotenciál alkalmazási területeit.

Fontos: $\frac{\partial}{\partial t}=0$ és $\vec{J}\neq 0$

1, Maxwell-egyenletek:

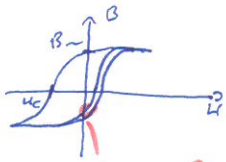
$\mathrm{rot}\,\vec{H}=\vec{J}$

$\mathrm{div}\,\vec{B}=0$

$\vec{B}=\vec{f}(H)$, azaz $\vec{B}=\mu\cdot\vec{H}$; $\vec{B}=\mu_0(\vec{H}+\vec{M})$

Jellemzők: - többnyire nincs jelen ferromágneses közeg -> μ_0
-> a mágneses tér formálódik, szóba jöhet remanens mágnes is -> $\vec{M}$
-> forrásmentes -> nincs mágneses töltés
-> folytonossági feltételek: $H_{1t}=H_{2t}$
$B_{1n}=B_{2n}$

2, Közeg jellemzők:
- nem mágneses anyagok: $\vec{B}=\mu_0\cdot\vec{H}$
- para- és ~~(dia...)~~ diamágneses anyagok: $\vec{B}\cong\mu_0\cdot\vec{H}$ $(\mu_r\approx 1)$
- ferromágneses anyagok -> telítés
-> hiszterézis



B_r: remanens mágnesesség
H_c: koercitív erő

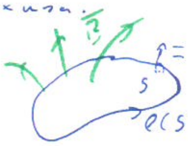
-> lineáris közelítés: $\vec{B}=\mu_0\mu_r\vec{H}$; μ_r: 10^2 - 10^6-ig.

Mivel $\vec{H}$ nem rotációmentes, itt nincs (~~skalárpotenciál~~) skalárpotenciál. Viszont bármely forrásmentes tér leírható egy vektorpotenciállal. Ez azt a vektormezőt határozza meg, amelynek az adott vektormező a rotációja.

3, Mágneses vektorpotenciál:

$\vec{B}=\mathrm{rot}\,\vec{A}$ -> $\mathrm{div}\,\vec{B}=\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec{A}=0$

A vektorpotenciál divergenciája szabadon megválasztható, legyen $\mathrm{div}\,A=0$, ez a Coulomb-mérték. Segítségével meghatározható egy $l(s)$ görbe által határolt s felület fluxusa:



$$\Psi(s)\triangleq\int_s\vec{B}\,d\vec{s}=\int_s \mathrm{rot}\,\vec{A}\,d\vec{s}=\oint_{l(s)}\vec{A}\,d\vec{l}=\Psi_s$$

Stokes-tétel

Tehát az $\vec{A}$ vektorpotenciál cirkulációja megadja a fluxust.
(Fluxus: mágneses indukció felületi integrálja)

4, Vektoriális Laplace-egyenlet:

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{rot}\,\vec{H}=\vec{J}\to\mathrm{rot}\,\vec{B}=\mu\cdot\vec{J}\\ \vec{B}=\mathrm{rot}\,\vec{A}\end{array}\right\}\ \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{A}=\mu\cdot\vec{J}\quad \text{ahol } \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{A}=\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{A}-\Delta\vec{A}$$

Tehát: $\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{A}-\Delta\vec{A}=\mu\cdot\vec{J}$

$\big|\ \mathrm{div}\,\vec{A}=0$

$\Delta\vec{A}=-\mu\vec{J}$: vektoriális Poisson-egyenlet

$\Delta A_x=-\mu J_x$

$\Delta A_y=-\mu J_y$

$\Delta A_z=-\mu J_z$

5, Energia:

$$w_m = \frac{1}{2}\int_V \vec{H}\cdot\vec{B}\,dV \qquad \text{(lineáris közeg)}$$

$$w_m = \frac{1}{2}\int_V \mu\cdot H^2\,dV = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\mu}B^2\,dV$$

$$w_m = \frac{1}{2}\int_V \vec{H}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{A}\,dV$$

↳ vanalízis: $\mathrm{div}(\vec{A}\times\vec{H}) = \vec{H}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{A} - \vec{A}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{H}$

$$w_m = \frac{1}{2}\int_V A\,\underbrace{\mathrm{rot}\,\vec{H}}_{\vec{J}}\,dV + \underbrace{\frac{1}{2}\int_V \mathrm{div}(\vec{A}\times\vec{H})\,dV}_{\text{gauss: } \frac{1}{2}\oint_\infty (\vec{A}\times\vec{H})\,d\vec{s} = 0}$$

$$w_m = \frac{1}{2}\int_V \vec{A}\cdot\vec{J}\,dV$$

↳ elektrosztatika: $w_e = \frac{1}{2}\int_V \Phi\cdot\rho\,dV$

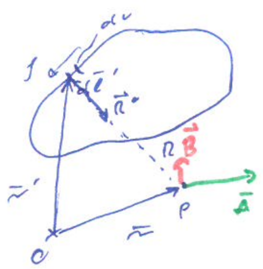
6, Főbb alkalmazási területek:

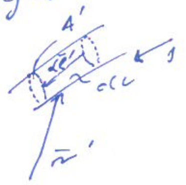
- áramjárta vezető körüli mágneses tér számítása
- Nyák mágneses környezete
- Kábelek önindukciós együtthatója
- transzformátor-számítás → villamosenergia átvitel

↳ fogalmak: → induktivitás
→ elektrotechnika
→ mágneses kör.

XXXII. Ismertesse és értelmezze a Biot-Savart-törvényt! Illusztrálja egy egyszerű példával!

A Biot-Savart-törvényt áramjárta hurok által keltett mágneses indukció számításánál használjuk.





ahol: $\vec{A}$: vektorpotenciál
A': felület

Induljunk ki abból, hogy a mágneses indukció kifejezhető a vektorpotenciál rotációjával. Valamint $dV' = A' \cdot dl'$.

Így: $\int dV' = \int A' dl' = I \cdot dl' \rightarrow A(r) = \frac{\mu}{4\pi} \cdot I \oint_l \frac{dl'}{R}$

Ez a vezető mágneses vektorpotenciálja lánchoz.

$$\vec{B} = \text{rot}\,\vec{A}$$
$$\vec{B} = \text{rot}\left(\frac{\mu}{4\pi} I \cdot \oint_l \frac{dl'}{R}\right) = \frac{\mu}{4\pi} \cdot I \cdot \oint_l \text{rot}\,\frac{dl'}{R}$$

Felhasználva, hogy $\text{rot}(a \cdot b) = (\text{grad}\, a) \times b + a \cdot \text{rot}\, b$
ahol $a = \frac{1}{R}$ $b = dl'$ lesz.

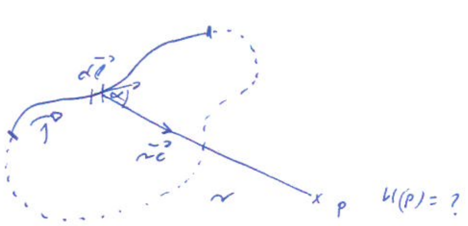
$$\text{rot}\,\frac{dl'}{R} = \left(\text{grad}\,\frac{1}{R}\right) \times dl' = -\frac{R^\circ}{R^2} \times dl' = dl' \times \frac{R^\circ}{R^2}$$

ahol $R^\circ = \frac{r' - r}{R}$ az r'-ből az r-be mutató egységvektor.
valamint $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$

Így a Biot-Savart törvény:

$$\vec{H}(r) = \frac{1}{4\pi} \cdot I \oint \frac{d\vec{l}' \times (r' - r)}{|r' - r|^3}$$
$$\Downarrow$$
$$\vec{H}(r) = \frac{1}{4\pi} \cdot I \oint \frac{d\vec{l}' \times \vec{R}_0}{R^2} \quad \text{ahol } R = |r' - r| \text{ és } R^\circ = \frac{r' - r}{R}$$

Fontos:
→ Az áram mindig érintő irányú.
→ $d\vec{l}'$ szakaszban milyen irányban folyik az áram?
→ R°: P pont felé mutató egységvektor
→ $d\vec{l} \times \vec{R}_0 = |d\vec{l}| \cdot |\vec{R}_0| \cdot \sin(\alpha) = dl \cdot 1 \cdot \sin(\alpha) = dl \cdot \sin(\alpha)$
→ P pontban a teljes mágneses tér: ha az egész vonalon elintegrálunk. Így egy vezetéken (~~...~~) áram folyik → mágneses tér → kiszámolható → a vektorok segítségével ki lehet integrálni az egész vezetékre.
→ Csak homogén anyagok esetén használható, ha nincs a rendszerben ferromágneses anyag.
→ Használható önindukciós és kölcsönös induktivitás számításánál.



XXXIII. **Ismertesse az ön- és kölcsönös indukció fogalmát és energetikai kifejezését! Térjen ki a külső és belső induktivitás fogalmára.**

1, Önindukció: – áramjárta vezető körül mágneses tér van jelen
– homogenitást és linearitást feltételezve: $\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$
– ha az áram erősségét változtatjuk, változik a fluxus
nagysága a tekercsben, így a Faraday indukciótörvényének értelmében
a tekercs két végpontja közt feszültség indukálódik. (önindukció kez.)

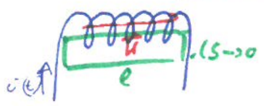
$\Psi_S = \int_S \vec{B} d\vec{S}$: fluxus $[\Psi_S] = Wb$ (weber)

$U_L = N \cdot \frac{\Delta \Psi}{\Delta t}$ $\longrightarrow$ önindukciós együttható (induktivitás): $L \triangleq \frac{\Psi_S}{I}$ $[L] = H$

ahol N: menetszám

Az ilyen feladatok megoldásánál érdemes követni az alábbi lépéseket:

i. lépés:



N menetes, A keresztmetszetű
Ez egy szolenoid.

$\oint_l H dl = \sum_N I$ ← l: zárt görbe, dS: ortogonális } tekintsük egy menetet

$H \cdot l = I \cdot N$

$H = \frac{I \cdot N}{l}$

$B = \mu \cdot H = \frac{\mu \cdot I \cdot N}{l}$

ii. lépés: Faraday-féle indukciótv. integrális alakban.

$U_{ind} = \oint_l \vec{E} d\vec{l} = -\int_A \frac{\partial B}{\partial t} dA = -\frac{\partial \Psi}{\partial t}$

Ahol a Ψ fluxus a zárt felületet merőlegesen átdöfő indukcióvonalak száma.

$B = \frac{\mu \cdot N \cdot I}{l}$

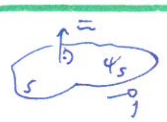
$U_{ind}(1\,menet) = -\int_A \frac{\partial \frac{\mu \cdot N \cdot I}{l}}{\partial t} dA = -\frac{\mu \cdot N}{l} \cdot \frac{\partial I}{\partial t} \cdot \int_A 1 dA = -\frac{\mu \cdot N}{l} \cdot \frac{\partial I}{\partial t} \cdot A$

$U_{ind}(összes) = N \cdot U_{ind}(1\,menet) = -\frac{\mu \cdot N^2 \cdot A}{l} \cdot \frac{\partial I}{\partial t}$

$U_L = -L \cdot \dot{i} = -L \cdot \frac{\partial I}{\partial t} \rightarrow L = \frac{\mu \cdot N^2 \cdot A}{l}$

Több megközelítésből is tárgyalható:
↳ vezetőgyűrűt tesszük B változó indukciójú mágneses térbe. A gyűrű kifeszít
egy A (vagy S) felületet, melyen létrejövő fluxus időbeli változásának −1-szerese
adja az indukált feszültség nagyságát a ~~[illegible]~~ kivezetések között.
↳ a gyűrűben töltések mozognak, kölcsönhatás szerint → teret hoznak létre → ez
indukálja a feszültséget.

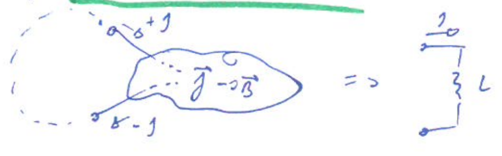
a, vékony vezető:



linearitás közege: $\Psi_S \sim I \rightarrow L \triangleq \frac{\Psi_S}{I}$ $[H]$

energiája: $W_m = \frac{1}{2} I \cdot \Psi_S = \frac{1}{2} \cdot I \cdot (L \cdot I) = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2 \sim I^2$

b, kiterjedt áramlás:

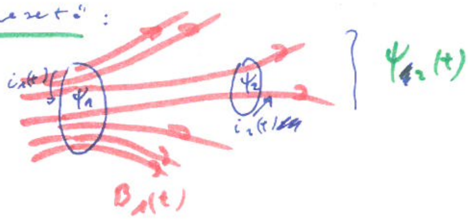


$L \triangleq \frac{2 W_m}{I^2}$

2, Kölcsönös induktivitás:

Adott két tekercs, és csak az egyikben ($I_1 \neq 0$) folyik áram. Az első tekercsben folyó áram a második tekercs belsejében fluxusváltozást idéz elő, ezért abban feszültség indukálódik.

a, Vékony vezető:



$$L_{21} = \frac{\Psi_2}{I_1}\Big|_{I_2=0}$$

$$L_{12} = \frac{\Psi_1}{I_2}\Big|_{I_1=0}$$

Reciprocitás: $L_{21} = L_{12} = M$ → csak lineáris esetben!

Szuperpozíció: $\left.\begin{aligned}\Psi_1 &= L_1 \cdot I_1 + M \cdot I_2 \\ \Psi_2 &= L_2 \cdot I_2 + M \cdot I_1\end{aligned}\right\}$ energia: $W_m = \frac{1}{2} \cdot I_1 \cdot \Psi_1 + \frac{1}{2} \cdot I_2 \cdot \Psi_2 = \dots = \frac{1}{2} \cdot L_1 \cdot I_1^2 + \frac{1}{2} \cdot L_2 \cdot I_2^2 + M \cdot I_1 \cdot I_2$

b, Általánosan: (n tekercs)

fluxus: $\Psi_k = \sum_{j=1}^{n} L_{kj} \cdot I_j$ — $L_{kk} = L_k$: önindukciós együttható; $L_{kj} = L_{jk}$: kölcsönös indukciós együttható.

energia: $W_m = (\cancel{\dots}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} L_{kj} \cdot I_k \cdot I_j$

$$M = \frac{W_m - \frac{1}{2} L_1 I_1^2 - \frac{1}{2} L_2 I_2^2}{I_1 I_2}$$

Itt is érdemes az i, lépés → ii, lépést követni.

Pl.:

I_1, A, N_1, l

A, N_2, l

ha $A_1 \neq A_2$ és $A_1 < A_2$ mindig a kisebb kell.

i. lépés: $\oint_l H\,dl = \sum I$

$H \cdot l = N_1 \cdot I_1$

$H = \frac{N_1 \cdot I_1}{l} \Rightarrow B = \mu \cdot H$

$B = \frac{\mu \cdot N_1 \cdot I_1}{l}$

ii. lépés: $U_{ind}(\text{menet}) = -\int_A \frac{\mu \cdot N_1}{l} \cdot \frac{\partial I_1}{\partial t}\, dA = -\frac{\mu \cdot N_1}{l} \cdot \frac{\partial I_1}{\partial t} \cdot A$

$U_{ind}(\text{össz}) = -\frac{\mu \cdot N_1 \cdot N_2 \cdot A}{l} \cdot \frac{\partial I_1}{\partial t}$

és $U = -L \cdot \dot{i} \Rightarrow L = -\frac{U}{\dot{i}} \Rightarrow M_{12} = M_{21} = -\frac{U_{ind}}{\dot{i}_1} = \frac{\mu \cdot N_1 N_2 A}{l} = M_{21} = M_{12}$

3. Külső és belső induktivitás:

A valóságban egy vezetőnek van keresztmetszete, amit eddig figyelmen kívül hagytunk. Az induktivitás felbontható egy külső és egy belső indukciós együtthatóra.

$L_{össz} = L_k + L_b$

L_k: külső indukciós eh. → vezetőn kívüli mágneses térből

L_b: belső indukciós eh. → csak energiából számolható

Ψ_k: vezető tartományon kívül

Ψ_b: vezető tartományban

$W_m = \frac{1}{2} L_b \cdot I^2 = \int \frac{1}{2} \mu H^2 dV = W_m$

$L_b = \frac{1}{I^2} \cdot \int \mu \cdot H^2 dV$

XXXIV. Hogyan számítható a stacionárius mágneses térben tárolt energia? Ismertesse a tekercsrendszer energiájára vonatkozó formulát is!

1, Teljes tér:

$$w = \frac{1}{2}\mu \cdot \vec{H}^2 = \frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B} = \frac{1}{2}\vec{H}\cdot \mathrm{rot}\,\vec{A}$$

$$\mathrm{div}(\vec{A}\times\vec{H}) = \vec{H}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{A} - \vec{A}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{H} \quad : \text{ezért}$$

$$\vec{H}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{A} = \mathrm{div}(\vec{A}\times\vec{H}) + \vec{A}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{H}$$

$$W = \int_V w\,dV = \frac{1}{2}\int_V \vec{A}\,\underbrace{\mathrm{rot}\,\vec{H}}_{\vec{J}}\,dV + \frac{1}{2}\int_V \mathrm{div}(\vec{A}\times\vec{H})\,dV$$

$$W = \frac{1}{2}\int_V \vec{A}\cdot\vec{J}\,dV + \frac{1}{2}\oint_S (\vec{A}\times\vec{H})\,d\vec{S} \quad \text{Gauss}$$

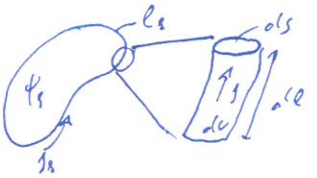
ahol: $\frac{1}{2}\oint_S (\vec{A}\times\vec{H})\,d\vec{S}$ tart a nullához, mivel az S felületet a végtelen vettük fel: $r\to\infty$

$$\left.\begin{array}{l} dS \sim r^2 \\ H \sim \frac{1}{r^3}\ (\text{Biot-Savart}) \end{array}\right\} \sim \frac{1}{r}$$

$$W = \frac{1}{2}\int_V \vec{A}\,\vec{J}\,dV$$ tehát az integrált csak a vezető térfogatain kell kiszámolni

2, Tekercsek energiája:

→ A fenti formulát alakítjuk a következőképpen:



$$\vec{J}\cdot dV = \underbrace{\frac{I}{dS}}_{\vec{J}}\cdot dV = \frac{I}{dS}\cdot \underbrace{dS\cdot dl}_{dV} = I\cdot d\vec{l}$$

$$W = \frac{1}{2}\int_V \vec{A}\,\vec{J}\,dV = \frac{1}{2}\sum_k \oint_{l_k} \vec{A}\,I\,d\vec{l} = \frac{1}{2}\sum_k I_k \cdot \oint_{l_k}\vec{A}\,d\vec{l}$$

ahol $\vec{A}$ cirkulációja a fluxus: $\Psi = \oint_l A\,dl = \oint_S B\,dS$

$$W_m = \frac{1}{2}\sum_k I_k \cdot \Psi_k$$ (hasonlóan az elektrosztatikával: $W_e = \frac{1}{2}\sum_k Q_k \cdot \Phi_k$)

$L = \frac{\Psi}{I}$, így:

a, Egy tekercsre:

$$W_m = \frac{1}{2} I \cdot \Psi = \frac{1}{2} L \cdot I^2$$

b, Két tekercsre:

$$W_m = \frac{1}{2} L_1 \cdot I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 \cdot I_2^2 + M \cdot I_1 \cdot I_2$$: csatolt tekercsek energiája

ahol $\Psi_1 = L_1\cdot I_1 + M\cdot I_2$
$\Psi_2 = L_2 \cdot I_2 + M \cdot I_1$

c, Több tekercsre:

$$W_m = \frac{1}{2}(\Psi_1 \cdot I_1 + \Psi_2 \cdot I_2 + \dots + \Psi_n \cdot I_n)$$

ahol: $\Psi_k = \sum_{j=1}^{n} L_{kj}\cdot I_j$
→ $L_{kk} = L_k$: önindukció
→ $L_{kj} = L_{jk}$ ($j \neq k$): kölcsönös indukció

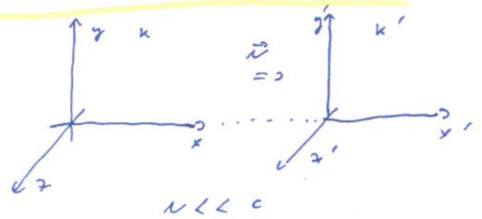
$$\Downarrow$$

$$W_m = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} L_{kj}\cdot I_k \cdot I_j$$

XXXV. Mutassa be az indukálási jelenségeket (nyugalmi és mozgási), valamint az indukált feszültség számítását! Mondjon valódi gyakorlati alkalmazásra!

Kiegészítés:

1, EM változók transzformálása:



$v << c$

K': együtt mozgó

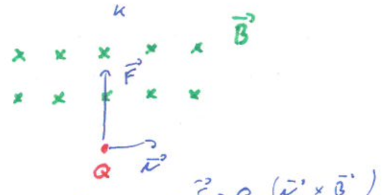
$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$ → Lorentz-tag

$\vec{B}' = B$

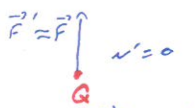
$\vec{J}' = \vec{J} - \vec{v} \cdot \rho$, → konvektív áram

$\rho' = \rho$

És a Lorentz erőtörvény:



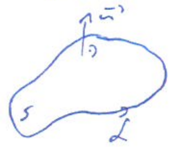
$E = 0 \Rightarrow \vec{F} = Q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$



$\vec{E}' \triangleq \frac{\vec{F}'}{Q} = \vec{v} \times \vec{B}$

2, Nyugalmi indukció:

→ Sem a vezető, sem a mágneses tér nem mozog, az indukciót az időben változó fluxus hozza létre (Faraday), amit az időben változó áram gerjeszt (Ampère).



$$\underbrace{\oint_L \vec{E}\, d\vec{l}}_{u_i} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\, d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \underbrace{\int_S \vec{B}\, d\vec{S}}_{\Psi_S}$$

L és S időáll.

$$\Downarrow$$

$$u_i = -\frac{d\Psi_S}{dt} \quad \left(N \text{ menetszám esetén: } u_i = -\frac{d\Psi_S}{dt} \cdot N\right)$$

3, Mozgási indukció: $v << c$

$u_i' = \oint_L \vec{E}'\, d\vec{l}$

$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$

$u_i' = \oint_L (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})\, d\vec{l} = \oint_L \vec{E}\, d\vec{l} + \oint_L (\vec{v} \times \vec{B})\, d\vec{l}$

$u_i' = \underbrace{-\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\, d\vec{S}}_{\text{nyugalmi}} + \underbrace{\oint_L (\vec{v} \times \vec{B})\, d\vec{l}}_{\text{mozgási indukciós tag}}$: egyesített indukciótörvény

$\Downarrow$

mozgási indukciós tag: v sebességgel mozgó vezető dl hosszú darabja dt idő alatt $dS = dl \cdot v \cdot dt$ felületet a $-d\Psi = B(v\,dt \times dl)$ fluxus mennyiségét metszi.

4, Az indukciótörvény:

$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq 0$: sztatikus körben értelmezhető

Az indukált feszültség definíciója:

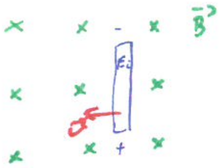
$$u_i = \oint_L \vec{E}\, d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B}\, d\vec{S}$$

→ két dolog változhat: → B indukció, → S felület.

Tehát: $u_i' = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\, d\vec{S} + \oint_L (\vec{v} \times \vec{B})\, d\vec{l}$

$u_i = u_i^{nyug} + u_i^{moz}$

A mozgási indukció szemléltetése:



A vezetőben lévő töltések a vezetőszállal együtt, $\vec{B}$-re merőlegesen mozognak, így hat rájuk a Lorentz-erő. Ennek következtében a töltések szétválasztódnak és a vezető két vége közt feszültség mérhető.

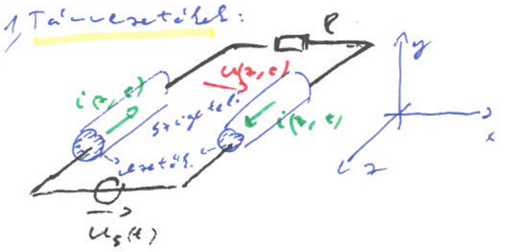
5. Gyakorlati példák:

a, Generátor: Mechanikai energiát elektromos energiává átalakító eszköz, a mozgási indukció gyakorlati alkalmazását jelenti (forog). A generátor forgásának megfelelően változó áramot állít elő.

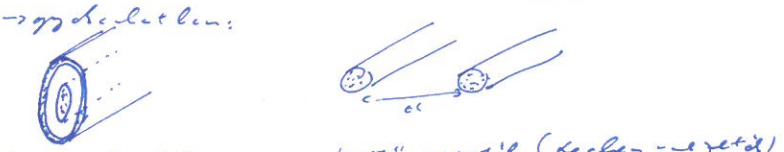
b, Transzformátor: Váltakozó elektromos áram átalakítására szolgáló eszköz, működési elve a nyugalmi indukció. Közös vasmagra helyezett két ~~(tekercs)~~ tekercsből áll általában. Az egyik tekercsbe váltakozó áramot vezetve, annak változó mágneses mezeje a másik tekercsben váltakozó áramot indukál.

XXXVI. Ismertesse a távvezeték elosztott paraméterű modelljét és a távíró egyenleteket! Meddig terjed a modell érvényességi köre, azaz milyen feltételek mellett írható le egy hullámvezető viselkedése az ismertetett modellel?

1, Távvezeték:

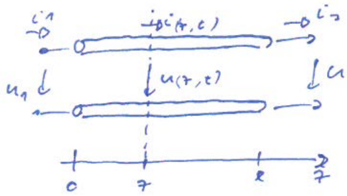


-> EM teljesítmény áramlás útja
-> elosztott paraméterű hálózat $u(z,t)$ és $i(z,t)$-vel jellemezhető
-> hullámvezető, ahol a vezetékkel párhuzamos z irányban.
-> híradástechnikában fontos, nagy fesz. 50 Hz-en nem szükséges elosztott paraméterként kezelni
-> gyakorlatban:



koaxiális kábel   kettős vezeték (Lecher-vezeték)

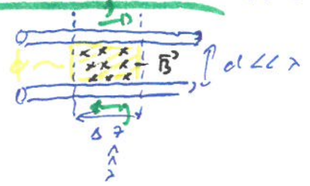
a, Sémája:



$i(z,t)$ és $u(z,t)$ a hossz mentén és időben változik, tehát adott a z helyen t pillanatban értelmes.

2, vezeték paraméterei:

a, Hosszegységre eső induktivitás:

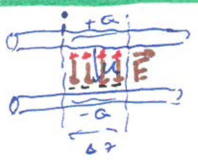


Ha $\Delta z \ll \lambda$ és $d \ll \lambda$, I helyfüggése elhanyagolható.

$$\Rightarrow L = \frac{\Phi}{I} \to L' = \frac{L}{\Delta z} = \frac{\Phi/\Delta z}{I}$$

$[L] = H \to [L'] = \frac{H}{m}$ „L': egységnyi induktivitás"

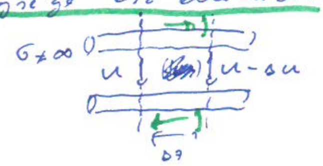
b, Hosszegységre eső kapacitás: a távvezeték oldalvonalán az EM térben tárolt energia



$$\Rightarrow C = \frac{Q}{U} \to C' = \frac{C}{\Delta z} = \frac{Q/\Delta z}{U}$$

$[C] = F \to [C'] = \frac{F}{m}$

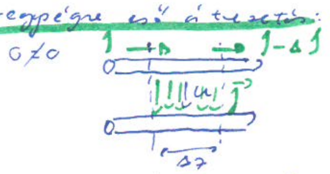
c, Hosszegységre eső ellenállás: (soros átvezetés) veszteség: $R' \cdot dz$: disszipáció hőben.



$$\Rightarrow R = \frac{\Delta U}{I} \to R' = \frac{R}{\Delta z} = \frac{\Delta U/\Delta z}{I}$$

$[R] = \Omega \to [R'] = \frac{\Omega}{m}$

d, Hosszegységre eső átvezetés: (párhuzamos, keresztirányú átvezetés): szigetelés átvezetése, vesztesége.



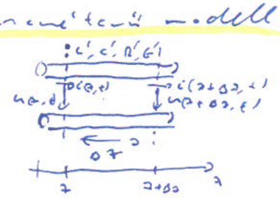
$$\Rightarrow G = \frac{\Delta I}{U} \to G' = \frac{G}{\Delta z} = \frac{\Delta I/\Delta z}{U}$$

$[G] = S \to [G'] = \frac{S}{m}$

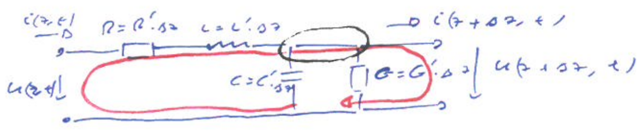
ΔI áram elszivárog a Δz-n, mivel nem tökéletes a szigetelő.

Veszteségmentes távvezeték esetében $R' = 0$; $G' = 0$. valójában ez nem igaz, de [illegible].

3, Elosztott paraméterű modell:



$\Rightarrow$



Kirchhoff feszültség-tv.: $u(z+\Delta z,t) - u(z,t) + R \cdot i(z,t) + L \cdot \frac{\partial i(z,t)}{\partial t} = 0$

Kirchhoff áram-tv.: $i(z+\Delta z,t) - i(z,t) + G \cdot u(z+\Delta z,t) + C \cdot \frac{\partial u(z+\Delta z,t)}{\partial t} = 0$

Innen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{u(z+\Delta z,t)-u(z,t)}{\Delta z} &= -R'\cdot i(z,t) - L'\cdot\frac{\partial i(z,t)}{\partial t} \\ \frac{i(z+\Delta z,t)-i(z,t)}{\Delta z} &= -G'\cdot u(z+\Delta z,t) - C'\cdot\frac{\partial u(z+\Delta z,t)}{\partial t} \end{aligned}\right\}\ \Delta z \to 0$$

4, Távíróegyenletek:

i, $$\frac{\partial u(z,t)}{\partial z} = -R'\cdot i(z,t) - L'\cdot\frac{\partial i(z,t)}{\partial t}$$

ii, $$\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = -G'\cdot u(z,t) - C'\cdot\frac{\partial u(z,t)}{\partial t}$$

! átalakítás után levezethető a hullámegyenlet:

i, $\to \partial/\partial z$: $$-\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = R'\cdot\frac{\partial i}{\partial z}^{\to ii} + L'\cdot\frac{\partial^2 i}{\partial t\,\partial z}^{\to ii'} \quad \to i'$$

ii $\to \partial/\partial t$: $$-\frac{\partial^2 i}{\partial z\,\partial t} = G'\cdot\frac{\partial u}{\partial t} + C'\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \to ii'$$

Behelyettesítve:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = R'\cdot G'\cdot u + (R'\cdot C' + L'\cdot G')\frac{\partial u}{\partial t} + L'\cdot C'\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

ideális TV: $R' = G' = 0$

$\Downarrow$

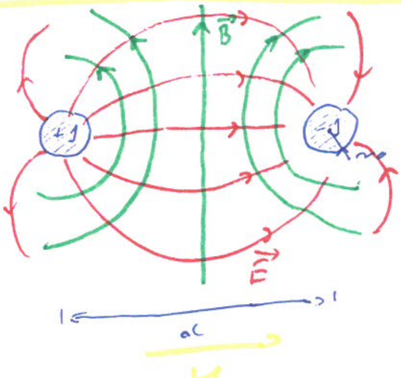
$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = L'\cdot C'\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$: Hullámegyenlet.

5, Modell érvényessége:

- → egyetlen, a hosszkoordinátától függő fesz. és áramadattal leírható
- → TEM (transzverzális elektromos és mágneses) típusú terjedés
  - ↳ E és H(B) a terjedésre merőleges síkban fekszik.
- → $l \gg d$ és $d \ll \lambda$: kábel keresztmetszetben elhanyagolható a hullámterjedés
- → $\Delta z \to 0$, ha $\Delta z \ll \lambda$

XXXVII. Mutassa be néhány gyakori távvezeték konstrukcióját, jellemezze azok elektromos és mágneses terét! Hogyan befolyásolja a távvezeték geometriája a vezetőparamétereket?

1, Lecher-vezeték (kétérvezeték): Két párhuzamos vezeték d távolságban

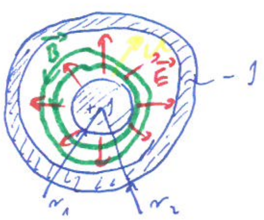


$\sigma = 0$ (levegő)
→ így G' elhanyagolható ≈ 0

$R' = 2 \cdot \frac{1}{\sigma \cdot A}$; $L' = \frac{\mu_0}{\pi} \cdot \ln\left(\frac{d}{r_0}\right)$; $C' = \frac{\pi \cdot \varepsilon_0}{\ln\left(\frac{d}{r_0}\right)}$

$\left(L' = \frac{\mu_0}{\pi}\left[\ln\left(\frac{d}{r_0}\right) + \frac{\mu_r}{4}\right] \right)$
→ belső

2, Koaxiális kábel: a belső vezető és külső árnyékoló réteg közt U feszültség ébred



$U \to \vec{E}$: sugaras
$I \to \vec{B}$: körkörös

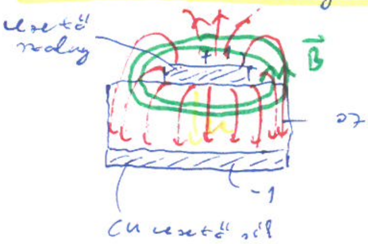
$R' = \frac{1}{\sigma_1 A_1} + \frac{1}{\sigma_2 A_2}$ (nem elhanyagolható az egyenáramú ellenállás)

$L' = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$ $\left(L' = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \left[\ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{\mu_r}{4}\right] \right)$

$C' = \left(\frac{2\pi \cdot \varepsilon_0}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \right) \xrightarrow[C' = C'|_{\varepsilon = \sigma}]{} G' = \frac{2\pi\sigma}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$

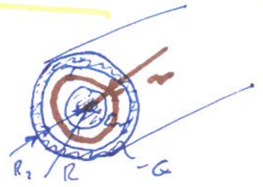
A belső elhanyagolható a Lechernél, koaxnál figyelembe veendő.

3, Microstrip (szalagvonal): vezető sík → dielektrikum → vezető szalag



R' számítása: $R = \frac{U}{I} \to R' = \frac{R}{l}$; C' számítása: $E \to U \to C = \frac{Q}{U}$; G számítás C-ből ($\varepsilon \to \sigma$);
L' számítása $L' \cdot C' =$ állandó $= \mu_0 \cdot \varepsilon_0$

4, Példa: Koax kábel hosszegységre eső kapacitása:



$l \gg R_2 > R_1$

$\oint_A D\,dA = \int_V \rho\, dV$

$\varepsilon_0 \varepsilon_r E \cdot 2r\pi \cdot l = Q$

$\downarrow$

$E(r) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r l} \cdot \frac{1}{r}$

$\downarrow$

$U = \int_{R_1}^{R_2} E(r)\,dr = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r l} \cdot \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$

$\downarrow$

$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r \cdot l}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \to C' = \frac{C}{l} = \frac{2\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$

XXXVIII. Ismertesse a távvezetékre vonatkozó Helmholtz-egyenletet, mutassa be és értelmezze annak általános megoldását!

1, A Helmholtz-egyenlet: a távíró egyenlet szinuszos, időbeli változására vonatkozó alakja. Azaz a távvezetéket leírhatjuk frekvenciatartományban is.

$$\text{Ahol: } \frac{\partial}{\partial t} \to j\omega$$

a, Bizonyítás:

$$u(z,t) = \hat{u}(z)\cdot\cos(\omega t + \varphi(z)) \iff \bar{u}(z) = \hat{u}(z)\cdot e^{j\varphi(z)}$$

helyfüggő amplitúdó — komplex amplitúdó

$$i(z,t) = \hat{i}(z)\cdot\cos(\omega t + \psi(z)) \iff \bar{I}(z) = \hat{I}(z)\cdot e^{j\psi(z)}$$

$$u(z,t) = \mathrm{Re}\{\bar{u}(z)\cdot e^{j\omega t}\} \to \frac{\partial u}{\partial t} = \mathrm{Re}\{j\omega\, \bar{u}(z)\cdot e^{j\omega t}\}$$

$$i(z,t) = \mathrm{Re}\{\bar{I}(z)\cdot e^{j\omega t}\}$$

$j\omega$-val való szorzás lesz ✓

b, Ennek segítségével: (szinuszos állandósult állapotban:)

$$\text{i, } \frac{d\bar{u}(z)}{dz} = -R'\cdot\bar{I}(z) - j\omega L'\cdot\bar{I}(z)$$

$$\text{ii, } \frac{d\bar{I}(z)}{dz} = -G'\cdot\bar{u}(z) - j\omega C'\cdot\bar{u}(z)$$

$$\text{i} \to \bar{I}(z) = -\frac{1}{R'+j\omega L'}\cdot\frac{\partial u(z)}{\partial z} \;\downarrow\; \text{ii,}$$

$$-\frac{1}{R'+j\omega L'}\cdot\frac{\partial^2 u(z)}{dz^2} = (G'+j\omega C')\,u(z) \quad /\cdot R'+j\omega L'$$

$$\frac{d^2u(z)}{dz^2} = -\underbrace{(R'+j\omega L')\cdot(G'+j\omega C')}_{\gamma^2:\ \text{terjedési együttható}}\cdot u(z) \quad \text{a Helmholtz-egyenlet.}$$

$$\bar{\gamma} = \sqrt{(R'+j\omega L')\cdot(G'+j\omega C')} = \alpha + j\beta$$

ahol: α: csillapítási tényező $[\alpha] = \frac{1}{m}$

β: fázistényező $[\beta] = \frac{1}{m}$

c, Egydimenziós Helmholtz-egyenlet:

$$\frac{d^2\bar{U}(z)}{dz^2} - \bar{\gamma}^2\cdot\bar{U}(z) = 0$$

$\Rightarrow$ másodrendű diff. egyenlet $\to$ 2 db sajátértéke van. ezek: $+\gamma$ és $-\gamma$

2, Általános megoldása:

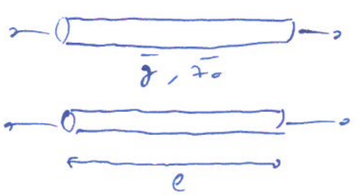
$$\bar{U}(z) = \bar{U}^+\cdot e^{-\bar{\gamma}z} + U^-\cdot e^{\bar{\gamma}z} = \bar{U}^+(z) + \bar{U}^-(z)$$

$$\bar{I}(z) = -\frac{1}{R'+j\omega L'}\cdot\frac{d\bar{U}(z)}{dz} = \underbrace{\frac{\bar{\gamma}}{R'+j\omega L'}}_{\frac{1}{Z_0}}\cdot\bar{U}^+\cdot e^{-\bar{\gamma}z} - \underbrace{\frac{\bar{\gamma}}{R'+j\omega L'}}_{\frac{1}{Z_0}}\cdot\bar{U}^-\cdot e^{\gamma z}$$

$\Downarrow$ Z_0: hullámimpedancia: $Z_0 = \frac{R'+j\omega L'}{\bar{\gamma}} = \sqrt{\frac{R'+j\omega L'}{G'+j\omega C'}} = \frac{\bar{U}^+}{\bar{I}^+} = -\frac{\bar{U}^-}{\bar{I}^-}$

$$\bar{I}(z) = \frac{\bar{U}^+}{Z_0}\cdot e^{-\gamma z} - \frac{\bar{U}^-}{Z_0}\cdot e^{\gamma z} = \bar{I}^+(z) + \bar{I}^-(z)$$

A távvezetéket a $\bar{\gamma}$; Z_0; l hármas együtthatóval jellemzi szinuszos állandósult állapotban. Ahol $\bar{\gamma}$, Z_0: hullámparaméterek.



3. A megoldás értelmezése:

a) **Speciálisan:** → $U^- = 0$ → $U(z) = U^+ \cdot e^{-\gamma z} = U^+ \cdot e^{-\alpha z} \cdot e^{-j\beta z}$

→ $U^+ \in \mathbb{R}$

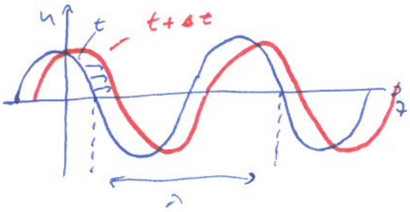
$u(z,t) = \mathrm{Re}\{U(z) \cdot e^{j\omega t}\} = \mathrm{Re}\{U^+ \cdot e^{-\alpha z} \cdot e^{j(\omega t - \beta z)}\}$

$u(z,t) = U^+ \cdot e^{-\alpha z} \cdot \cos(\omega t - \beta z)$

↳ $\alpha = 0$

$u(z,t) = U^+ \cdot \cos(\omega t - \beta z) = \underbrace{U^+ \cdot \cos\left(\omega\left(t - \frac{\beta}{\omega} z\right)\right)}_{\text{haladó hullám}}$

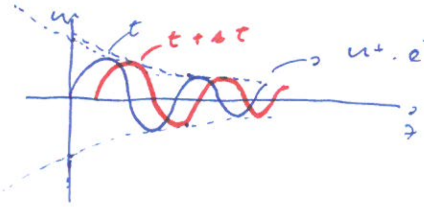
ahol $\frac{\beta}{\omega} \cdot z$ a távolsággal arányos késés, így $\frac{\beta}{\omega} = \frac{1}{v}$



periodicitás: $T = \frac{2\pi}{\omega}$; $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$: hullámhossz

b) **Általánosan:** → $\alpha \neq 0$

↳ $u(z,t) = U^+ \cdot \underbrace{e^{-\alpha z}}_{\text{csillapítás}} \cdot \cos(\omega t - \beta z)$



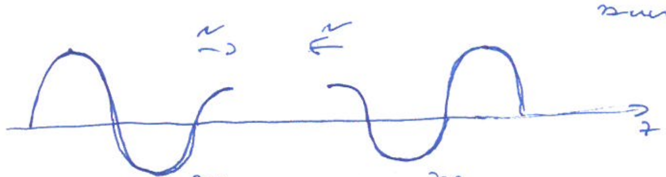
→ $U^+ \cdot e^{-z \cdot \alpha}$: exp. burkológörbe

→ $U^+ = 0$; $U^- \neq 0$

↳ $u(z,t) = U^- \cdot e^{+\alpha \cdot z} \cdot \cos(\omega t + \beta z)$

Ez a + miatt fordítva halad.

↳ $U(z) = U^+ \cdot e^{-\gamma z} + U^- \cdot e^{\gamma z}$: így az általános így tekinthető mint 2 egymással szemben haladó szuperpozíciója.



$U^+ \cdot e^{-\gamma z}$ „oda”

$U^- \cdot e^{\gamma z}$ „vissza”

XXXIX. Mutassa be a távvezeték hullámparamétereit, illetve kapcsolatukat a fázissebességgel és a hullámhosszal! Térjen ki az ideális távvezeték speciális esetére is!

1. Terjedési együttható:

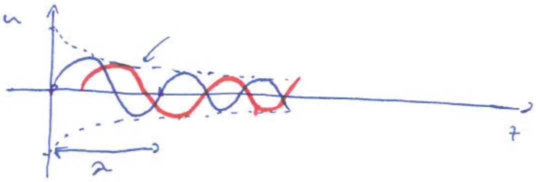
A Helmholtz-egyenlet levezetéséből jön ki. Legyen ~~α~~ α csillapítási, β pedig a fázisegyüttható, $v_f = \frac{\omega}{\beta}$ pedig a fázissebesség.

Így a terjedési együttható: $\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R'+j\omega L')(G'+j\omega C')} = \alpha + j\cdot\frac{\omega}{v_f}$

és $[\alpha] = \frac{1}{m}$; $[\beta] = \frac{rad}{m}$

α jelentése: a feszültség/áram amplitúdója exponenciálisan csökken.

β jelentése: a feszültség egy z helyen fáziskésésben van z = 0-hoz képest.



$u(z,t) = u_0^+ \cdot e^{-\gamma z} + u_0^- \cdot e^{\gamma z}$

átalakítás

$u^+(z,t) = u_0^+ \cdot e^{-\alpha z} \cdot \cos\left[\omega\left(t - \frac{\beta}{\omega}\cdot z\right)\right] \to u^- = 0$

$u^-(z,t) = u_0^- \cdot e^{\alpha z} \cdot \cos\left[\omega\left(t + \frac{\beta}{\omega}\cdot z\right)\right] \to u^+ = 0$

Továbbá: $v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}$

$T = \frac{2\pi}{\omega}$

$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{v_f}{f}$

2. Hullámimpedancia:

A Helmholtz-egyenlet általános megoldásából jön ki.
Az egy irányban terjedő feszültség- és áramhullám komplex amplitúdójának viszonyát fejezi ki tetszőleges helyen:

$$Z_0 = \frac{U^+(z)}{I^+(z)} = -\frac{U^-(z)}{I^-(z)} = \sqrt{\frac{R'+j\omega L'}{G'+j\omega C'}} \qquad [Z_0] = \Omega$$

Fontos, hogy ideális esetben frekvencia és helyfüggetlen.

3. Ideális távvezeték:

→ veszteségmentes: $R' = G' = 0$ az teljes hatásos teljesítmény ugyanannyi a végén mint az elején

→ csillapításmentes: $\alpha = 0$

→ frekvenciafüggetlen (diszperziómentes) sebesség.

Így: $\Rightarrow \gamma = \sqrt{j\omega L' \cdot j\omega C'} = j\omega\sqrt{L' \cdot C'} = j\cdot\beta \to \beta = \omega\sqrt{L' \cdot C'}$

↳ $v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\omega\sqrt{L' \cdot C'}} = \frac{1}{\sqrt{L' \cdot C'}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}$ és $c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}} \Rightarrow v_f = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r}}$

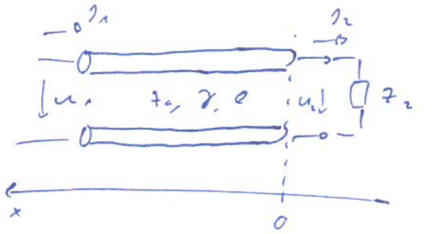
$\Rightarrow Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega L'}{j\omega C'}} = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$, azaz tisztán valós

Ha légszigetelésű is: $v = c = \frac{c}{\sqrt{1}}$

↳ $\beta = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi \cdot f}{c}$

XV. Definiálja a reflexiós tényezőt, ismertesse speciális lezárások (illesztett, nyitott végű, rövidre zárt) esetén az ideális távvezetéken kialakuló feszültség-hullámviszonyokat!

1. Új irányítás:



$x = l - z$

$z = l - x$

Így: $u(z) = u^+ \cdot e^{-\gamma z} + u^- \cdot e^{\gamma z} = u^+ \cdot e^{-\gamma(l-x)} + u^- \cdot e^{\gamma(l-x)}$

$$u(x) = \underbrace{u^+ \cdot e^{-\gamma l}}_{u_2^+} \cdot e^{\gamma x} + \underbrace{u^- \cdot e^{\gamma l}}_{u_2^-} \cdot e^{-\gamma x} = u(x)$$

$$u(x) = u_2^+ \cdot e^{\gamma x} + u_2^- \cdot e^{-\gamma x}$$

$$i(x) = \underbrace{\frac{u_2^+}{Z_0} \cdot e^{\gamma x}}_{\text{beeső}} - \underbrace{\frac{u_2^-}{Z_0} \cdot e^{-\gamma x}}_{\text{reflektált}}$$

2. Reflexiós tényező:

a, Definíció: A visszavert és a beeső feszültséghullámok a vezeték végén fellépő amplitúdó viszonya:

$$r \triangleq \frac{\bar{U}_{visszavert}}{\bar{U}_{beeső}}\Bigg|_{lezárásnál} = \frac{u_2^-}{u_2^+}$$

pl.: $$r(x) = \frac{u^-(x)}{u^+(x)} = \cancel{\left(\frac{u^-(x)}{u^+(x)}\right)} = \frac{\bar{U}_0^-}{\bar{U}_0^+} \cdot e^{-2j\beta x}\Bigg|_{x=0} = \frac{\bar{U}_0^-}{\bar{U}_0^+}$$

b, Lezáró impedancia segítségével:

$$Z(x) = \frac{\bar{U}(x)}{\bar{I}(x)} = \frac{\bar{U}_2^+ \cdot e^{j\beta x} + \bar{U}_2^- \cdot e^{-j\beta x}}{\frac{\bar{U}_2^+}{Z_0} \cdot e^{j\beta x} - \frac{\bar{U}_2^-}{Z_0} \cdot e^{-j\beta x}} = Z_0 \cdot \frac{1 + \overbrace{\frac{u_2^- \cdot e^{-j\beta x}}{u_2^+ \cdot e^{j\beta x}}}^{r_2}}{1 - \frac{u_2^- \cdot e^{-j\beta x}}{u_2^+ \cdot e^{j\beta x}}} = Z_0 \cdot \frac{1 + r_2}{1 - r_2}$$

Így: $$r_2 = \frac{Z(x) - Z_0}{Z(x) + Z_0} = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0}$$

Ha egy Z_0 hullámimpedanciájú távvezetéket Z_2 impedanciával zárunk le, akkor a reflexiós tényező a fenti módon számítható.

Reflexió: egyik közegből a másikba lép, lévén közeghatáron reflexiót szenved, egy része viszont továbbhalad. Z_0: egyik, Z_2: másik közeg.

Ha passzív a lezárás: $Re\{Z_2\} \geq 0 \rightarrow |r_2| \leq 1$

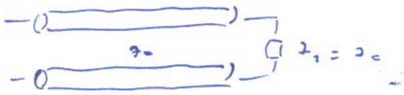
3. Speciális lezárások:

a, Illesztett lezárás:

$u(x) = u_2^+ \cdot e^{\gamma x}$

vagy

$u(z) = u_2^+ \cdot e^{-\gamma z}$



$$r = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0} = \frac{0}{2Z_0} = 0$$

→ nincs reflektált hullám

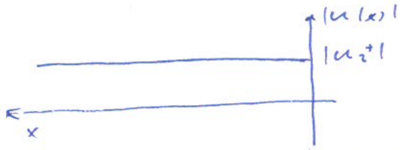
↓

nincs visszavert áramhullám [illegible] veszteség → átvihető max. teljesítmény

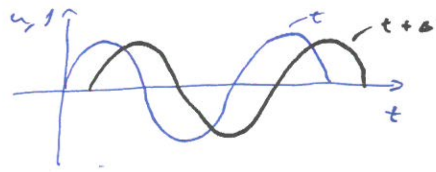
$$\left.\begin{aligned} u(x) &= u_2^+ \left(e^{j\beta x} + 0 \cdot e^{-j\beta x}\right) = u_2^+ \cdot e^{j\beta x} \\ i(x) &= \frac{u_2^+}{Z_0}\left(e^{j\beta x} - 0 \cdot e^{-j\beta x}\right) = \frac{u_2^+}{Z_0} \cdot e^{j\beta x} \end{aligned}\right\} \text{tisztán haladó hullám}$$

Amplitúdó eloszlása: $|U(x)| = |U_2^+ \cdot e^{\alpha x} \cdot e^{j\beta x}| = |U_2^+| \cdot e^{\alpha x}$

↳ $|U(x)| = |U_2^+|$

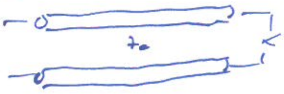


és



Tisztán haladó hullám: amplitúdója konstans

b, Szakadás: (nyitott végű), ($\alpha = 0$)



$r = \lim_{Z_2 \to \infty} \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0} = \lim_{Z_2 \to \infty} \frac{\frac{Z_2}{Z_2} - \frac{Z_0}{Z_2}}{\frac{Z_2}{Z_2} + \frac{Z_0}{Z_2}} = 1$

Totálreflexió: teljes visszaverődés: $U_2^+ = U_2^-$

↳ $U(x) = U_2^+ \cdot (e^{j\beta x} + 1 \cdot e^{-j\beta x}) = 2U_2^+ \cdot \cos(\beta x)$ → kioltási helyei vannak. (csomópontok)

Szinuszos az eloszlás, de állóhullámot kapunk.

Legyen $U_2^+ \in \mathbb{R}$ → $u(x,t) = Re\{2U_2^+ \cdot \cos(\beta x) \cdot e^{j\omega t}\} = 2U_2^+ \cdot \cos(\beta x) \cdot \cos(\omega t)$

Feszültséghullám kioltási helyei: $u(x,t) = 0, \forall t \Leftrightarrow \cos(\beta x) = 0$

$\beta x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi = \frac{\pi}{2}(2k+1)$ $\quad \beta = \frac{2\pi}{\lambda}$

$x = \frac{\pi}{2\beta}(2k+1) = \frac{\lambda}{4}(2k+1)$

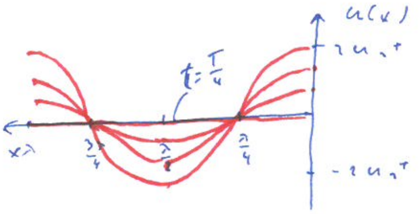
Áramhullám kioltási helyei: $I(x) = \frac{U_2^+}{Z_0} \cdot (e^{j\beta x} - 1 \cdot e^{-j\beta x}) = 2j \cdot \frac{U_2^+}{Z_0} \sin(\beta x)$

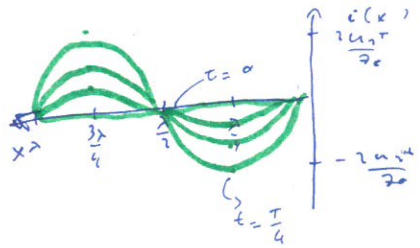
$i(x,t) = Re\{2 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{U_2^+}{Z_0} \cdot \sin(\beta x) \cdot e^{j\omega t}\} = -\frac{U_2^+}{Z_0} \sin(\beta x) \cdot \sin(\omega t)$

↳ $i(x,t) = 0, \forall t \to \sin \beta x = 0$

$\beta x = k \cdot \pi$

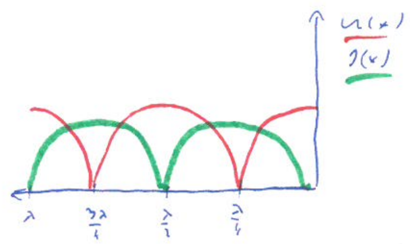
$x = \frac{k \cdot \pi}{\beta} = k \cdot \frac{\lambda}{2}$





Időben $\frac{1}{4}$ periódusnyi eltolással az E és M mező egymásba alakul. Az állóhullám nem szállít hatásos teljesítményt.

Bármely hullám leírható egy haladó és egy állóhullám szuperpozíciójaként.



⇒ interferenciális

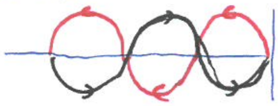
c, Rövidrezárt távvezeték:

$Z_2 = 0$ $\quad r = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0} = -1$

$U(x) = U_2^+ (e^{j\beta x} + (-1) \cdot e^{-j\beta x}) = 2j \cdot U_2^+ \cdot \sin(\beta x)$

$I(x) = \frac{U_2^+}{Z_0} \cdot (e^{j\beta x} - (-1) \cdot e^{-j\beta x}) = 2 \cdot \frac{U_2^+}{Z_0} \cdot \cos(\beta x)$

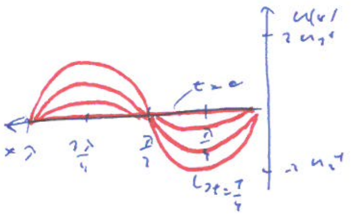
Ha $r = -1$, ott is állóhullámok, minden visszaverődik, de fordítva.

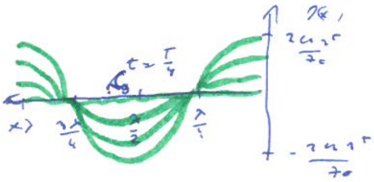


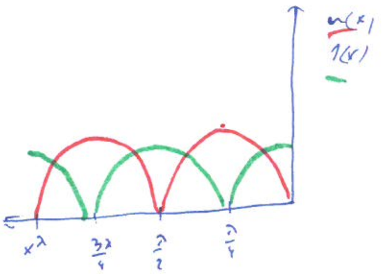
Itt is lesz határfeltételi helyek: feszültség mint áram:

feszültség: $x = k \cdot \frac{\lambda}{2}$

$i = x = (2k+1) \cdot \frac{\lambda}{4}$







=> interferenciakép.

XVI. Ismertesse a tetszőleges impedanciával lezárt ideális távvezeték feszültség- és áramviszonyait, valamint az állóhullám - haladóhullám felbontást! Mi az energetikai tartalma a (tiszta) reaktanciával lezárt távvezetéken kialakuló hullámoknak?

A TV ideális: ($\gamma = j\cdot\beta$)

Z_0

$Z_2 = R + j\cdot X$

$$r_2 = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0} = r\cdot e^{j\varphi} = \frac{R + j\cdot X - Z_0}{R + j\cdot X + Z_0}$$

ahol: $r \in \mathbb{R}_+$ és $\varphi \in [0; 2\pi]$

$$u(x) = u_2^+\left(e^{j\beta x} + r\cdot e^{j\varphi}\cdot e^{-j\beta x}\right)$$

$$u(x) = \underbrace{u_2^+\cdot e^{j\beta x} - u_2^+\cdot r\cdot e^{j\beta x}}_{1} + \underbrace{u_2^+\cdot r\cdot e^{j\beta x} + u_2^+\cdot r\cdot e^{j\varphi}\cdot e^{-j\beta x}}_{2}$$

1: $u_2^+\cdot(1-r)\cdot e^{j\beta x}$

2: $u_2^+\cdot r\cdot e^{j\frac{\varphi}{2}}\left[e^{j(\beta x - \frac{\varphi}{2})} + e^{-j(\beta x - \frac{\varphi}{2})}\right]$

⇓

$$u(x) = \underbrace{u_2^+(1-r)\cdot e^{j\beta x}}_{\text{haladóhullám}} + \underbrace{2u_2^+\cdot r\cdot e^{j\frac{\varphi}{2}}\cdot\cos\left(\beta x - \frac{\varphi}{2}\right)}_{\text{állóhullám}}$$

Ez az ún. állóhullám - haladóhullám felbontás

$u(x) = u_{haladó}(x) + u_{álló}(x)$

és $|u_{haladó}(x)| = u_2^+(1-r)$ konstans: tisztán haladó amplitúdója konstans.

Tehát a vezetéken kialakuló hullámot egy vezeték irányban haladó és egy állóhullám összegeként írhatjuk fel.

Áram esetén:

$$I(x) = \frac{u_2^+}{Z_0}\left(e^{j\beta x} - r\cdot e^{j\varphi}\cdot e^{-j\beta x}\right)$$

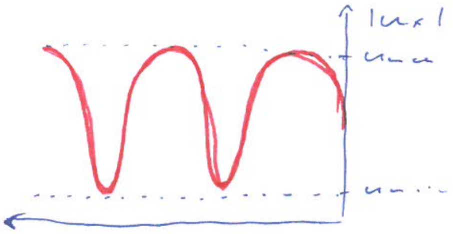
$$I(x) = \frac{u_2^+}{Z_0}\cdot e^{j\frac{\varphi}{2}}\left(e^{j(\beta x - \varphi/2)} - r\cdot e^{-j(\beta x - \varphi/2)}\right)$$

$$I(x) = \frac{u_2^+}{Z_0}\cdot e^{j\frac{\varphi}{2}}\left(e^{j(\beta x - \varphi/2)} + r\cdot e^{j(\beta x - \varphi/2)} - r\cdot e^{j(\beta x - \frac{\varphi}{2})} - r\cdot e^{-j(\beta x - \varphi/2)}\right)$$

$$I(x) = \underbrace{\frac{u_2^+}{Z_0}(1+r)\cdot e^{j\beta x}}_{\text{haladóhullám.}} - \underbrace{\frac{u_2^+}{Z_0}\cdot e^{j\frac{\varphi}{2}}\cdot 2r\cos\left(\beta x - \frac{\varphi}{2}\right)}_{\text{állóhullám}}$$

Létezik x, melyre: $\cos(\beta x + \frac{\varphi}{2}) = 0$ → csomópont

Cellács-görbe:



⇒ a maximumok tompábbak
⇒ a minimumok élesebbek

Energetikai tartalom:

→ A reaktanciával való lezárás azt jelenti, hogy a vezeték vége olyan lezárással van lezárva, amely nem vesz fel hatásos teljesítményt. → időbeli átlaga 0.

↳ oda és visszahaladó hullám teljesítményt szállít oda-vissza.

↳ A hatásos teljesítményt a haladó hullám viszi, az állóhullám nem szállít hatásos teljesítményt.

↳ Tisztán állóhullámnál lengő teljesítmény van, negyedperiódusonként oda-vissza „lüktetés"

↳ $\hat{E}$ és M tér egymásba alakul → időbeli periodicitás.

XLII. Hogyan határozható meg a feszültségamplitúdó minimum és maximumhelyei a távvezeték mentén, a lezárás ismeretében?

A lezárás és a hullámimpedancia ismeretében számolható a reflexiós tényező, így:

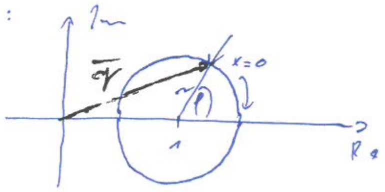
$$\bar{Z}_2 \to \bar{r}_2 = \frac{\bar{Z}_2 - Z_0}{\bar{Z}_2 + Z_0} = r\cdot e^{j\varphi} \qquad \text{ahol } 0 \le r \le 1,\quad \varphi \in [0;2\pi]$$

$$U(x) = U_2^+\left(e^{j\beta x} + r\cdot e^{j\varphi}\cdot e^{-j\beta x}\right)$$

$$U(x) = U_2^+\cdot e^{j\beta x}\left(1 + r\cdot e^{-j(2\beta x - \varphi)}\right)$$

$$|U(x)| = |U_2^+|\cdot 1\cdot \underbrace{\left|1 + r\cdot e^{-j(2\beta x - \varphi)}\right|}_{\bar{q}}$$ / szorzat abszolút értéke = abszolútértékek szorzata

Interferenciaábra:



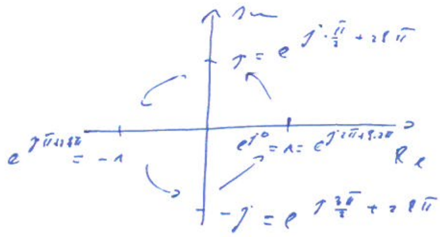
x nő, a nyíl irányában mozog és $\bar{q}$ változik.

Továbbá: $U_{max} = \max_x |U(x)| = |U_2^+|\cdot(1+|r|) \to -2\beta x + \varphi = k\cdot 2\pi$

$U_{min} = \min_x |U(x)| = |U_2^+|\cdot(1-|r|) \to -2\beta x + \varphi = \pi(2k+1)$

Tehát: maximumhelyek: ~~$(\beta k + \varphi)$~~

mi változik? $e^{-j(2\beta x - \varphi)}$



$\varphi = 0$ ⇓

Hol max? 1-nél!

⇓

$$2\beta\cdot x = 2k\cdot\pi$$

$$x = \frac{k\cdot\pi}{\beta} = \frac{k\cdot\pi}{\frac{2\pi}{\lambda}} = \frac{k\cdot\lambda}{2}$$

→ minimumhelyek:

Min, ha −1!

⇓

$$\pi + 2k\cdot\pi = 2\beta x + \varphi \qquad \varphi = 0$$

⇓

$$2\cdot\frac{2\pi}{\lambda}x = (2k+1)\cdot\pi$$

$$x = \frac{(2k+1)\lambda}{2\cdot 2} = \frac{(2k+1)\lambda}{4}$$

Azért fontos, mert definiálható az állóhullámarány (VSWR)

$$\sigma \triangleq \frac{U_{max}}{U_{min}} = \frac{\cancel{|U_2^+|}\cdot(1+|r_2|)}{\cancel{|U_2^+|}\cdot(1-|r_2|)} = \frac{1+|r_2|}{1-|r_2|} \qquad \sigma \in [1;\infty[$$

XLIII. Definiálja az állóhullámarányt és ismertesse számítását! Hogyan használható ez a mennyiség nagyfrekvenciás impedanciamérésre?

1. Definíció:

Az amplitúdó „hullámosságát” az állóhullámarány jellemzi.

↳ Az állóhullám-intenzitás mértékét a tápvonal mentén mérhető maximális és minimális feszültség hányadosaként definiálják és állóhullámaránynak nevezik. Ez az angol „voltage standing wave ratio” kezdőbetűiből származik, jele: VSWR vagy σ.

↳ A feszültség abszolút értékének maximumánál az áram abszolút értéke minimális és fordítva, és ezeken a helyeken az áram és a feszültség fázisban vannak. Ezért az ideális távvezetékon a maximális és minimális abszolút értékű impedancia egyúttal tisztán valós és az állóhullámaránnyal kifejezhető.

$$Z_{max} = Z_0 \cdot \sigma \iff Z_{min} = \frac{Z_0}{\sigma}$$

Mivel: $\sigma = \frac{U_{max}}{U_{min}}$ és $\sigma \in [1;\infty[$

és $I_{max} = \frac{U_{max}}{Z_0} \to U_{max} = Z_0 \cdot I_{max}$ és $Z_{max} = \frac{U_{max}}{I_{min}} = \frac{U_{min}\cdot\sigma}{\frac{U_{min}}{Z_0}} = \sigma \cdot Z_0$

$U_{max} = U_{min} \cdot \sigma$

$Z_{min} = \frac{U_{min}}{I_{max}} = \frac{\cancel{U_{max}}}{\sigma} \cdot \frac{Z_0}{\cancel{U_{max}}} = \frac{Z_0}{\sigma}$

$$\sigma = \sqrt{\frac{Z_{max}}{Z_{min}}} = \sqrt{\frac{Z_0 \cdot \sigma}{\frac{Z_0}{\sigma}}} = \sqrt{\sigma^2}$$

Valamint:

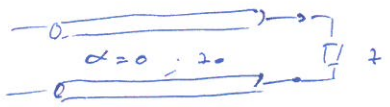
$$\sigma = \frac{U_{max}}{U_{min}} = \frac{\cancel{|U_2^+|}\cdot(1+|r|)}{\cancel{|U_2^+|}\cdot(1-|r|)} = \frac{1+|r|}{1-|r|}\Bigg|_{r=r_2} = \frac{1+|r_2|}{1-|r_2|}$$

$$\sigma_{max} = \frac{1+|-1|}{1-|-1|} = \infty \qquad r(z) = \pm 1$$

$$\sigma_{min} = \frac{1 \pm 0}{1 + 1} = 1 \qquad r(z) = 0$$

2. Nagyfrekvenciás impedanciamérés:

Hagyományos módszerekkel nehezen kivitelezhető.



Módszere:

i, Mérjük $\sigma = \frac{U_{max}}{U_{min}}$-t, jegyezzük fel a feszültségminimum helyét.

ii, Z helyére rövidzár → megmérjük a feszültségminimum eltolódását → φ

iii, $\bar{r}_2$ meghatározható: $\sigma = \frac{1+|r_2|}{1-|r_2|}$; $\bar{r}_2 = |r_2| \cdot e^{j\varphi}$

iv, r_2 ismeretében $\bar{Z}$ meghatározható

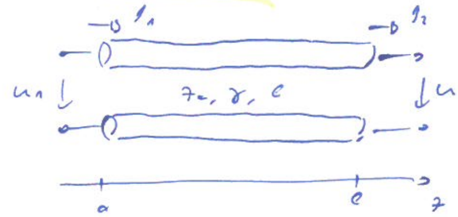
$$\bar{r}_2 = \frac{\bar{Z} - Z_0}{\bar{Z} + Z_0}$$

Nagyfrekvencián a koncentrált (mint L, C) meghatározásánál a más módszeres mérésekor

Az állóhullámaránnyal lehet még nagyfrekvenciás anyagjellemzőt is mérni.

XLIV. Ismertesse a távvezeték kétkapuként történő leírását, a láncparamétereket a T- és Π- helyettesítő képeket! Tekinthetők-e utóbbiak koncentrált paraméterű hálózat realizálásának?

1. Láncharakterisztika:



Helmholtz-egyenlet megoldásai:

$$U(z) = U^+ \cdot e^{-\gamma z} + U^- \cdot e^{\gamma z}$$
$$I(z) = \frac{U^+}{Z_0} \cdot e^{-\gamma z} - \frac{U^-}{Z_0} \cdot e^{\gamma z}$$

i, TV elején: $z = 0$:

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= U^+ + U^- \\ I_1 &= \frac{U^+}{Z_0} - \frac{U^-}{Z_0} \end{aligned}\right\} \begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{Z_0} & -\frac{1}{Z_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^+ \\ U^- \end{bmatrix}$$

ii, TV végén: $z = l$

$$\left.\begin{aligned} U_2 &= U^+ \cdot e^{-\gamma l} + U^- \cdot e^{\gamma l} \\ I_2 &= \frac{U^+}{Z_0} \cdot e^{-\gamma l} - \frac{U^-}{Z_0} \cdot e^{\gamma l} \end{aligned}\right\} \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-\gamma l} & e^{\gamma l} \\ \frac{e^{-\gamma l}}{Z_0} & -\frac{e^{\gamma l}}{Z_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^+ \\ U^- \end{bmatrix}$$

iii, $\rightarrow \begin{bmatrix} U^+ \\ U^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{-\gamma l} & e^{\gamma l} \\ \frac{e^{-\gamma l}}{Z_0} & -\frac{e^{\gamma l}}{Z_0} \end{bmatrix}^{-1}$ behelyettesítjük az i,-be

$$\det(\;''\;) = -\frac{2}{Z_0}$$

$$\begin{bmatrix} U^+ \\ U^- \end{bmatrix} = -\frac{Z_0}{2} \begin{bmatrix} -\frac{e^{\gamma l}}{Z_0} & -e^{\gamma l} \\ -\frac{e^{-\gamma l}}{Z_0} & e^{-\gamma l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Behelyettesítés után:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{Z_0} & -\frac{1}{Z_0} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{\gamma l} & Z_0 \cdot e^{\gamma l} \\ e^{-\gamma l} & -Z_0 \cdot e^{-\gamma l} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \frac{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}}{2} & Z_0 \cdot \frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{2} \\ \frac{1}{Z_0} \cdot \frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{2} & \frac{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ch(\gamma l) & Z_0 \cdot sh(\gamma l) \\ \frac{1}{Z_0} sh(\gamma l) & ch(\gamma l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

ABCD paraméterek

Transzfer-karakterisztika

Tehát: $U_1 = \frac{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}}{2} U_2 + Z_0 \frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{2} I_2 = A_{11} U_2 + A_{12} I_2 = \dots$

$$I_1 = \frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{2 Z_0} \cdot U_2 + \frac{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}}{2} \cdot I_2 = A_{21} U_2 + A_{22} I_2 = \dots$$

Ahol az átalakítás az Euler-formula segítségével:

$$\frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{2} = sh(\gamma l) \quad \text{és} \quad \frac{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}}{2} = ch(\gamma l)$$

a, Tulajdonságok:

→ reciprok, mert $\det \underline{\underline{A}} = ch^2(\gamma l) - sh^2(\gamma l) = 1$

→ szimmetrikus, mert reciprok és $A_{11} = A_{22}$

→ passzív, mert $A_{11}, A_{22} \geq 0$ és $4 A_{11} \cdot A_{22} \geq (A_{12} + A_{21})^2$

b, Ideális távvezeték: $\alpha = 0$

$$\gamma = \alpha + j\beta = j \cdot \beta$$

$$\left.\begin{aligned} ch(\gamma l) &= ch(j\beta l) = \cos(\beta l) \\ sh(\gamma l) &= sh(j\beta l) = j \cdot \sin(\beta l) \end{aligned}\right. \Rightarrow \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \cos(\beta l) & j \cdot Z_0 \cdot \sin(\beta l) \\ \frac{j \cdot \sin(\beta l)}{Z_0} & \cos(\beta l) \end{bmatrix}$$

Tehát: $U_1 = U_2 \cdot \cos(\beta l) + I_2 \cdot j \cdot Z_0 \cdot \sin(\beta l)$

$$I_1 = U_2 \cdot \frac{1}{Z_0} \cdot j \cdot \sin(\beta l) + I_2 \cdot \cos(\beta l)$$

c, **Hullámparaméterek $\underline{\underline{A}}$-ból:**

$$Z_0 = \sqrt{\frac{A_{12}}{A_{21}}} \qquad e^{\gamma l} = A_{11} + \sqrt{A_{12} \cdot A_{21}}$$

d, **Miért jó ez?**

A távvezeték mentén nem ismert a generátor és a szekunder oldal, de láncból ismerem az áram-feszültség viszonyt. Így a láncparaméteres karakterisztikával tőle balra-jobbra számolható a feszültség-áram viszony.

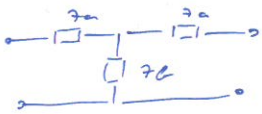
e, **Impedancia-paraméteres, T-helyettesítés:**

Átrendezve:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \frac{Z_0}{sh(\gamma l)} \begin{bmatrix} ch(\gamma l) & -1 \\ 1 & -ch(\gamma l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

a lánc referenciairány miatt nem egyezik az előjel.

=> T-helyettesítés:



=> $Z_a = Z_0 \dfrac{ch(\gamma l) - 1}{sh(\gamma l)}$

$Z_c = \dfrac{Z_0}{sh(\gamma l)}$

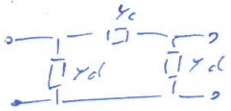
Nem racionális tört fgv.

Nem realizálható, mert γ frekvenciafüggő: $\gamma = j \cdot \beta = j \cdot \omega \sqrt{LC}$

f, **Admittancia paraméteres, T helyettesítés:**

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{Z_0 (sh(\gamma l))} \cdot \begin{bmatrix} ch(\gamma l) & 1 \\ -1 & -ch(\gamma l) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

=> Π-helyettesítés:

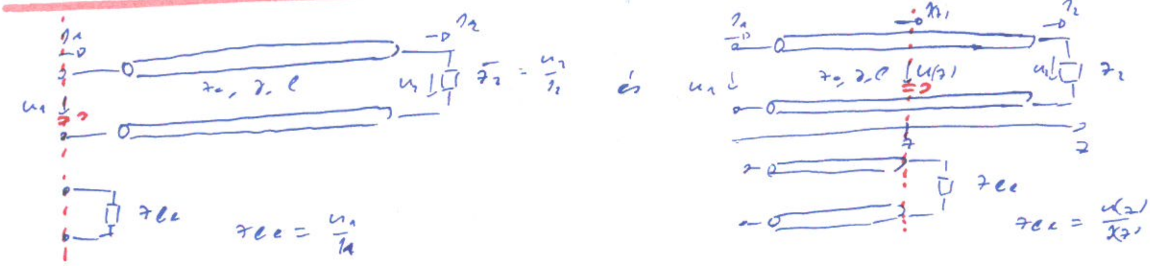


$Y_c = \dfrac{1}{Z_0 \cdot sh(\gamma l)}$

$Y_d = \dfrac{1}{Z_0} \cdot \dfrac{ch(\gamma l) - 1}{sh(\gamma l)}$

Nem tekinthetők ezek utólagos a távvezeték koncentrált paraméteres helyettesítésének, mert γ frekvenciafüggő, ezért az átviteli karakterisztika nem racionális törtfüggvény, hanem irracionális.
A koncentrált paraméterekből felépített rendszer átviteli karakterisztikája azonban mindig racionális tört fgv-e. Szóval nem realizálható, számolni azonban jó lesz, hálózatanalízisre alkalmas.

XLV. Ismertesse a bemeneti impedancia fogalmát és számítási módját! Hogyan használható ez a mennyiség az illesztési feladat megoldására?



1, Definíció:

Egy négypólusban mérhető impedancia a szekunder oldal valamely lezárása esetén.
A primer oldali feszültség és áram hányadosával számolható
↳ Balról jellemz helyettesítő oldalról jellemzi lezárással => TV összetettsége helyettesíthető ellenállással

$Z_{be} \triangleq \frac{U_1}{I_1}$ → Láncparaméterekkel:

$$Z_{be} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{U_2 \cdot ch(\gamma l) + Z_0 \cdot I_2 \cdot sh(\gamma l)}{\frac{U_2}{Z_0} sh(\gamma l) + I_2 \cdot ch(\gamma l)} = Z_0 \cdot \frac{\frac{U_2}{I_2} \cdot ch(\gamma l) + Z_0 \cdot sh(\gamma l)}{\frac{U_2}{I_2} sh(\gamma l) + Z_0 \cdot ch(\gamma l)}$$

$/ I_2 :$

$\frac{1}{Z_0}$ -t kiemelünk

$$Z_{be} = Z_0 \cdot \frac{Z_2 \, ch(\gamma l) + Z_0 \cdot sh(\gamma l)}{Z_2 \cdot sh(\gamma l) + Z_0 \cdot ch(\gamma l)} = Z_0 \cdot \frac{Z_2 \, ch(\gamma l) + Z_0 \, sh(\gamma l)}{Z_2 \, sh(\gamma l) + Z_0 \, ch(\gamma l)}$$

Ideális távvezetékre: $\alpha = 0$

$$Z_{be} = Z_0 \cdot \frac{Z_2 \cdot \cos(\beta l) + j \cdot Z_0 \cdot \sin(\beta l)}{j \cdot Z_2 \cdot \sin(\beta l) + Z_0 \cdot \cos(\beta l)} = Z_0 \cdot \frac{Z_2 + j \cdot Z_0 \cdot tg(\beta l)}{Z_0 + j \cdot Z_2 \cdot tg(\beta l)}$$

$: \cos(\beta l)$

a, Speciális lezárások:

i, Illesztett lezárás: $Z_2 = Z_0$: mintha TV-hez zárnánk le a TV-t.

↳ $Z_{be} = Z_0 \cdot 1 = \left(Z_0 \cdot \cancel{\frac{Z_0 + j \cdot Z_0 \cdot tg(\beta l)}{Z_0 + j \cdot Z_0 \cdot tg(\beta l)}}\right)$

ii, Szakadás: $Z_2 = \infty$

↳ $Z_{be,ü} = -j \cdot Z_0 \cdot ctg(\beta \cdot l) = \left(Z_0 \cdot \frac{\frac{Z_2}{Z_2} + 0}{0 + j \frac{Z_2}{Z_0} tg(\beta l)}\right)$

iii, Rövidzár: $Z_2 = 0$

↳ $Z_{be,rz} = j \cdot Z_0 \cdot tg(\beta l) = \left(Z_0 \cdot \frac{0 + j \cdot Z_0 \cdot tg(\beta l)}{Z_0 + 0}\right)$

↳ $Z_0 = \sqrt{Z_{be,rz} \cdot Z_{be,ü}}$ és $tg(\beta l) = \sqrt{\frac{Z_{be,rz}}{Z_{be,ü}}}$

Smith-diagrammal lehet ábrázolni a bemeneti impedanciát.

/ iv, $l \to \infty$ => $Z_{be} = Z_0$ /

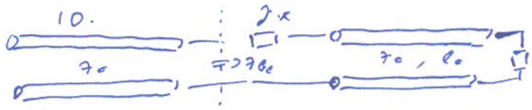
2. Illesztési feladat:

Cél: $\sigma \equiv 1$ legyen → $Z_{be} = Z_0$

↳ $r_2 = 0$ → $\sigma = \frac{1 + |r_2|}{1 - |r_2|} = 1$

Tehát a lényeg az, hogy reflexiómentes legyen az illesztés. Azaz a második vezeték bemeneti impedanciája egyezzen meg az első hullámimpedanciájával.

a) <u>Első példa:</u>



$R \neq Z_0 \Rightarrow l_0$ segítségével állítjuk be

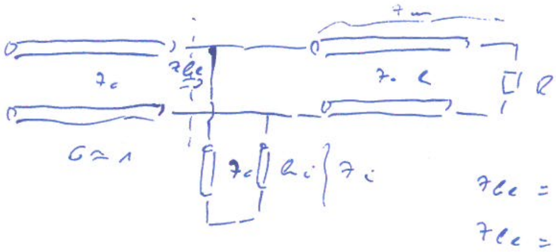
$$Z_{be} = jX + Z_0 \cdot \frac{R + j \cdot Z_0 \cdot tg(\beta l_0)}{Z_0 + j \cdot R \cdot tg(\beta l_0)} = Z_0 \text{ legyen}$$

Külön a képzetes és valós részeket szétválasztva:

$Re\{..\} = Z_0 \Rightarrow l_0$ számolható

$Im\{..\} = -X \Rightarrow X$ számolható

b) <u>Második példa:</u>



$Z_{be} = Z_0$ legyen?

$Z_{be} = Z_i \times Z_m$

Kiszámoljuk az képzetes valós..

$Z_i = Z_0 \cdot j \cdot tg(\beta l_i)$ ..

$Z_m = Z_0 \cdot \frac{R + Z_0 \cdot j \cdot tg(\beta l)}{Z_0 + R \cdot j \cdot tg(\beta l)}$ ..

Tehát a hossz változtatásával különböző frekvenciákon beállítható az illesztettség. ($\beta = \frac{\omega}{v}$)

Könnyebb [illegible] beállítani olcsóbb, így a 2. példa jobb.

XLVI. Írja fel a homogén hullámegyenletet az elektromos, illetve mágneses térerősségre!

1, **Feltevések:** → homogén, lineáris közeg (μ, ε, σ állandók)
→ izotróp tér: iránytól független EM. jellemzők.
→ forrásmentes tér: $\rho = 0$, ($\vec{J}_{be} = 0$; $\vec{E}_{be} = 0$)

2, **Levezetés:** Maxwell-egyenletek egyszerűsített alakjával:

(i) i*, $\mathrm{rot}\,\vec{H} = \underbrace{\sigma \cdot \vec{E}}_{\vec{J}} + \underbrace{\varepsilon \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}_{\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$

(ii) ii*, $\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\mu \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$

iii, $\mathrm{div}\,\vec{H} = 0$ ← ($\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$)

iv, $\mathrm{div}\,\vec{E} = 0$ ← ($\mathrm{div}\,\vec{D} = \rho$)

3, **Elektromos térerősségre:**

ii, → rot(ii*)

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\vec{E}) = -\mu \cdot \mathrm{rot}\,\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\mu \cdot \frac{\partial}{\partial t} \cdot \mathrm{rot}\,\vec{H} \overset{i,}{=} -\mu \cdot \frac{\partial}{\partial t} \cdot \left(\sigma \cdot \vec{E} + \varepsilon \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\vec{E}) = -\mu \cdot \sigma \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Továbbá: $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\vec{E}) = \underbrace{\mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\vec{E})}_{0} - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E}$

Így: $\Delta \vec{E} - \mu \cdot \sigma \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$

Vektoriális, homogén hullámegyenlet.

4, **Mágneses térerősségre:**

i, → rot(i*)

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\vec{H}) = \sigma \cdot \mathrm{rot}\,\vec{E} + \varepsilon \cdot \frac{\partial}{\partial t} \cdot \mathrm{rot}\,\vec{E} \overset{ii,}{=} -\sigma \cdot \mu \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \varepsilon \cdot \mu \cdot \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

Továbbá: $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\vec{H}) = \underbrace{\mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\vec{H})}_{0} - \Delta \vec{H} = -\Delta \vec{H}$

Így: $\Delta \vec{H} - \mu \cdot \sigma \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$

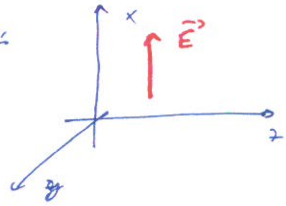
XLVII. Értelmezze a térerősség-vektor komplex amplitúdójának fogalmát (szinuszos állandósult állapot), és írja fel az elektromágneses hullámok Helmholtz-egyenletét az elektromos térerősségre vonatkozóan!

Tisztán szinuszos időbeli változás esetén komplex számítási technikával dolgozunk. A hálózatelméletből ismert módon a szinuszos jeleket komplex amplitúdójú, exponenciális függvények valós részeként értelmezzük.

$E(r,t) = Re\{\bar{E}(r)\cdot e^{j\omega t}\}$ ahol: $\bar{E}(r)$; $\bar{H}(r)$: komplex amplitúdók és ω: szin. gerjesztés körfrekv.

$H(r,t) = Re\{\bar{H}(r)\cdot e^{j\omega t}\}$

1, Megkötések:



a, térbeli: $\vec{E}(x,y,z,t) = E_x(z,t)\cdot \vec{e}_x$ → z irányú terjedés

↳ $\vec{E}$ az xy síkban nem változik: $\frac{\partial}{\partial y} = 0$; $\frac{\partial}{\partial x} = 0$

b, időbeli: $E_x(z,t) = \hat{E}_x(z)\cdot \cos(\omega t + \varphi(z)) = Re\{\vec{E}_x(z)\cdot e^{j\omega t}\}$

↳ $\vec{E}_x(z) = \hat{E}_x(z)\cdot e^{j\varphi(z)}$

2, A Helmholtz-egyenlet levezetése az elektromos térerősségre:

⇒ követelmények: a közeg töltésmentes homogén, lineáris és izotrop

→ $\rho = 0$; $E_b = 0$

⇒ Homogén hullámegyenlet:

$$\Delta\vec{E} - \mu\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\vec{e}_x\left(\Delta E_x - \mu\sigma\frac{\partial E_x}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}\right) = \vec{0}$$

[Mivel: $\Delta\vec{E} = \Delta E_x\cdot\vec{e}_x + \underbrace{\Delta E_y\cdot\vec{e}_y + \Delta E_z\cdot\vec{e}_z}_{0}$]

⇓

$$\Delta E_x\cdot\vec{e}_x = \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}\cdot\vec{e}_x$$

[Mivel: $\Delta E_x = \underbrace{\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}$]

Tehát: $\Delta\vec{E} \to \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}\vec{e}_x$: csak z irányú terjedés

Így: $\cancel{\vec{e}_x}\left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \mu\sigma\frac{\partial E_x}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}\right) = 0$

↓ $\frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow j\omega$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \mu\sigma j\omega\bar{E}_x - \mu\varepsilon(j\omega)^2\bar{E}_x = 0$$

Legyen: $\bar{\gamma} = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)}$

$\bar{\gamma} = \alpha + j\beta$

↳ fázistényező

↳ csillapítási tényező

↳ terjedési együttható

$$\frac{\partial^2\bar{E}_x}{\partial z^2} - \bar{\gamma}^2\bar{E}_x = 0$$: egydimenziós Helmholtz-egyenlet.

⇒ Általános megoldása a távvezetéki analógiából:

$$\bar{E}_x(z) = \bar{E}^+\cdot e^{-\bar{\gamma}z} + \bar{E}^-\cdot e^{\bar{\gamma}z}$$

3. kifejezés $\bar{H}$-ra:

Legyen $\bar{Z}_0 = \frac{j \cdot \omega \cdot \mu}{\bar{\gamma}} = \frac{j \cdot \omega \cdot \mu}{\sqrt{j \cdot \omega \cdot \mu \, (\sigma + j \omega \varepsilon)}} = \sqrt{\frac{j \omega \mu}{\sigma + j \omega \varepsilon}}$

így: $\bar{H}_y = \frac{\bar{E}^+}{Z_0} \cdot e^{-\bar{\gamma} z} - \frac{\bar{E}^-}{\bar{Z}_0} \cdot e^{\bar{\gamma} z}$

és

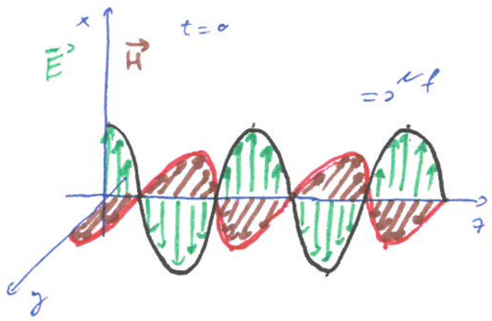
$$\Delta H_y - \bar{\gamma}^2 H_y = 0$$

XLVIII. Definiálja a síkhullám fogalmát, és írja fel a síkhullám egydimenziós Helmholtz-egyenletét! Mit jelent a TEM-típusú hullámterjedés?

1. Definíció:

-> Síkhullámnak nevezzük azt a hullámfajtát, amelyben az azonos fázisú helyek egy vonalon vannak.

-> Az említett gerjesztő forrásoktól kellően távol és kellően kis tartományban a legtöbb szabadtéri hullámterjedés, szabadon terjedő hullám, síkhullámként jól közelíthető.



x z síkban hullámzó
y z síkban hullámzó

Jól látható, hogy azonos fázisban vannak.

2. Egydimenziós (~~hullámegyenlet~~) Helmholtz-egyenlet:

i, $\mathrm{rot}\,\vec{H} = \sigma \cdot \vec{E} + \varepsilon \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

ii, $\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\mu \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$

$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

⇓ hullámegyenlet:

$$\Delta \vec{E} - \mu \cdot \sigma \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$\downarrow$ $\vec{E}(x,y,z,t) = E_x(z,t) \cdot \vec{e}_x$

$E_x(z,t) = \hat{E}_x(z) \cdot \cos(\omega t + \varphi) = \mathrm{Re}\{\bar{E}_x(z) \cdot e^{j\omega t}\}$

$\downarrow$

$$\Delta \bar{E} - \mu \cdot \sigma \cdot \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} - \mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = 0$$

$\downarrow$ frekvenciatartományban: $\frac{\partial}{\partial t} \to j\omega$ és $\Delta \bar{E} = \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \vec{e}_x$

$$\frac{\partial^2 \bar{E}_x}{\partial z^2} - \gamma^2 \bar{E}_x = 0 \quad \text{és} \quad \frac{\partial^2 \bar{H}_y}{\partial z^2} - \gamma^2 \bar{H}_y = 0$$

Csak egy koordinátától (a terjedés irányától) függ. Az arra merőleges síkban a térerősség értéke konstans. Ezért a hullámegyenlet ezen megoldását síkhullámnak hívjuk.

Általános megoldása: TV analógia: $\bar{E}_x(z) = \bar{E}^+ \cdot e^{-\gamma z} + \bar{E}^- \cdot e^{\gamma z}$

3. TEM típusú hullámterjedés:

Transzverzális elektromos és mágneses hullám. $\vec{E}$ és $\vec{H}$ minden pillanatban merőlegesek egymásra és mindkettő merőleges a terjedés irányára (z)

$$\left.\begin{aligned} E_x(z,t) &= E^+ \cdot \cos(\omega t - \beta z) \\ H_y(z,t) &= \frac{E^+}{Z_0} \cdot \cos(\omega t - \beta z) \end{aligned}\right\} \text{időben fázisban vannak.}$$

XLIX. Ismertesse, hogy miben áll a síkhullám – távvezeték analógia, és meddig terjed az érvényességi köre, azaz miben nem alkalmazható!?

=> Síkhullám:

I, $\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\mu \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$

$\downarrow \; \vec{E} = E_x \cdot \vec{e_x}$

$\mathrm{rot}\,\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial z}$

$\downarrow$

$\underbrace{-\frac{\partial E_x}{\partial z}}_{-\mathrm{rot}\,\vec{E}} = +\mu \cdot \frac{\partial H_y}{\partial t}$

II, $\mathrm{rot}\,\vec{H} = \sigma \cdot \vec{E} + \varepsilon \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$\downarrow \; \vec{H} = H_y \cdot \vec{e_y}$

$\mathrm{rot}\,\vec{H} = -\frac{\partial H_y}{\partial z}$

$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & H_y & 0 \end{vmatrix}$

$\det |\cdot| \overset{\shortparallel}{=} -\frac{\partial H_y}{\partial z}$

$\downarrow$

$\underbrace{-\frac{\partial H_y}{\partial z}}_{+\mathrm{rot}\,\vec{H}} = \sigma \cdot E_x + \varepsilon \cdot \frac{\partial E_x}{\partial t}$

=> Távvezeték:

$-\frac{\partial u}{\partial z} = R' \cdot i + L' \cdot \frac{\partial i}{\partial t}$

$-\frac{\partial i}{\partial z} = G' \cdot u + C' \cdot \frac{\partial u}{\partial t}$: távíró egyenletek.

1, Analógia:

Távvezeték	u	i	R'	G'	L'	C'
Síkhullám	E	H	–	σ	μ	ε

↳ síkhullámnál nincs ellenállása

Fontos, hogy a peremfeltételek is megegyezzenek!

-> rövidzár -> $U = 0$ ← $E_t = 0$ => ideális fémsík.

-> szakadás -> $i = 0$ ← $H_t = 0$ => mágneses fal.

a, Hullámparaméterek analógiája:

$\gamma = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} \Rightarrow \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)}$

$Z_0 = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}} \Rightarrow \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}}$

b, Helmholtz-egyenlet megoldásainak analógiája:

$U(z) = U^+ \cdot e^{-\gamma z} + U^- \cdot e^{\gamma z} \Rightarrow E_x(z) = E_x^+ \cdot e^{-\gamma z} + E_x^- \cdot e^{\gamma z}$

$I(z) = \frac{U^+}{Z_0} \cdot e^{-\gamma z} - \frac{U^-}{Z_0} \cdot e^{\gamma z} \Rightarrow H_y(z) = \frac{E_x^+}{Z_0} \cdot e^{-\gamma z} - \frac{E_x^-}{Z_0} \cdot e^{\gamma z}$

c, Fázissebesség analógia:

$v = \frac{\omega}{\beta}$

Távvezeték:
ideális: $R' = 0$; $G' = 0$; $\alpha = 0$

$\rightarrow \beta = \omega \cdot \sqrt{L' \cdot C'}$

$\downarrow$

$v_f = \frac{1}{\sqrt{L' \cdot C'}}$

Síkhullám:
ideális szigetelő: $\sigma = 0$; $\alpha = 0$

$\rightarrow \beta = \omega \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon}$

$\downarrow$

$v_f = \frac{1}{\sqrt{\mu \cdot \varepsilon}}$

2. Az analógia korlátai: Nem érvényes az analógia, ha az alábbiak nem teljesülnek.

- -> az anyag homogén (μ, ε, σ állandó)
- -> a mezőben nincs tértöltés és áramsűrűség ($\varrho = 0$, $\vec{J} = 0$)
- -> közeghatárok a hullámfrontokkal párhuzamos síkok.
- -> lineárisan polarizált síkhullám merőlegesen essen be a közeghatárra

Alak: hullámfront: az a felület, amelyen a hullám egy adott pillanatban azonos értékkel haladnak (azonos fázis)

3. Alapvető különbség a távvezeték és a hullám között:

A távvezeték egy olyan közeg, ami a hullámokat vezeti, viszont nincs vezetett közeg EM hullám esetén. Ezek szabad térben terjednek. Ez alapvető különbség a kett modellalkotásunk között.

I. Ismertesse a síkhullám viselkedését ideális szigetelőben! Térjen ki a hullámparaméterek, a fázissebesség, a hullámhossz számítására!

A síkhullámot kell részletekben kell egyszerűsítéseket végezni, mivel a közeg most ideális szigetelő, azaz: $\sigma = 0$. És a közeg csillapításmentes: $\alpha = 0$.

A Helmholtz-egyenlet megoldásai alapján:

$$\left.\begin{aligned} E_x(z) &= E_x^+ \cdot e^{-\gamma z} + E_x^- \cdot e^{\gamma z} \\ H_y(z) &= \frac{E_x^+}{Z_0} \cdot e^{-\gamma z} - \frac{E_x^-}{Z_0} \cdot e^{\gamma z} \end{aligned}\right\} \text{ fázisban vannak}$$

1. Hullámparaméterek:

a, Terjedési együttható: $\gamma = \alpha + j \cdot \beta = \alpha + j\beta$

$\gamma = j \cdot \beta$: tisztán képzetes

$$\gamma = \sqrt{j \cdot \omega \cdot \mu(\sigma + j \cdot \omega \varepsilon)} = \sqrt{j^2 \omega^2 \mu \varepsilon} = j \cdot \omega \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon} = j \cdot \beta$$

Tehát $\beta = \omega \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon}$

b, Hullámimpedancia: → a közeget jellemzi
→ az elektromos és mágneses térerősség közti kapcsolatot.

$$Z_0 = \frac{E^+}{H^+} = -\frac{E^-}{H^-}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \underbrace{\sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}}_{\mu_r = 1} \cdot \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \frac{\eta}{\sqrt{\varepsilon_r}}$$

ahol: η: éta $= \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi\ \Omega \cong 377\ \Omega$

↳ szabadtéri hullámimpedancia (vákuumban)

2. Fázissebesség:

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}}}_{\mu_r = 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}$$

3. Hullámhossz:

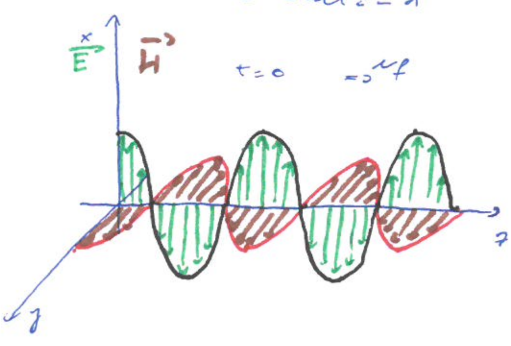
$$\lambda = \frac{v_f}{f} = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r} \cdot f}$$

4. Szemléltetés:

$$E_x(z,t) = E_0 \cdot \cos\left[\omega \cdot \left(t - \frac{\beta}{\omega} \cdot z\right)\right] \text{ → helytől függő késleltetés}$$

$$H_y(z,t) = \frac{E_0}{Z_0} \cdot \cos\left[\omega \cdot \left(t - \frac{\beta}{\omega} \cdot z\right)\right]$$

↳ azonos fázisban vannak
↳ haladó hullám



xz síkban haladó
yz síkban haladó

L1. Ismertesse, hogy miként terjed az energia a síkhullámban! Vezesse le és értelmezze a komplex Poynting-vektort!

1. Síkhullám: -> Az elektromágneses hullám energiát szállít.
-> $\alpha = 0$
-> egyirányú hullámterjedés van.

$$\left.\begin{array}{l}\bar{E}_x(z) = \bar{E}^+ \cdot e^{-j\beta z} = |\bar{E}^+| \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{-j\beta z} \\ \bar{H}_y(z) = \bar{H}^+ \cdot e^{-j\beta z} = |\bar{H}^+| \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{-j\beta z}\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{skalárisan vannak} \\ \rightarrow \bar{H}^+ = \frac{\bar{E}^+}{Z_0}\end{array}$$

↳ $E_x(z,t) = |\bar{E}^+| \cdot \cos(\omega t - \beta z + \varphi)$

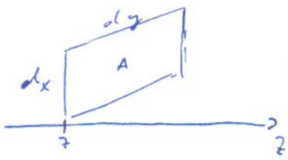
↳ $H_y(z,t) = |\bar{H}^+| \cdot \cos(\omega t - \beta z + \varphi)$

2. Poynting-vektor: $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \left[\frac{V}{m} \cdot \frac{A}{m} = \frac{W}{m^2}\right]$

↳ a Poynting-vektor a teljesítmény áramlási sűrűségét jelenti

↳ meghatározza a térben szállított energia fluxussűrűségét és irányát.

↳ a vektor az irányára merőleges felületegységen időegység (~~idő~~) alatt átáramló energiát adja meg.



-> $dx \cdot dy$ felületen a z helyen.
-> $\vec{S}$ iránya megegyezik a terjedés irányával.

a) Időfüggvénye:

$$\vec{S}(t) = \vec{E}(t) \times \vec{H}(t) = (E_x(z,t) \cdot \vec{e}_x) \times (H_y(z,t) \cdot \vec{e}_y) = S_z(z,t) \cdot \vec{e}_z$$

$$S_z(z,t) = |\bar{E}^+| \cdot |\bar{H}^+| \cdot \cos^2(\omega t - \beta z + \varphi) = \frac{1}{2}|\bar{E}^+| \cdot |\bar{H}^+| + \frac{1}{2}|\bar{E}^+| |\bar{H}^+| \cdot \cos(2\omega t - 2\beta z + 2\varphi)$$

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}$$

$$S_z(z,t) = E_x(z,t) \cdot \vec{e}_x \times H_y(z,t) \cdot \vec{e}_y$$

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z$$

Továbbá $\bar{H}^+ = \frac{\bar{E}^+}{Z_0}$ továbbá írható:

$$S_z(z,t) = E^+ \cdot \frac{E^+}{Z_0} \cdot \frac{1}{2} + E^+ \cdot \frac{E^+}{Z_0} \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos(2\omega t - 2\beta z + 2\varphi)$$

$$S_z(z,t) = \frac{E^{+2}}{2Z_0} + \frac{E^{+2}}{2Z_0} \cdot \cos(2\omega t - 2\beta z + 2\varphi)$$

b) Számítható-e közvetlenül a komplex amplitúdókkal?

$$S_{átl}(z) = \frac{1}{2}\bar{E}_x(z) \cdot \bar{H}_y^*(z) = \frac{1}{2}|\bar{E}^+| \cdot \cancel{e^{j\varphi}} \cdot \cancel{e^{-j\beta z}} \cdot |\bar{H}^+| \cdot \cancel{e^{-j\varphi}} \cdot \cancel{e^{j\beta z}} = \frac{1}{2}|\bar{E}^+| \cdot |\bar{H}^+|$$

↳ igen

Innen következik: $S_{átl}(z) \triangleq \frac{1}{T} \cdot \int_0^T S_z(z,t)\,dt = \frac{1}{2}|\bar{E}^+| \cdot |\bar{H}^+|$

c) Komplex Poynting-vektor:

$$\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{E} \times \vec{H}^*$$

-> rendezői komplexek
-> valós és képzetes része is vektor

időbeli átlagolás miatt

ahol: $\vec{E} = \bar{E}_x \cdot \vec{e}_x + \bar{E}_y \cdot \vec{e}_y + \bar{E}_z \cdot \vec{e}_z$

Értelmezése:

$$P + j \cdot Q = \oint_A \vec{S}\, d\vec{A}$$

Olyan mennyiség, melynek egy zárt felületre integrálva megkapható az átadott komplex (látszólagos) teljesítmény.

3, Hatásos teljesítmény:

$$P = \mathrm{Re}\left\{ \oint_A \vec{S}\, d\vec{A} \right\}$$

II. Ismertesse a síkhullám viselkedését vezető anyagban! Térjen ki a hullámparaméterek számítására, valamint a behatolási mélység fogalmára! Hogyan alkalmazható ez a jelenség nagyfrekvenciás terek árnyékolására?

Jó vezetőnek olyan közeget nevezünk, ahol a vezetési áram sok nagyságrenddel meghaladja az eltolási áramot, ezért: $|j\omega\varepsilon| << \sigma$. Ezt kvázistacionárius közelítésnek.

1. Hullámparaméterek:

a) A terjedési együttható: lesz valós része is, így csillapítva halad a hullám.

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)} \cong \sqrt{j\omega\mu\sigma} = \frac{1+j}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\omega\mu\sigma} = (1+j)\underbrace{\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}}_{\frac{1}{\delta}} = (1+j)\frac{1}{\delta}$$

δ: behatolási mélység

b) Behatolási mélység: (szkinmélység)

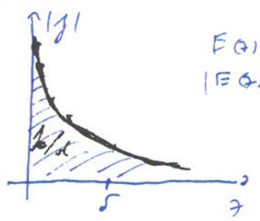
↳ frekvencia függő mennyiség, mely megadja, hogy kell-e foglalkozni a skin-hatással.

↳ A levegőből jó vezetőképességű féltérre merőlegesen síkhullám esik be. A veszteség szempontjából a végtelen vezető féltér úgy helyettesíthető, mintha a felszíni δ vastag rétegben egyenletesen oszlana el a teljes áram, mélyebben pedig nem folyna.

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu\sigma}} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = \frac{a}{\sqrt{f}} \rightarrow \text{anyagjellemző.}$$

$$\alpha = \frac{1}{\delta} = \beta \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\delta} + j\frac{1}{\delta}$$

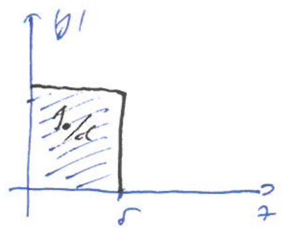
A behatolási mélység nem egyenlő azzal a távolsággal, amíg a hullám behatol a vezetőbe.



$E(z) = E^+ \cdot e^{-\gamma z}$

$|E(z)| = |E_0^+| \cdot e^{-\frac{z}{\delta}}$

$\Rightarrow$



Ugyanakkora a görbe alatti terület → veszteség szempontjából számolható úgy, mintha δ keresztmetszetben egyenletesen folyna.

c) Hullámimpedancia:

$$Z = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}} \cong \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} = \frac{1+j}{\sqrt{2}\sigma} \cdot \sqrt{\omega\mu\sigma} = \frac{1+j}{\sigma\delta} = \frac{\gamma}{\sigma}$$

Jó vezetőre a frekvenciafüggetlen és megegyezik egyenáramú értékével.

2. Alkalmazás:

↳ A jó vezető anyagok fémek, azon tulajdonságát, hogy bennük az elektromágneses hullámok intenzitása igen gyorsan csökken, felhasználhatjuk árnyékolásra.

Az árnyékolás egy térrész elszigetelése az elektromágneses hatásoktól.

⇓

Ennek lehetséges megoldása az árnyékolandó térfogatot körülvenni jó vezető fémlemezzel.

↳ A töltéseknek nincs idejük elmozdulni olyan mértékben ami töltésszétválasztást okozna. (nagy frekvencia)

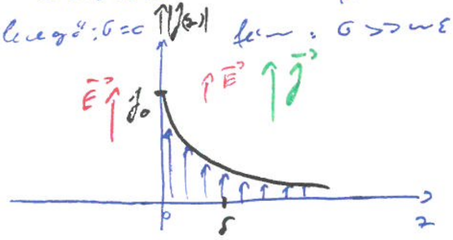
↳ Nagyobb frekvencia → nagyobb nagyfrekvenciás ellenállás

↳ Gyakorlatilag 5δ távolságban már elhanyagolható a hullámterjedés,

I III. Ismertesse az áramkiszorítás jelenségét, a váltakozó áramú ellenállás fogalmát és közelítő számítását hengeres vezetőre!

Váltakozó áram esetén nagy frekvencián a töltéseknek nincs idejük rendeződni, ezért az áramsűrűség a vezető felületétől a belseje felé exponenciálisan csökkenő eloszlású. (Vezető felületén nagyobb → befelé csökken)

levegő: $\sigma = 0$ fém: $\sigma \gg \omega\varepsilon$



$$E(z) = E^{+} \cdot e^{-\gamma z}$$

$$J(z) = \sigma \cdot E(z) = \sigma \cdot E^{+} \cdot e^{-\frac{z}{\delta}} \cdot e^{-j\frac{z}{\delta}}$$

$$|J(z)| = \underbrace{\sigma |E^{+}|}_{|J_0|} \cdot e^{-\frac{z}{\delta}} \cdot 1$$

$$|J(z)| = |J_0| \cdot e^{-\frac{z}{\delta}}$$

$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 2\pi\delta \cong 6{,}28\,\delta$

$\frac{|J(z)|}{|J_0|} \approx 0$ ha $z > 5\delta$

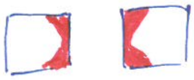
} „minden hullám" egy hullám sem fér bele a nagy csillapítás miatt.

1. Áramkiszorítás:

Áramkiszorításnál ott folyik a legnagyobb áram, ahol a szigetelőből a vezetőbe a legnagyobb teljesítmény áramlik.

(Kiszorítás: akkor: nem használja ki a teljes keresztmetszetet.)

↳ közelségi hatás (proximity):  : egymáshoz közelebb.

↳ saroleffektus: 

2. Váltakozó áramú ellenállás:

Ha egy hengeres vezető vastagsága elég nagy ($d \gg \delta$), akkor váltakozó áramú ellenállása számítható egy δ vastagságú henger ellenállásaként.

Veszteségek:

$$P + j \cdot Q = \tfrac{1}{2} Z \cdot |I_0|^2 \quad : \text{áramköri modell}$$

$$P + j \cdot Q = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{l}{d\delta} \cdot |I_0|^2 \cdot (1+j) \quad : \text{térelméleti modell.}$$

$$Z = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{l}{d\delta} \cdot (1+j) = R + j \cdot X$$

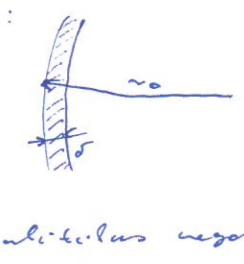
$R \overset{\Downarrow}{=} \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{l}{d \cdot \delta}$ Veszteség szempontjából olyan, mintha az áram δ keresztmetszeten folyna homogén kitöltési térben.

$$R = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{l}{d} \cdot \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} \qquad L_e = \frac{X}{\omega} = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{l}{d} \cdot \sqrt{\frac{\mu\sigma}{2\omega}}$$

→ Ha $\delta > r_0$: szkin hatás elhanyagolható

↳ egyenáramú eset: $R' \cong \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{r_0^2 \pi}$

→ Ha $r_0 \gg \delta$:



Penge síkot közelítő lokálisan.

↳ síkon történő lecsengés modellezése

$R' = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{2 r_0 \pi \delta}$

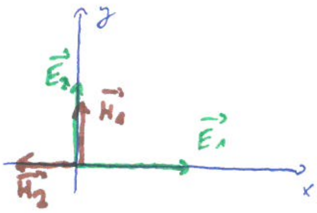
→ $\delta \approx r$: – analitikus megoldás (Bessel)

– numerikus számítás.

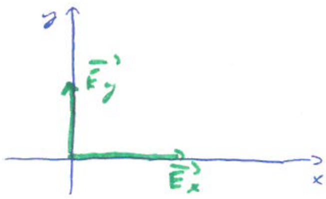
IV. Ismertesse a polarizáció fogalmát síkhullámra vonatkozóan! Általánosítható-e itt a távvezeték analógia?

Adott két síkhullám, mely azonos irányba terjed. Kérdés, hogy milyen irányban mozog az eredő?

Két síkhullám a $z=0$ síkban:



Tekintsük csak az elektromos teret:



Milyen pályát ír le az eredő $\vec{E}$ végpontja?

$$z=0: \quad \left.\begin{aligned} E_x(t) &= E_{x0}\cdot\cos(\omega t) \\ E_y(t) &= E_{y0}\cdot\cos(\omega t+\varphi)\end{aligned}\right\}\ \vec{E}=?$$

az eredő: $\vec{E} = E_x\cdot\vec{e_x} + E_y\cdot\vec{e_y}$

Az eredő levezetése:

$$\cos(\omega t) = \frac{E_x}{E_{x0}}$$

$$\sin(\omega t) = \sqrt{1-\left(\frac{E_x}{E_{x0}}\right)^2}$$

$$\cos(\omega t+\varphi) = \cos(\omega t)\cos(\varphi) - \sin(\omega t)\cdot\sin(\varphi) = \frac{E_y}{E_{y0}}$$

Tehát:

$$\frac{E_y}{E_{y0}} = \frac{E_x}{E_{x0}}\cdot\cos(\varphi) - \sqrt{1-\left(\frac{E_x}{E_{x0}}\right)^2}\cdot\sin(\varphi)$$

$$\frac{E_y}{E_{y0}} - \frac{E_x}{E_{x0}}\cos(\varphi) = -\sqrt{1-\left(\frac{E_x}{E_{x0}}\right)^2}\cdot\sin(\varphi)$$

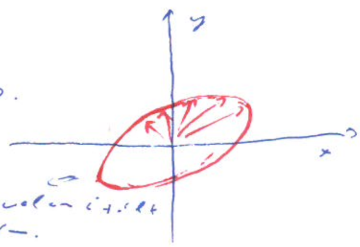
$\downarrow ()^2$

$$\left(\frac{E_y}{E_{y0}}\right)^2 - 2\cdot\frac{E_x}{E_{x0}}\cdot\frac{E_y}{E_{y0}}\cdot\cos(\varphi) + \left(\frac{E_x}{E_{x0}}\cos(\varphi)\right)^2 = \left(1-\left(\frac{E_x}{E_{x0}}\right)^2\right)\cdot\sin^2(\varphi)$$

Innen az ellipszis egyenlete:

$$\frac{E_x^2}{E_{x0}^2} + \frac{E_y^2}{E_{y0}^2} - 2\frac{E_x}{E_{x0}}\frac{E_y}{E_{y0}}\cos(\varphi) = \sin^2(\varphi)$$

Ez egy általános helyzetű, origó középpontú ellipszis.



1, Polarizáció fajtái:

a, Általános eset:

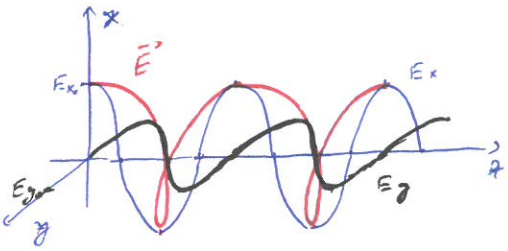
i, Elliptikus polarizáció:

Két, egymásra merőleges fázisban eltolt, azonos irányban haladó szinuszos síkhullám eredője olyan hullám, amelyben E forog és hossza is változik: elliptikus pályát ír le.

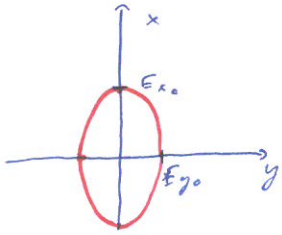
$E_x \perp E_y$; $|E_{x0}| \neq |E_{y0}|$; $\varphi = 90° = \frac{\pi}{2}$

$$\frac{E_x^2}{E_{x0}^2} + \frac{E_y^2}{E_{y0}^2} = 1$$

Képe:



$\Rightarrow$



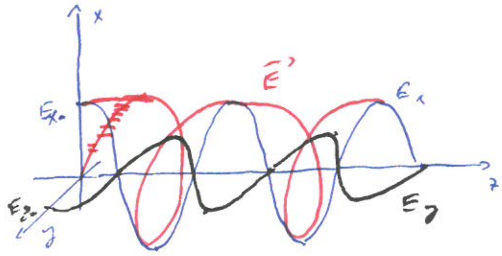
c, Speciális esetek:

i, Cirkulárisan poláros:

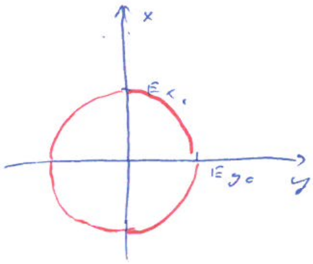
A forgó elektromos vektor a hosszát nem változtatja. Ekkor végigfutja a terjedés során állandó sugarú (cirkuláris) csavarvonalat ír le.

$E_x \perp E_y$; $|E_{x0}| = |E_{y0}|$; $\varphi = \pm\frac{\pi}{2} \Rightarrow E_x^2 + E_y^2 = E_0^2$ (kör)

Képe:



$\Rightarrow$

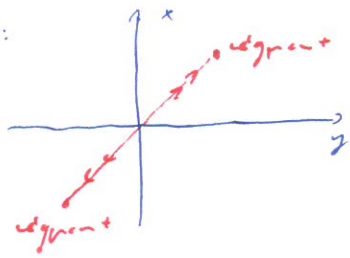


ii, Lineárisan poláros:

A fenti egyenlet teljes négyzetté alakítható, nincs fáziskülönbség.

$E_x \perp E_y$; $|E_{x0}| = |E_{y0}|$; $\varphi = \pi \Rightarrow \frac{E_x}{E_{x0}} + \frac{E_y}{E_{y0}} = 0$: egyenes.

Képe:



$\Rightarrow$ Bármilyen elliptikusan polarizált síkhullám felbontható:

→ két lineáris

→ két cirkuláris

→ egy lineáris és egy cirkuláris síkhullám szuperpozíciójára

2, Távvezeték analógia:

Távvezeték analógia addig alkalmazható, amíg a síkhullám lineárisan polarizált és merőlegesen esik be a közeghatárra, mert csak ekkor írható fel az eredő vektor, mint egy haladó és visszaverődő hullám eredője.

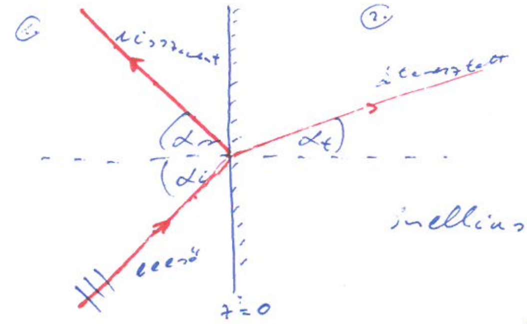
Nem lineáris polarizáció esetén felbontható két lineárisan polarizált eredőjére és TV analógiaként használható, mint két párhuzamosan kapcsolt távvezeték.

IV. Ismertesse a síkhullám viselkedését anyaghatáron, különös tekintettel a merőleges beesésre. Alkalmazható-e itt a távvezetékes analógia?

1. Általános eset: „ferde beesés"

Ferde beesés esetén a hullám felbontható egy, a határfelületre merőlegesen haladó és egy azzal párhuzamosan haladó hullámra. A folytonossági feltételek miatt, a felülettel párhuzamosan haladó komponens fázissebessége azonos a két közegben.

$\sigma_1 = \sigma_2 = 0$
$\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$



i: incident: beeső
r: reflected: visszavert
t: transmitted: áteresztett

Snellius–Descartes: $\alpha_r = \alpha_i$

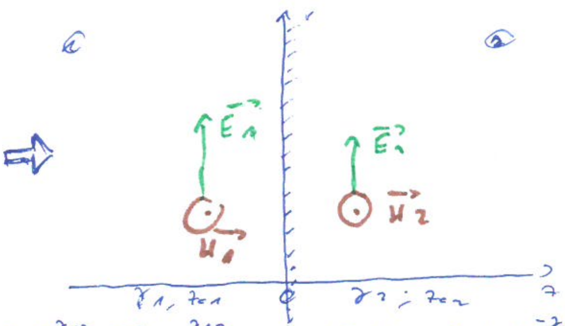
$$\frac{\sin(\alpha_t)}{\sin(\alpha_i)} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}} = \frac{n_1}{n_2} \left(= \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1}\right)$$

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{n_2}{n_1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = n_{21}$$

További törvényeket a Fresnel-képletek írják le.

2. Speciális eset: „merőleges beesés"

Merőleges beesés esetén a síkhullám visszaverődése és behatolása a távvezeték-modell és az impedancia alkalmazásával tárgyalható. A távvezetékes analógia akkor használható, ha a hullám lineárisan polarizált.
↳ az elliptikus felbontható két lineárisra → két párhuzamos távvezeték



Ø feltétel → nincs reflexió ($E_2^- = 0$)

További nincs reflexió az első közegben, ha a reflexiós tényező 0. Ehhez az első közeg felől a második felé a bemeneti impedancia egyezzen meg az első közeg hullámimpedanciájával.

$$E_1(z) = E_1^+ \cdot e^{-\gamma_1 z} + E_1^- \cdot e^{\gamma_1 z} \qquad E_2(z) = E_2^+ \cdot e^{-\gamma_2 z}$$

$$H_1(z) = \frac{E_1^+}{Z_{01}} \cdot e^{-\gamma_1 z} - \frac{E_1^-}{Z_{01}} \cdot e^{\gamma_1 z} \qquad H_2(z) = \frac{E_2^+}{Z_{02}} \cdot e^{-\gamma_2 z}$$

ahol: $\gamma_1 = \sqrt{j\omega\mu_1(\sigma_1 + j\omega\varepsilon_1)}$

$Z_{01} = \sqrt{\frac{j\omega\mu_1}{\sigma_1 + j\omega\varepsilon_1}}$

Nincs reflektált komponens ($E_2^- = 0$).

A kettőt a közeghatáron érvényes határfeltételek kötik össze.

3. Határfeltételek: H_t és E_t folytonos (a H akkor, ha nincsenek felületi áramok)

$z = 0$: $E_1(0) = E_2(0) \rightarrow E_1^+ + E_1^- = E_2^+ = E_2$

$H_1(0) = H_2(0) \rightarrow \frac{E_1^+}{Z_{01}} - \frac{E_1^-}{Z_{01}} = \frac{E_2^+}{Z_{02}} = H_2^+ (= H_2)$

} 2 egyenlet, de 3 ismeretlen (valamelyik adott lesz..)

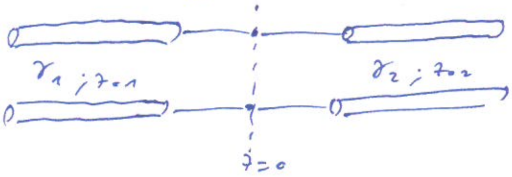
a, Reflexiós tényező: $r_{12} \triangleq \frac{E_1^-}{E_1^+} = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}}$

b, Transzmissziós tényező: $\tau_{12} \triangleq \frac{E_2^+}{E_1^+} = \frac{2 Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}}$

} $r_{12} + \tau_{12} = 1$

4. Távvezetéki analógia:

Ha különböző tulajdonságú térrészeket elválasztó felületek merőlegesek a terjedési irányra, akkor E és H vektorok az elválasztó síkkal, tehát a tangenciális komponensek folytonossága és a távvezetékmodell folytonossági feltételei megfeleltethetők.



a, A második (2) térrész fém:

$\sigma = \infty \Rightarrow Z_{02} = 0 \Rightarrow$ TV rövidzár

↳ $r = -1$ → teljes reflexió → elektromos falnak felel meg.

↳ $Z_{02} = \sqrt{\dfrac{j\omega\mu_2}{\sigma_2 + j\omega\varepsilon_2}} = 0$

① térrészben: állóhullám lesz → elektromos fal.

② térrész belsejében felületi áram folyik.

b, A második térrészben (2) $\mu_2 = \infty$

$\mu_2 = \infty \rightarrow Z_{02} = \sqrt{\dfrac{j\omega\mu_2}{\sigma_2 + j\omega\varepsilon_2}} = \infty \Rightarrow$ TV szakadás

↳ $r = 1$

① térrészben állóhullám: → mágneses fal.

c, A második térrész (2) szigetelő (ideális):

$\sigma_2 = 0 \Rightarrow v = \dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}$, ha $\mu_r = 1 \rightarrow \sqrt{\varepsilon_r} = n$

$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon} \rightarrow \beta = \dfrac{\omega}{v}$

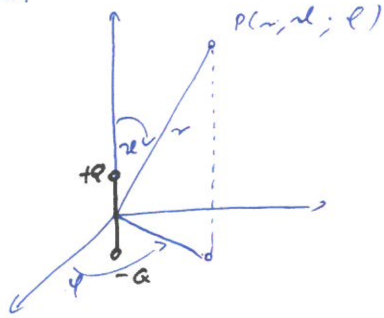
$Z_0 = \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}$

$\dfrac{\omega}{\beta} = v = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_r\underbrace{\mu_r}_{1}}} \cdot \underbrace{\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}}_{c} = \dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \dfrac{c}{n}$

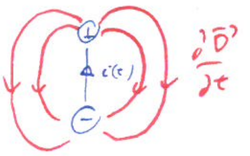
[VI]. Ismertesse a Hertz-dipólus fogalmát, valamint elektromos és mágneses terének a főbb jellemzőit. Mit jelent a közeltér és a távoltér?

1. Hertz-dipólus:

↳ Rövid, l hosszúságú vezetődarab, amelyen tiszta ~~sz~~ szinuszos időfüggésű áram folyik, amelynek értéke a vezető mentén állandó. Ez akkor lehetséges, ha a vezető hossza sokkal kisebb az adott frekvenciához tartozó hullámhossznál, ($l << \lambda$). Gömbi koordinátarendszerben tárgyaljuk. A dipólus legyen az origóban úgy, hogy az antenna tengelyével elevációs szög irányába mutasson. Az elrendezés hengerszimmetrikus, tehát φ-től független.

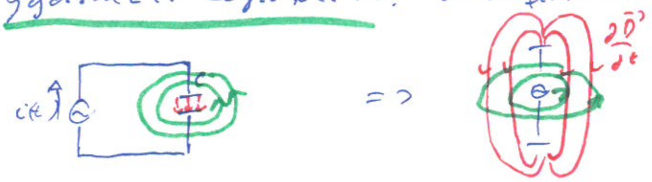


a, Elméleti megközelítés:



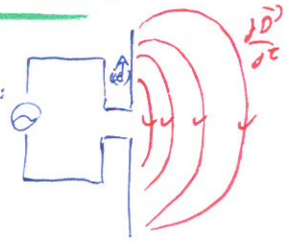
$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ => eltolási áram segítségével záródik az áram útja
=> a töltés oda-vissza „folyik"
=> a töltésváltozás hatására a két vég között áram folyik.

b, Gyakorlati megközelítés: áramforrással táplált kondenzátor.



c, Általánosan:

középen táplált:



A Hertz-dipólus egy olyan rövid antenna, ahol az antenna árama a teljes hosszában állandó, nincsenek közben leválások. ↳ $l << \frac{c}{f} = \lambda$ miatt.

$i_z(t) = Re\{\bar{I}_z \cdot e^{j\omega t}\}$

$\bar{I}(z) = I = I_0 \cdot e^{j\alpha}$ konstans

Valóságban nem létezik, de Hertz-dipólusokból tetszőleges áraméloszlású antenna összerakható.

=> A tér kérdése részre osztható aszerint, hogy az elektromos és a mágneses térerősség milyen gyorsan tűnik el r növekedésével. Az $\frac{1}{r^3}$ és $\frac{1}{r^2}$ szerint eltűnő úgynevezett sztatikus és indukciós tagnak gyakorlati jelentősége nincs, mivel hatásos teljesítményt nem szállít. Ezzel szemben az $\frac{1}{r}$ szerint eltűnő távoltéri hatásos teljesítményt szállít. A távoltérben az elektromos térerősségnek csak ϑ, a mágneses térerősségnek csak φ irányú komponense van.

Tehát $\frac{1}{r^3}$ és $\frac{1}{r^2}$-es tagok: közeltér; $\frac{1}{r}$-es tag: távoltér.

2. Távoltér: $\frac{1}{r^2} ; \frac{1}{r^3} \to 0$

a, $\bar{E}_\vartheta = \frac{\bar{I} \cdot l}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{j\omega}{c^2 r} \cdot \sin(\vartheta) \cdot e^{-j\omega\frac{r}{c}}$

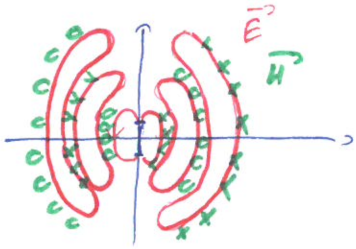
$\bar{H}_\varphi = \frac{\bar{I} \cdot l}{4\pi} \cdot \frac{j\omega}{c \cdot r} \cdot \sin(\vartheta) \cdot e^{-j\omega\frac{r}{c}}$

b, Időfüggvény: $\Downarrow$ legyen $i(t) = I_0 \cdot \sin(\omega t) \to \bar{I} = -j \cdot I_0$

$E_\vartheta(r, \vartheta, t) = \frac{I_0 \cdot l \cdot \omega}{4\pi\varepsilon c^2} \cdot \frac{\sin\vartheta}{r} \cdot \cos(\omega t - \beta r)$; $\beta = \frac{\omega}{c}$

$H_\varphi(r, \vartheta, t) = \frac{I_0 \cdot l \cdot \omega}{4\pi c} \cdot \frac{\sin\vartheta}{r} \cdot \cos(\omega t - \beta r)$

c, Teljes tér:



$\sim \frac{1}{r^3} \to$ kapacitív közeltér } dipólusként viselkedik
$\sim \frac{1}{r^2} \to$ induktív közeltér } befolyásolja az antenna impedanciáját.

$\sim \frac{1}{r} \to$ távoltér: sugárzási tér

LVII. Ismertesse a Hertz-oszcillátor távoltérének jellemzőit! Térjen ki a teljesítmény-áramlásra is!

$$H_\varphi = \frac{\bar{I}\,l}{4\pi} \cdot \frac{j\omega}{c\,r} \cdot \sin(\vartheta) \cdot e^{-j\omega\frac{r}{c}}$$

$$E_\vartheta = \frac{\bar{I}\,l}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{j\omega}{c^2 r} \cdot \sin(\vartheta) \cdot e^{-j\omega\frac{r}{c}}$$

→ $\frac{1}{r}$: sugárirány

→ $\sin(\vartheta)$: elevációs szög szerinti változás.

Időfüggvény: $i(t) = I_0 \sin(\omega t)$ → $\bar{I} = -j \cdot I_0$

$$H_\varphi(r, \vartheta, t) = \frac{I_0 \cdot l \cdot \omega}{4\pi c} \cdot \frac{\sin\vartheta}{r} \cdot \cos(\omega t - \beta r)$$

$$E_\vartheta(r, \vartheta, t) = \frac{I_0 \cdot l \cdot \omega}{4\pi \varepsilon_0 c^2} \cdot \frac{\sin\vartheta}{r} \cdot \cos(\omega t - \beta r)$$

1. Tulajdonságok:

→ az antenna távolterében a terjedést lokálisan síkhullámnak tekinthetjük.

↳ az elektromos és mágneses tér merőleges egymásra és a haladási irányra:

$\vec{E} \perp \vec{H}$; $\vec{E} \perp \vec{e_r}$; $\vec{H} \perp \vec{e_r}$ és $\frac{\sin\vartheta}{r}$ kis környezetben konstans.

TEM terjedés

↳ E és H azonos fázisúak.

↳ helyfüggés: $\frac{\sin\vartheta}{r}$

↳ $\frac{E_\vartheta}{H_\varphi} = \frac{1}{\varepsilon_0 c} = \frac{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}{\varepsilon_0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = Z_0 \quad (\eta)$

↳ a térerősségeltérés $\frac{1}{r}$-rel arányos

↳ a térerősségvektorok közti viszonyt a hullámellenállás.

2. Teljesítményáramlás:

A távoltér szállít hatásos teljesítményt.

Komplex Poynting-vektor:

$$\vec{\bar{S}} = \frac{1}{2}\vec{\bar{E}} \times \vec{\bar{H}}^* = \frac{1}{2}\left(\bar{E}_\vartheta \cdot \vec{e_\vartheta}\right) \times \left(\bar{H}_\varphi \cdot \vec{e_\varphi}\right) \qquad \vec{e_\vartheta} \times \vec{e_\varphi} = \vec{e_r}$$

$\vec{\bar{S}} = \bar{S}_r \cdot \vec{e_r}$, a teljesítmény a terjedési irányában áramlik.

$$\bar{S}_r(r, \vartheta) = \frac{1}{2}\underbrace{(Z_0 \cdot \bar{H}_\varphi)}_{\bar{E}_\vartheta} \cdot \bar{H}_\varphi^* = \frac{1}{2} Z_0 \cdot |\bar{H}_\varphi|^2$$

$$\bar{S}_r(r, \vartheta) = \frac{|\bar{I}|^2 \cdot \omega^2 \cdot l^2 \cdot Z_0}{32\pi^2 \cdot c^2} \cdot \frac{\sin^2(\vartheta)}{r^2}$$

Észrevételek: → tisztán valós: teljes térben csak hatásos teljesítmény terjed!

→ radiális (sugár) irányú

→ $\frac{\sin^2(\vartheta)}{r^2}$ helyfüggésű

↳ tengely irányába nem sugároz

↳ maximális teljesítményt ~~[illegible]~~ középponttól sugároz ki ($\vartheta = 90°$ nál).

LVIII. Ismertesse az alapvető antennajellemzőket (iránykarakterisztika, sugárzási ellenállás, irányhatás, antennanyereség, hatásos felület), és adja meg ezek értékét a Hertz-dipólusra!

1, Iránykarakterisztika:

-> Más néven sugárzási karakterisztika.

-> A távolteret jellemzi.

-> Relatív mennyiség az adott irányban rögzített sugárra vett amplitúdót viszonyítjuk a maximális rögzített sugarú amplitúdóhoz.

$$h(\vartheta,\varphi) = \frac{E(r=R,\vartheta,\varphi)}{\max\limits_{(\vartheta',\varphi')}\left[E(r=R,\vartheta',\varphi')\right]}$$

R: a távoltérben

-> horizontális: $\vartheta=\frac{\pi}{2}$

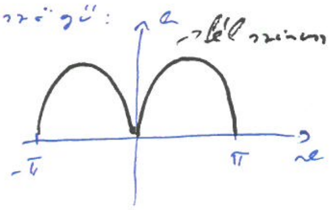
-> vertikális: φ = konstans ($\frac{\partial}{\partial\varphi}=0$)

$$\hookrightarrow h(\vartheta)=\frac{E(r=R;\vartheta;\varphi=\varphi_0)}{\max\limits_{\vartheta'} E(r=R;\vartheta';\varphi=\varphi_0)}$$

-> Hertz-dipólusra: $h(\vartheta)=\frac{E(R,\vartheta)}{E(R,\frac{\pi}{2})}=|\sin(\vartheta)|$

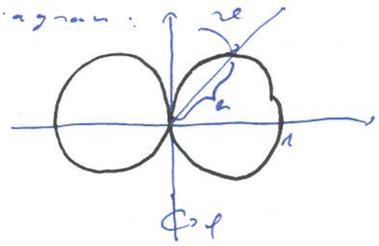
-> Ábrázolása:

i, Derékszögű:



Maximális sugárzás a felezősíkban van.

ii, Polárdiagram:



-> Ha izotróp antenna: minden irányba egyforma intenzitással sugároz, ám a valóságos antennák anizotrópok.

-> Az antenna iránykarakterisztikája megmutatja, hogy milyen irányba mekkora intenzitással sugároz. A sugárzási karakterisztikát két egymásra merőleges síkban adják meg, a karakterisztika az adott síkba eső térerősségű pontokat összekötő görbe.

2, Sugárzási ellenállás: R_S

-> A teljesítményt szolgáltató generátor számára az antenna a sugárzási ellenállással megegyező ellenállásnak látszik. A generátor „nem tudja", hogy a teljesítmény nem disszipálódik, hanem a szabad térbe távozik.

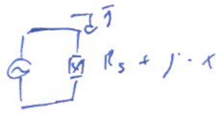
-> Kisugárzott hatásos teljesítmény:

$$P_S = \mathrm{Re}\left\{\oint_{|r|=R} \vec{S}\, d\vec{A}\right\}$$

R sugarú gömb, melynek centruma az antenna

$\hookrightarrow$ Hertz-dipólusra: $P_S = \frac{I^2\cdot \ell^2\cdot\beta^2\cdot Z_0}{12\pi}$

-> Hálózati ekvivalens:



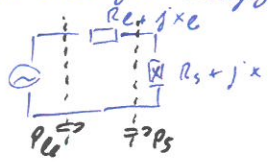
$$P_S=\frac{1}{2}|I|^2\cdot R_S$$

$$R_S=\frac{2P_S}{|I|^2}$$

$\hookrightarrow$ Hertz-dipólusra: $R_S=\frac{\beta^2\cdot\ell^2\cdot \overbrace{Z_0}^{120\pi}}{6\pi}=80\pi^2\cdot\left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2\Omega$

3. Irányhatás / antennanyereség: D/G

→ Az antenna erősítését jellemző mennyiség, amit a Poynting-vektor maximális és átlagos nagyságának hányadosaként definiálunk.



Irányhatás: $D = \frac{S_{max}}{S_{átl,s}} = \frac{\max_{\vartheta,\varphi} S(r=R;\vartheta;\varphi)}{\frac{P_s}{4R^2\pi}}$ P_s: kisugárzott telj.
(directivity)

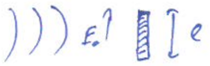
Nyereség: $G = \frac{S_{max}}{S_{átl,be}} = \frac{\max_{\vartheta,\varphi} S(R;\vartheta;\varphi)}{\frac{P_{be}}{4R^2\pi}}$ [dB] P_{be}: betáplált telj.
(gain)

→ Hertz-dipólusra: $D = \frac{3}{2} = 1{,}5$ → gyengén irányított antenna.

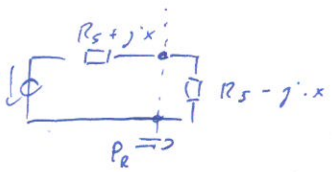
$G \approx D$

→ A betáplált teljesítmény a kisugárzotton kívül az antenna veszteségeit is tartalmazza.
→ Jó vezetőképesség esetén $G \approx D$, tehát, ha kicsi a veszteség.

4. Hatásos felület: A_e



$u_i = E_0 \cdot l \Rightarrow$



Teljesítményillesztés: $P_R = \frac{1}{2}\frac{(E_0 \cdot l)^2}{4R_s}$

→ A vevőantennából kivehető maximális teljesítménynek és a beeső teljesítménynek a hányadosa:

$A = \frac{P_R(\text{illesztett})}{S_0}$ S_0: Poynting-vektor átlagértéke távoltérben.

→ Hertz-dipólusra: $S_0 = \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{120\pi\,\Omega}$; $R_s = 80\pi^2\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2\Omega$; $P_R = \frac{1}{2}\frac{(E_0 \cdot l)^2}{4R_s}$

⇓

$A_{HD} = \frac{3\lambda^2}{8\pi}$

→ Reciprocitás: egy ugyanazon antennát használhatunk adó- és vevőantennaként is, a karakterisztika ugyanaz marad.

↳ emiatt: A és D (ill. G) aránya állandó

↳ Hertz-dipólusra: $\frac{A}{D} = \frac{\lambda^2}{4\pi}$

Legfontosabb részletek:

Maxwell-egyenletek teljes rendszere (differenciális alak): (M)

1. $\mathrm{rot}\, H = J$
2. $\mathrm{rot}\, E = -\dfrac{dB}{dt}$
3. $\mathrm{div}\, B = 0$
4. $\mathrm{div}\, D = \rho$
5. $D = \varepsilon \cdot E$; $B = \mu \cdot H$; $J = \sigma \cdot E$
6. $w = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu \cdot H^2$

H: mágneses térerősség $\left[\frac{A}{m}\right]$
J: felületi áramsűrűség $\left[\frac{A}{m^2}\right]$
E: elektromos térerősség $\left[\frac{V}{m}\right]$
B: mágneses indukció $[T] = \left[\frac{Vs}{m^2}\right]$
D: elektromos eltolás $\left[\frac{C}{m^2}\right] = \left[\frac{As}{m^2}\right]$
ρ: térfogati töltéssűrűség $\left[\frac{As}{m^3}\right] = \left[\frac{C}{m^3}\right]$
ε: permittivitás
μ: $\mu = \mu_0 \mu_r$ mágneses permeabilitás
σ: vezetőképesség $\left[\frac{S}{m}\right]$
w: energiasűrűség $\left[\frac{J}{m^3}\right]$

Az elektrosztatika Maxwell-egyenletei: (E)

1. $\mathrm{rot}\, E = 0$, mivel $\frac{d}{dt} = 0$ (elektromos tér örvénymentes)
2. $\mathrm{div}\, D = \rho$, az elektromos tér forrása a töltés
3. $D = \varepsilon \cdot E$
4. $w = \frac{1}{2} \varepsilon \cdot E^2$
5. $E = -\mathrm{grad}\, \varphi$

A stacionárius áramlási tér Maxwell-egyenletei: (S)

1. $\mathrm{rot}\, E = 0$, örvénymentes a stacionárius áramlási teret leíró elektromos térerősség, nem záródnak önmagukba
2. $\mathrm{div}\, J = 0$, forrásmentes az áramsűrűség: nincs definiált pont ahonnan kiindulnak; csak végigmegy a felületen
3. $J = \sigma \cdot E$, differenciális Ohm-törvény

A stacionárius áramok mágneses terének Maxwell-egyenletei: (MM)

1. $\mathrm{rot}\, H = J$: Ampère-tv.: örvényes a H tér áram körül örvénylik jobbsodrás szerint
2. $\mathrm{div}\, B = 0$: nincs mágneses monopólus, forrásmentes
3. $B = \mu \cdot H$
4. $w_m = \frac{1}{2} \mu H^2$
5. $B = \mathrm{rot}\, A$

Mágneses indukció Maxwell-egyenletei: (MI)

1. $\mathrm{rot}\, H = J$
2. $\mathrm{rot}\, E = -\frac{\partial B}{\partial t}$
3. $\mathrm{div}\, B = 0$
4. $B = \mu \cdot H$
5. $w = \frac{1}{2}\mu H^2$

Távíró egyenletek:

1. $-\frac{\partial u}{\partial x} = R' \cdot i + L' \cdot \frac{di}{dt}$ $\xrightarrow{\text{idealizálva}}$ $-\frac{\partial u}{\partial x} = L' \cdot \frac{\partial i}{\partial t}$
2. $-\frac{\partial i}{\partial x} = G' \cdot u + C' \cdot \frac{du}{dt}$ $\qquad$ $-\frac{\partial i}{\partial x} = C' \cdot \frac{\partial u}{\partial t}$

Hullámegyenlet:

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = L \cdot C \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ $\xrightarrow{v_f = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v_f^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

1. $-\frac{\partial(\bar{U}(x))}{\partial x} = \bar{I}(x) \cdot (R + j\omega L)$
2. $-\frac{\partial(\bar{I}(x))}{\partial x} = \bar{U}(x) \cdot (G + j\omega C)$

Helmholtz-egyenlet:

1. $\frac{\partial^2 \bar{U}(x)}{\partial x^2} = \bar{U}(x) \underbrace{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}_{\gamma^2}$

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$$

↳ fázistényező
↳ csillapítási tényező
↳ hullámterjedési együttható

A Helmholtz-egyenlet megoldásai:

1. $\bar{U}(x) = \bar{U}_0^+ \cdot e^{-\gamma x} + \bar{U}_0^- \cdot e^{\gamma x} = \bar{U}^+(x) + \bar{U}^-(x)$
2. $\bar{I}(x) = \frac{\bar{U}_0^+}{Z_0} \cdot e^{-\gamma x} - \frac{\bar{U}_0^-}{Z_0} \cdot e^{\gamma x} = \bar{I}^+(x) + \bar{I}^-(x) = \bar{I}_0^+ \cdot e^{-\gamma x} + \bar{I}_0^- \cdot e^{\gamma x}$
3. $\bar{Z}_0 \triangleq \frac{\bar{U}^+(x)}{\bar{I}^+(x)} = -\frac{\bar{U}^-(x)}{\bar{I}^-(x)} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$

ahol: $\bar{U}(x)$: telj. fesz. hullám megadja a vezeték mentén bárhol a fesz. komplex csúcsértékét
↳ $\bar{U}^+(x)$: pozitív irányba haladó feszhullám komplex csúcsértéke
↳ $\bar{U}^-(x)$: negatív — " —
↳ $\bar{U}_0^+$: pozitív irányba haladó feszhullám komplex csúcsértéke az x = 0-ban
↳ $\bar{U}_0^-$: negatív — " —
↳ $e^{\gamma x}$: fázis

$\bar{I}(x)$: telj. áramhullám így: két hullám interferenciája
↳ $\bar{I}^+(x)$: pozitív irányba haladó áramhullám komplex csúcsértéke.
↳ $\bar{I}^-(x)$: negatív — " —
↳ $\bar{I}_0^+$: pozitív irányba haladó áramhullám komplex csúcsértéke az x = 0-ban
↳ $\bar{I}_0^-$: negatív — " —

Z_0: hullámimpedancia: távvezetékre jell. mennyiség (konstans a vezeték mentén / TV része)

$Z_0 = \frac{+\text{ irányba haladó feszhullám komplex csúcsértéke}}{+ \text{ — " — áramhullám — " —}} = \frac{\text{negatívban}}{\text{negatívban}}$

Távvezeték paraméterek:

1) **Ideális** $(R;G;\alpha=0)$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\gamma = j\omega\sqrt{L \cdot C} = j \cdot \beta$$

$$\Downarrow$$

$$\beta = \omega \cdot \sqrt{L \cdot C} = \frac{\omega}{v_f}$$

Z_0

γ

Nem ideális

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R+j\omega L}{G+j\omega C}}$$

$$\gamma = \sqrt{(R+j\omega L)(G+j\omega C)}$$

2) $\lambda = \frac{v_f}{f}$ $\quad \beta = \frac{2\pi}{\lambda_g}$ $\quad$ ahol λ_g: vezetett hullámhossz
v_f: fázis sebesség
f: frekvencia

3) $v_f = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}$ $\rightarrow$ légtöltésű: $v_f = \frac{c}{\sqrt{1}} = c$ $\quad \beta = \frac{\omega}{c}$

A tápvezeték olyan közeg ami a hullámokat vezeti, viszont mivel vezetett közeg EM hullámok esetén → szabad térben terjednek. szabadtéri terjedés

Lánc-karakterisztika:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta z) & Z_0 \cdot j \cdot \sin(\beta z) \\ \frac{1}{Z_0} \cdot j \cdot \sin(\beta z) & \cos(\beta z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Bemeneti impedancia:

$$\bar{Z}(z) = Z_0 \cdot \frac{\bar{Z}_2 + j \cdot Z_0 \cdot tg(\beta z)}{Z_0 + j \cdot \bar{Z}_2 \cdot tg(\beta z)} \triangleq \frac{U(z)}{I(z)}$$

Reflexiós tényező:

$$r(z) \triangleq \frac{\bar{U}^-(z)}{\bar{U}^+(z)} = \underbrace{\frac{\bar{U}_0^-}{\bar{U}_0^+}}_{r(z=0)} \cdot e^{-2j\beta z} = r(z=0) \cdot e^{-2j\beta z}$$

$$r(z) = \frac{\bar{Z}(z) - Z_0}{\bar{Z}(z) + Z_0}$$

Hullámegyenletek:

1) Pozitív irányba haladó feszültség hullámok:

$$u^+(x,t) = U_0^+ \cdot e^{-\alpha x} \cdot \cos(\omega t - \beta x)$$

2) Negatív — " — :

$$u^-(x,t) = U_0^- \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos(\omega t + \beta x)$$

3) Pozitív áram:

$$i^+(x,t) = \frac{U_0^+}{Z_0} \cdot e^{-\alpha x} \cdot \cos(\omega t - \beta x - \varphi)$$

4) Negatív áram:

$$i^-(x,t) = \frac{U_0^-}{Z_0} \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos(\omega t + \beta x - \varphi)$$

Hullám – távvezeték analógia:

1. $$v_f = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

2.

Tv	I	U	R	G	L	C	Z_0	γ
EMH	H	E	–	σ	μ	ε	Z_0	γ

Vektoriális hullámegyenlet:

1. $$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

2. $$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

Hullámok Maxwell-egyenletei:

1. $$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

2. $$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

3. $$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

4. $$\operatorname{div} \vec{E} = 0$$

5. $$w = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2$$

Hertz-dipólus:

Elektromos és mágneses térerősség:

1. $$\bar{E}_\vartheta = \frac{\bar{I} \cdot l}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{j\omega}{c^2 r} \sin(\vartheta)\, e^{-j\omega\frac{r}{c}} \longrightarrow E_\vartheta(r,\vartheta,t) = \frac{I_0 \cdot l \cdot \omega}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \cdot \frac{\sin\vartheta}{r} \cos(\omega t - \beta r)$$

2. $$\bar{H}_\varphi = \frac{\bar{I} \cdot l}{4\pi} \frac{j\omega}{c r} \sin(\vartheta) \cdot e^{-j\omega\frac{r}{c}} \longrightarrow H_\varphi(r,\vartheta,t) = \frac{I_0 \cdot l \cdot \omega}{4\pi c} \cdot \frac{\sin\vartheta}{r} \cos(\omega t - \beta r)$$

Poynting-vektor:

3. $$\bar{S}_r(r,\vartheta) = \frac{|\bar{I}|^2 \cdot \omega^2 \cdot l^2 \cdot Z_0}{32\pi^2 c^2} \cdot \frac{\sin^2(\vartheta)}{r^2} = \frac{1}{2}\frac{E^2}{Z_0}$$

↓

Hatásos teljesítmény:

4. $$P_s = \frac{1}{2} I^2 \cdot 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2$$

↓

Sugárzási ellenállás

5. $$R_s = 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \,\Omega$$