# A48

2021. november 4., csütörtök 8:04

A48

## A4 Valószínűségszámítás — VIII. EA

dr. Keszthelyi Gabriella
Sztochasztika és Dinamikai rendszerek tanszék

2021. november 4.



## Valváltozók összege

Diszkrét konvolúció, ha $X$, $Y$ független:

$P(X=1 \cap Y=m-1)+P(X=2 \cap Y=m-2)\ldots$

$$P(X+Y=m)=\sum_{k=1}^{m-1} P(X=k \cap Y=m-k)=$$

függetlenek

$$=\sum_{k=1}^{m-1} P(X=k)\cdot P(Y=m-k)$$

Ha nem függetlenek:

szorzatszabály ✓

$$P(X+Y=m)=\sum_{k=0}^{m} P(X+Y=m|Y=k)\cdot P(Y=k)=$$

$$=\sum_{k=0}^{m} P(X+Y=m|X=k)\cdot P(X=k)$$

Teljes valószínűség tétele

## Valváltozók összege

*Példa*
$X \sim Geom(p),\ Y \sim Geom(p)$ *függetlenek.* $P(X = k|X + Y)$?

FELTÉTELES VSZÉSÉG

$$P(X = k|X + Y) = \frac{P(X=k \cap X+Y=m)}{P(X+Y)} = \frac{P(X=k \cap Y=m-k)}{P(X+Y)}$$

$$P(X = k \cap Y = m - k) = P(X = k) \cdot P(Y = m - k) =$$

$$= (1 - p)^{k-1}p \cdot (1 - p)^{m-k-1}p = (1 - p)^{m-2}p^2$$

$$P(X + Y = m) = \sum_{k=1}^{m-1} P(X = k) \cdot P(Y = m - k) =$$

NEGATÍV BINOMIÁLIS $(2, p)$

$$= \sum_{k=1}^{m-1} (1-p)^{m-2}p^2 = (m-1)(1-p)^{m-2}p^2 = \binom{m-1}{2-1}(1 - p)^{m-2}p^2$$

$$P(X = k|X + Y = m) = \frac{(1 - p)^{m-2}p^2}{(m - 1)(1 - p)^{m-2}p^2} = \frac{1}{m - 1}$$

EGYENLETES



## Valváltozók összege

*Példa*
$X \sim Binom(n, p),\ Y \sim Binom(m, p)$ *függetlenek.*
$P(X = i|X + Y) =?$ FELTÉTELES ELOSZLÁS

FELTÉTELES VSZÉSÉG

$$P(X = i|X + Y = k) = \frac{P(X=i \cap X+Y=k)}{P(X+Y=k)} = \frac{P(X=i \cap Y=k-i)}{P(X+Y=k)}$$

FÜGGETLENSÉG

$$P(X + Y = k) = \sum_{i=0}^{k} P(X = i)P(\cancel{X} = k - i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i(1 - p)^{n-i} \binom{m}{k - i} p^{k-i}(1 - p)^{m-k+i} =$$

$$= p^k(1-p)^{n+m-k} \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k - i} = \binom{n + m}{k} p^k(1 - p)^{n+m-k}$$



## Diszkrét konvolúció

Megjegyzés: Két független binomiális összege (azonos $p$ paraméter esetén) $Binom(n + m, p)$ lesz, ez úgy is kijön, hogy mindkettő amúgy Bernoullik összege és így lesz $n + m$ Bernoullink.

$$\frac{P(X = i \cap Y = k - i)}{P(X + Y = k)} = \frac{P(X = i) \cdot P(Y = k - i)}{P(X + Y = k)} =$$

$$\frac{\binom{n}{i}\cancel{p^i}(1 \cancel{-p})^{n-i}\binom{m}{k-i}\cancel{p^{k-i}}(1 \cancel{-p})^{m-k+i}}{\binom{n+m}{k}\cancel{p^k}(1 \cancel{-p})^{n+m-k}} = \frac{\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}}{\binom{n+m}{k}}$$

HIPERGEOM

$$P(X = i|X + Y = k) = \frac{\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}}{\binom{n+m}{k}}$$

## Példa

*Egy berendezésben a hibás alkatrészek száma $\lambda$ paraméterű Poisson valváltozó. A technikus $p$ valószínűséggel veszi észre és cseréli ki a hibás alkatrészeket, mindegyiket egymástól függetlenül. Mi a ki nem cserélt alkatrészek eloszlása?*

$X$ ($k$ db)

$k$ nem cserélt $1-p$ → $Y$ ($k-n$)

$p$ → $X-Y$ $k$ cserélt

$n$

Legyen $X$ a hibás, $Y$ a ki nem cserélt alkatrészek száma.

$Y, X$ nem független!

$Y \subset X$

$$P(Y=n) = \sum_{k=n}^{\infty} \overbrace{P(Y=n|X=k)\cdot P(X=k)}^{P(Y=n\,\cap\, X=k)} =$$

TELJES VALÓSZÍNŰSÉG TÉTELE

$$\sum_{k=n}^{\infty} \underbrace{\binom{k}{n}(1-p)^n p^{k-n}}_{P(Y=n|X=k)} \underbrace{\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}}_{P(X=k)} = e^{-\lambda}\frac{[(1-p)\lambda]^n}{n!}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\cancel{k!}}{(k-n)!}\frac{(p\lambda)^{k-n}}{\cancel{k!}}$$

Taylor sor

$e^{p\lambda}$ – vele

$$P(Y=n) = e^{-(1-p)\lambda}\frac{[(1-p)\lambda]^n}{n!}$$

POISSON$((1-p)\lambda)$ ez új deriválás



## Folytonos független valváltozók összege

Diszkrétben:

$$P(X+Y=m) = \sum_{k=1}^{m-1} P(X=k)\cdot P(Y=m-k)$$

Folytonos verzió:

$f_X(x), f_Y(y)$ $X, Y$ sűrűségfv-ei, $T = X+Y$

$X, Y$ független

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\cdot f_Y(\overbrace{t-x}^{y})dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(\overbrace{t-y}^{x})\cdot f_Y(y)dy$$

Konvolúció



## Exponenciálisok összege

*$X \sim Exp(\lambda)$, $Y \sim Exp(\lambda)$ függetlenek. Mi lesz $T = X+Y$ eloszlása?*

homogén

$x < t$

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda y}$$

$$f_T(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\cdot f_Y(t-x)dx = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\cdot\lambda e^{-\lambda(t-x)}dx =$$

$$= \int_0^t \lambda^2 e^{-\lambda t}dx = \left[x\cdot\lambda^2 e^{-\lambda t}\right]_0^t = \underline{t\lambda^2 e^{-\lambda t}} \qquad Erlang(2,\lambda)$$

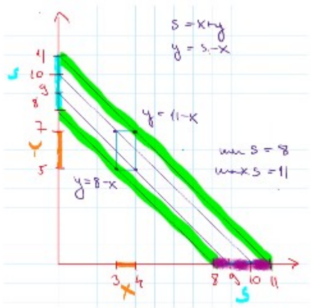
3 exp összege, $Z = T + X$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f_X(x)}_{\text{exp}}\cdot \underbrace{f_T(z-x)}_{\text{Erlang}(2,\lambda)}dx = \int_0^z \lambda e^{-\lambda x}\cdot\lambda^2 e^{-\lambda(z-x)}\,\overbrace{\cancel{d}x}^{(z-x)} =$$

$$= \left[\lambda^3 e^{-\lambda z}(zx - x^2/2)\right]_0^z = \frac{\lambda^3 e^{-\lambda z}z^2}{2} \qquad Erlang(3,\lambda)$$

## Egyenletesek összege

$X \sim Uni(3,4), \quad Y \sim Uni(5,7), \quad f_{X+Y}(s) = ?$




$$1 = f_X(x) = \frac{1}{4-3}, \quad f_Y(y) = \frac{1}{7-5} = \frac{1}{2}$$

$$8 \le x + y \le 11$$

$$8 \le s \le 11$$

$$3 \le \overbrace{s - y}^{x} \le 4$$

$$s - 4 \le y \le s - 3$$

$$f_{X+Y}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(s-y) f_Y(y) dy$$



## Egyenletesek összege

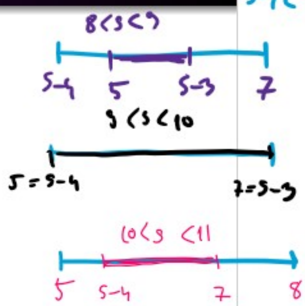
$\int_5^{s-3} 1 \cdot \frac{1}{2} dy = \frac{s-3-5}{2} = \frac{s-8}{2}$ $\quad 8<s<9$

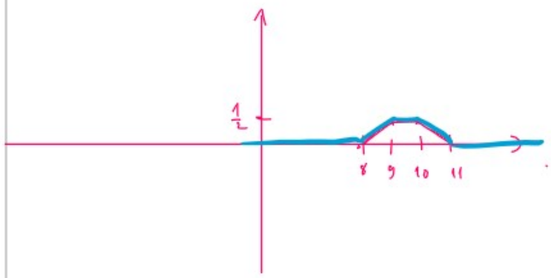
$\int_{s-4}^{7} 1 \cdot \frac{1}{2} dy = \frac{7-(s-4)}{2} = \frac{11-s}{2}$ $\quad 10<s<11$

$\int_{s-4}^{s-3} 1 \cdot \frac{1}{2} dy = \frac{s-3-(s-4)}{2} = \frac{1}{2}$ $\quad 9<s<10$

$5<y<7$
$s-4<y<s-3$

a feltétel metszete kell



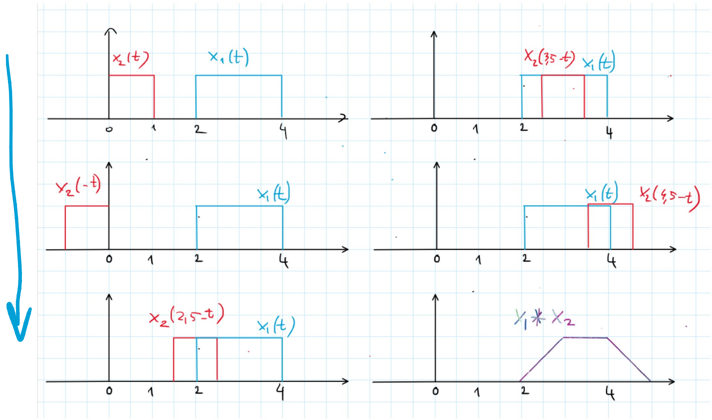






## Nem láttuk ezt már valahol?

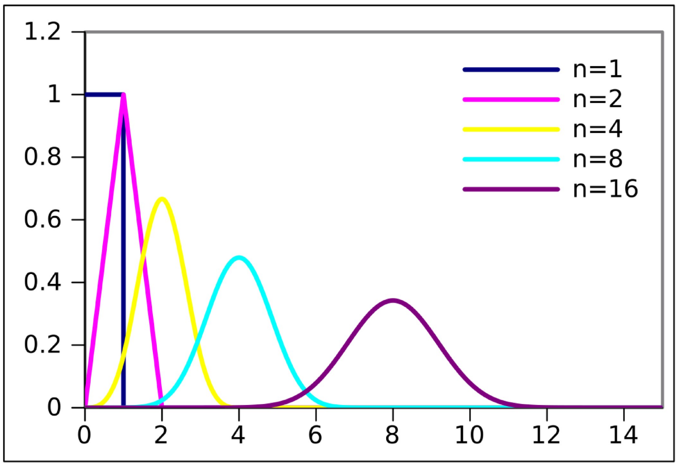
## Négyszögimpulzusok konvolúciója

$$x_3(s) = x_1 * x_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(s-t)dt$$






## Irwin-Hall eloszlás




$u_i\ (0,1)$



## Többváltozós diszkrét eloszlások

*Ha $X$ és $Y$ diszkrét valószínűségi változók, $X = x_1, x_2, \ldots x_n$, $Y = y_1, y_2, \ldots, y_n$, $P(X = x_i, Y = y_j)$, $(i, j = 1, 2, \ldots)$ valószínűségek összességét a két diszkrét változó **együttes eloszlás**ának nevezzük.*

$P(X = x_i \cap Y = y_j)$

**$X, Y$ függetlenek** $\Leftrightarrow P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_j) \cdot P(Y = y_j)$

$\forall i, j - re$

**Peremeloszlások**

TELJES ESEMÉNY TÉTELRE

$$P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{\infty} P(X = x_i, Y = y_j)$$

$X = x_i \cap Y = y_j$

$$P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i, Y = y_j)$$

## Példa

Két dobókocka együttes eloszlása

| bal \ jobb | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1; 1 | 1; 2 | 1; 3 | 1; 4 | 1; 5 | 1; 6 |
| 2 | 2; 1 | 2; 2 | 2; 3 | 2; 4 | 2; 5 | 2; 6 |
| 3 | 3; 1 | 3; 2 | 3; 3 | 3; 4 | 3; 5 | 3; 6 |
| 4 | 4; 1 | 4; 2 | 4; 3 | 4; 4 | 4; 5 | 4; 6 |
| 5 | 5; 1 | 5; 2 | 5; 3 | 5; 4 | 5; 5 | 5; 6 |
| 6 | 6; 1 | 6; 2 | 6; 3 | 6; 4 | 6; 5 | 6; 6 |

| Y bal \ X jobb | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |
| 2 | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |
| 3 | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |
| 4 | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |
| 5 | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |
| 6 | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

$P(Y=4)$

$\oplus$

$P(X=3)$



## Polinomiális eloszlás

Hajtsunk végre egy n-szeres kísérletsorozatot. Vegye fel $X_i$ azt az értéket ahányszor $A_i$ bekövetkezett a kísérletsorozatban. Az $X_1, X_2, \dots X_r$ valószínűségi változók együttes eloszlását $(n, p_1, p_2, \dots, p_r)$ paraméterű **polinomiális eloszlás**nak nevezzük. $X_i = 0, 1, 2, \dots, n$, $\sum_{i=1}^{r} X_i = n$.

$k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$

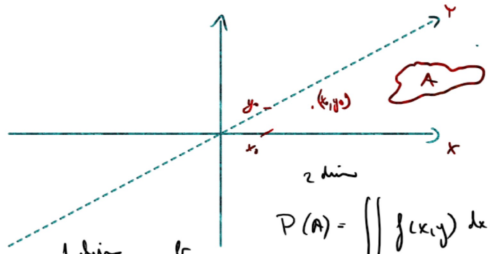
$p_1 + p_2 + \dots p_r = 1$

$$P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \dots, X_r = k_r) = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_r!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}$$

Megjegyzés: A polinomiális eloszlás speciális esete a binomiális (n=2), továbbá a polinomiális eloszlás $X_i$ komponensei (azaz a peremeloszlások) egyenként $Binom(n, p_i)$ eloszlásúak.



## Többváltozós folytonos eloszlások




1 dim

$P(a<X<b)=\int_a^b f(x)\,dx$

2 dim

$P(A)=\iint_A f(x,y)\,dxdy$

$$f(x,y) \approx \frac{P((x,y)\in A)}{\text{A területe}} \approx \frac{P(x<X<x+\Delta x, y<Y<y+\Delta y)}{\Delta x \Delta y}$$



## 2D Sűrűségfüggvények

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\iint_{A\cap B} f(x,y)dxdy}{\iint_A f(x,y)dxdy}$$

$f(x,y)$ EGYÜTTES SŰRŰSÉGFV

Feltételes sűrűségfüggvények

$$f(x,y|A)=\frac{f(x,y)}{P(A)}=\frac{f(x,y)}{\iint_A f(x,y)dxdy}$$

$$f_{2|1}(y|x)=\frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy}=\frac{f(x,y)}{\boxed{f_1(x)}}$$

$$f_{1|2}(x|y)=\frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx}=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}$$

Peremsűrűségek

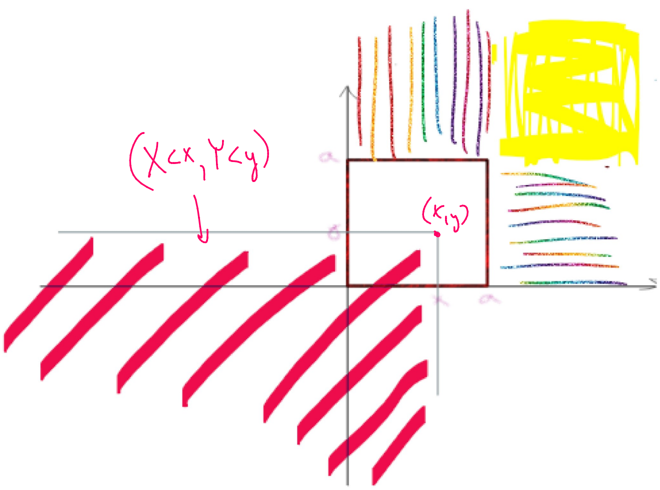
$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy \qquad f_2(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$$



## 2-DIM eloszlásfüggvény

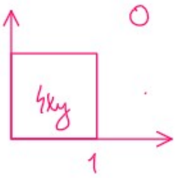
$$F(x,y)=P(X<x,Y<y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(\cancel{x},\cancel{y})\,dxdy$$

$\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(s,t)\,ds\,dt$



## Példa

$f(x,y) = 4xy$, $f_1(x) = ?$, $f_2(y) = ?$, $F(x,y) = ?$, $P(X+Y < 1) = ?$, $P(Y < X^2) = ?$




$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_0^1 4xydy = [2xy^2]_0^1 = 2x$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_0^1 4xyd\cancel{x} = [2x^2y]_0^1 = 2y$$

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} 4st\,ds\,dt = \int_0^y\int_0^x 4st\,ds\,dt = \int_0^y \left[2s^2t\right]_0^x dt = \int_0^y 2x^2t\,dt =$$

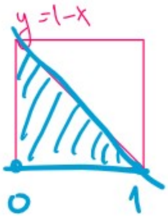
$$= \left(x^2t^2\right]_0^y = \underline{x^2y^2}$$



## Példa folyt.

$P(X+Y<1) = ?$ $\quad Y < 1-x$

$$\iint_{\Delta} 4xy\,dx\,dy = $$




$$= \int_0^1\int_0^{1-x} 4xy\,dy\,dx$$

$$\int_0^1 \left[2xy^2\right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 2x(1-x)^2 dx = \int_0^1 2x(x^2+1-2x)\,dx = \left[\frac{x^4}{2} + x^2 - \frac{4x^3}{3}\right]_0^1 =$$

$$2x^3 + 2x - 4x^2$$

$$= \left[\frac{3x^4+6x^2-8x^3}{6}\right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$$


$$\iint 4xy\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^{x^2} 4xy\,dy\,dx =$$

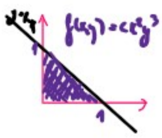
$$\int_0^1 \left[2xy^2\right]_0^{x^2} dx =$$

$$= \int_0^1 2x^5 dx = \left[\frac{x^6}{3}\right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$



## Példa

*Legyen $X, Y$ együttes sűrűségfüggvénye $f(x,y) = cx^2y^3$ a $0 < y < 1-x, x > 0$ tartományon.*
$c = ?$, $f_1(x) = ?$, $f_2(y) = ?$, $f_{2|1}(y|x) = ?$




$$\iint f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^{1-x} cx^2y^3\,dy\,dx =$$

$$= c\int_0^1 \left[\frac{x^2\cdot y^4}{4}\right]_0^{1-x} dx = c\cdot\int_0^1 \frac{x^2(1-x)^4}{4}dx = c\left[\frac{x^2}{4}\cdot\frac{(1-x)^5}{-5} - \int_0^1 \frac{2x}{4}\cdot\frac{(1-x)^5}{-5}\right] = c\left(\frac{-x^2(1-x)^5}{20} - \frac{x}{2}\cdot\frac{(1-x)^6}{30} - \right.$$

$$u\cdot v \quad u'\cdot v$$

$$\left. - \int -\frac{1}{2}\cdot\frac{(1-x)^6}{30}dx \right) =$$

$$\left[\left(-\frac{x^2(1-x)^5}{\ldots} - \frac{x(1-x)^6}{\ldots} + \frac{(1-x)^7}{\ldots}\right)\right]_0^1 =$$

$$f(x,y) = 420\,x^2y^3$$

$$\underline{f_1(x)} = \int_0^{1-x} 420x^2y^3\,dy = \left[\frac{420x^2\cdot y^4}{4}\right]_0^{1-x} = \underline{105x^2\cdot(1-x)^4}$$

$$\underline{f_2(y)} = \int_0^{1-y} 420x^2y^3\,dx = \left[\frac{420x^3}{3}y^3\right]_0^{1-y} = \underline{140(1-y)^3\cdot y^3}$$

## Irodalomjegyzék

$$f_{2|1}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{420 x^2 y^3}{105 x^2 (1-x)^4} = \boxed{\frac{4y^3}{(1-x)^4}}$$

$$c\left[\left(-\frac{x^2(1-x)^5}{20} - \frac{x(1-x)^6}{60} - \frac{(1-x)^7}{420}\right)\right]_0 = c\cdot\left(0+\frac{1}{420}\right) = \frac{c}{420} = 1$$

$$\boxed{c = 420}$$


- Vetier András—Valószínűségszámítás
- Alberto Leon-Garcia—Probability, Statistics, and Random Processes for Electrical Engineering
- Sheldon M. Ross —Introduction To Probability and Statistics for Engineers and Scientists
- Dimitri P. Bertsekas and John N. Tsitsiklis —Introduction to Probability




# Köszönöm a figyelmet!