Villamosmérnök A3 (2019 ősz) 2. vizsga ZH

Minden feladat 12 pontos, tehát összesen 60 pontot lehet összegyűjteni. Minden feladat esetében szükséges a világos indoklás, nem elég a végeredmény és/vagy a válasz.

1. Oldja meg az $y'' - y' - 2y = \sin t - 3\cos t$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 6$ kezdetiérték-problémát Laplace-transzformáció alkalmazásával!

2. $\int_F (2x, 3y, z)\, df =?$ ahol F az $x^2 + y^2 = 4$ és a $z = 1$ és $z = 3$ határolta henger kifelé irányított határa.

3. $\int_F \operatorname{rot}(x + y, z - x, ze^{z \operatorname{ch} y})\, df =?$, ha F az origó középpontú, R sugarú, kifelé irányított gömbfelületnek a z tengely nemnegatív felére eső része.

4. $0 \neq r \in \mathbb{R}^3$-ra $\operatorname{grad}(\operatorname{div} r|r|^2) =?$

5. (a) Mit nevezünk egy $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ antiszimmetrikus lineáris transzformáció vektorinvariánsának?
Igazak-e a következő állítások?
(b1) Ha $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ folytonos, akkor v-nek van potenciálfüggvénye $\mathbb{R}^2$-n.
Legyen $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mindenütt folytonosan deriválható.
(b2) Ha v minden görbementi integrálja független az integrálási úttól, akkor v potenciálja mindenütt 0.
(b3) Ha van v-nek potenciálja, akkor $\operatorname{rot} v$ minden zárt görbementi integrálja 0.

IMSc-feladat. v, $w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$-re fejezze ki $\operatorname{div}(v \times w)$-t v, w, $\operatorname{rot} v$ és $\operatorname{rot} w$ segítségével!