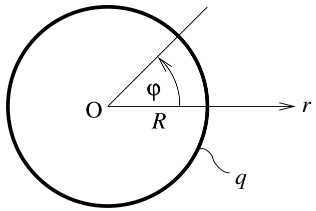
I. példa.

Az ábra szerint a hengerkoordináta-rendszer $z = 0$ síkjában körgyűrű alakú vonaltöltés van, amelynek középpontja az origó, sugara $R = 20\,\mathrm{cm}$, és töltéssűrűsége állandó $q = 8\,\mathrm{nC/m}$ értékű. A közeg levegő. A ϕ skalárpotenciált a végtelenben 0-nak választjuk.



a) Határozza meg a potenciált és a térerősség nagyságát az origóban! (*3 pont*)

$$\phi = \int_0^{2\pi} \frac{qR\mathrm{d}\varphi}{4\pi\varepsilon_0 R} = 2\pi\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{q}{2\varepsilon_0} = 452\,\mathrm{V}$$ (2 p) Szimmetria miatt $E = 0$ (1 p)

b) Adja meg a térerősség *vektorát* az elrendezés tengelyében, az $r = 0$, $\varphi = 0$, $z = 0{,}5\,\mathrm{m}$ koordinátájú pontban! (*4 pont*)

Szimmetria miatt csak z irányú komponens van, (1 p)
$l = \sqrt{R^2 + z^2}$ és $\cos\alpha = z/l$ jelöléssel

$$E_z(z) = \int_0^{2\pi} \frac{qR\mathrm{d}\varphi}{4\pi\varepsilon_0 l^2}\cos\alpha = \frac{qR\cos\alpha}{2\varepsilon_0 l^2} = \frac{qR}{2\varepsilon_0}\frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}} = 289\,\mathrm{V/m}$$ (3 p)

(bővebben l. Bilicz példatár 2.6. példa)

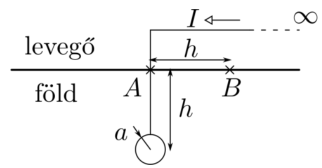
c) Becsülje meg a potenciált és a térerősség *nagyságát* az $r = 10\,\mathrm{m}$, $\varphi = \pi/6$, $z = 10\,\mathrm{m}$ koordinátájú pontban! (*3 pont*)

$Q = 2R\pi q = 10{,}05\,\mathrm{nC}$ pontszerű töltéssel közelítve: (1 p)

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+z^2}} = 6{,}4\,\mathrm{V}$$ (1 p) $$E = \left|\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(r^2+z^2)}\right| = 0{,}45\,\mathrm{V/m}$$ (1 p)

II. példa.

Egy $a = 10\,\mathrm{cm}$ sugarú gömb alakú elektróda középpontja $h = 1{,}5\,\mathrm{m}$ mélyen a földfelszín alatt helyezkedik el. A levegő-föld határfelület síknak tekinthető; a föld fajlagos vezetőképessége $\sigma = 50\,\mathrm{mS/m}$. Az elektródába $I = 120\,\mathrm{A}$ egyenáramot vezetünk a végtelenből; a végtelen távoli pont potenciálja $\phi(\infty) = 0$.



a) Határozza meg a potenciált az A pontban, azaz a határsíknak a gömbhöz legközelebb eső pontjában! (*3 pont*)

Tükrözés helyes alkalmazása (1 p) → $\phi_A = \dfrac{2I}{4\pi\sigma h} = 255\,\mathrm{V}$ (2 p)

b) Határozza meg az elektróda potenciálját! (*2 pont*)

$$\phi_{\text{gömb}} = \frac{I}{4\pi\sigma}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{2h}\right) = 1974\,\mathrm{V}$$ (2 p)

c) Határozza meg a földelési ellenállást! (*2 pont*)

$$R = \frac{\phi_{\text{gömb}}}{I} = 16{,}4\,\Omega$$ (2 p)

d) Mekkora a feszültség az A és B pontok között? (*3 pont*)

$$U_{AB} = \frac{2I}{4\pi\sigma}\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{\sqrt{2}h}\right) = 74{,}6\,\mathrm{V}$$ (3 p)

Kispéldák

1. Végtelen kiterjedésű, földelt fémsík felett h magasságban, a levegőben pontszerű Q töltés helyezkedik el. Mekkora erő hat a töltésre? (*2 pont*)

$$F = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 (2h)^2} \quad \text{(2 p)}$$

2. Elektrosztatikus térben a skalárpotenciál kifejezése egy koherens egységrendszerben $\phi(x, y, z) = \phi(y) = 3\cos(2\pi y)$. Fejezze ki az elektromos térerősség *vektorát* mint a hely függvényét. (*2 pont*)

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\phi \quad \text{(1 p)}$$
$$\mathbf{E}(x, y, z) = -\hat{\mathbf{e}}_y \frac{\partial \phi}{\partial y} = \hat{\mathbf{e}}_y 6\pi \sin(2\pi y) \quad \text{(1 p)}$$

3. Az 1. és 2. számú elektródából valamint a földből (0. elektróda) álló elrendezés részkapacitásai C_{10}, C_{20} és C_{12}. Az elektródák és a föld között először U_1 ill. U_2 feszültséget létesítünk, majd a források leválasztását követően a 2. elektródát leföldeljük. Mekkora lesz így az 1. elektróda U_1' feszültsége a földhöz képest? (*2 pont*)

$$U_1' = \frac{C_{10}U_1 + C_{12}(U_1 - U_2)}{C_{10} + C_{12}} \quad \text{(2 p)}$$

4. Egy R sugarú gömbön belül a töltéssűrűség kezdetben konstans ρ_0 értékű. A töltéssűrűség Δt idő alatt egyenletesen zérusra csökken. Határozza meg eközben a gömb felszínén a normális irányú áramsűrűség nagyságát, feltéve hogy ez a felszín minden pontjában azonos! (*2 pont*)

$$J = \frac{\rho_0 R}{3\Delta t} \quad \text{(2 p)}$$

5. Csatolt tekercspár ön-, és kölcsönös indukciós együtthatói: L_1, L_2 és M. A tekercsekben először I_1, ill. I_2 állandósult áramot hozunk létre, majd a $t = 0$ pillanatban a gerjesztést leválasztva az egyes tekercsek kapcsait rövidre zárjuk. Mekkora hőenergia keletkezik a $0 < t < \infty$ időtartam alatt a tekercsekben, ha azok egyenáramú ellenállása R_1, ill. R_2? (*2 pont*)

A mágneses térben tárolt energia teljes egészében hővé alakul:

$$W = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 + M I_1 I_2 \quad \text{(2 p)}$$