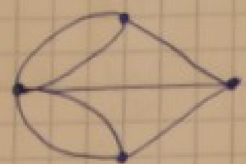
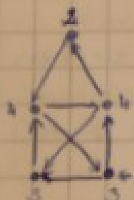
Felzárkóztató: csüt. 18^{15}, 134.18, Domján Pál

- Königsberg hídjai: 7 hídon átmenni nem lehet; Euler



Végig lehet-e menni az éleken csak egyszer?

Minden közbülső pontokon átmenést párba állítom.
A közbülső pontok foka páros kell, hogy legyen



Ez nem út, mert van csúcsismétlés.

Def.

-kör

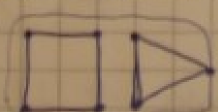
G-ben Euler-út olyan nyílt/zárt élsorozat ami a gráf minden élét pontosan egyszer tartalmazza.

Állítás: G összefüggő gráf:

1) Ha G-ben $\exists$ Euler-út $\Leftrightarrow$ G-ben legfeljebb 2 pont kivételével $\forall$ pont páros.

2) Ha G-ben $\exists$ Euler-kör $\Leftrightarrow$ G $\forall$ pontjának foka páros.
Mert: páros átmenés + 1 indulás + 1 befejezés

Majdnem:



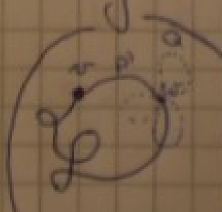
Csak összefüggő gráfok esetében érvényes

Biz: 2,

$\Rightarrow$: teremőr megfigyelése (átmenések párosak) ✓

$\Leftarrow$: $v \in V(G)$ tetszőleges csúcs.

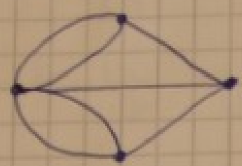
v-ből élismétlés nélküli sétára indulunk a gráfban, amíg el nem akadunk. Ez a P séta.



- Ha egy pont foka páros, és párossal fogyasztottam, akkor páros marad. Még mindig marad be-kijárat. Nem lehet, hogy csak bejutunk.
- Ha elakadunk az csak v-ben lehet.
- Minden csúcsból páros élet hagytam

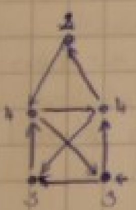
Felzárkóztató csüt. 18^{15}, 134.1B, Domján Pál

- Königsberg hídjai: 7 hídon átmenni nem lehet; Euler



Végig lehet-e menni az éleken csak egyszer?

Minden közbülső pontokon átmenést párba állítom.
A közbülső pontok foka páros kell, hogy legyen.



Ez nem út, mert van csúcsismétlés.

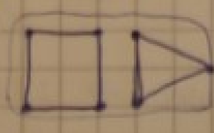
Def.

G-ben Euler-út (-kör) olyan nyílt/zárt élsorozat ami a gráf minden élét pontosan egyszer tartalmazza.

Állítás: G összefüggő gráf.

1) Ha G-ben ∃ Euler-út ⇔ G-ben legfeljebb 2 pont kivételével ∀ pont páros.

2) Ha G-ben ∃ Euler-kör ⇔ G ∀ pontjának foka páros.
Mert: páros átmenés + 1 indulás + 1 befejezés
Majdnem:



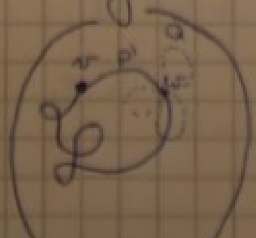
Csak összefüggő gráfok esetében érvényes

Biz: 2,

⇒: teremőr megfigyelése (átmenések párosak) ✓

⇐: $v \in V(G)$ tetszőleges csúcs.

v-ből élismétlés nélküli sétára indulunk a gráfban, amíg el nem akadunk. Ez a P séta.



- Ha egy pont foka páros, és párossal fogyasztom, ezért páros marad. Még mindig marad be-kijárat. Nem lehet, hogy csak bejutunk.
- Ha elakadunk az csak v-ben lehet.
- Minden csúcsból páros élet használtam

De ez még nem biztos, hogy Euler-kör:

A P-nek ezért az ilyen séták (élsorozatok) közül a leghosszabbnak kell lennie.

Áll.

P Euler-kör. Ha nem az volna:

H := G-ből elhagyjuk P-beli éleket. Tudjuk, hogy H-ban is minden fokszám páros (páros-páros = páros)

w := olyan csúcs, amire illeszkedik H-beli és P-beli él is, G összefüggő, így kell lennie ilyen csúcsnak

Q séta := w-ből H-ban, élismétlés mentes, w-ben elakadó séta.

Valami ilyesmi: 

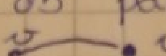
→ hosszabb P-nél ↯

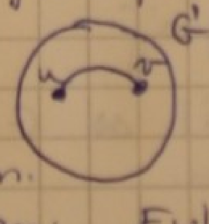
Biz: 1,

⇒: ✓

⇐: - ∀ fok páros ⇒ Ok (Euler-kör)

- ha 2 db páratlan fokú pont létezik: u, v

G': 



⇒ ha G'-ben van: Euler-kör

⇒ ha G-ben van: Euler-út

Def: „1-től n-ig, ahol n a dodekaéder csúcsainak száma" /Ke. D./

„Biztos lejegyzetelném, ha itt ülnék. Szerencsére állok" /Ke. D./

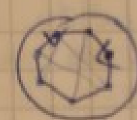
Hamilton-kör / -út: olyan kör / út, amely minden csúcsot tartalmaz (egyszer)

Huszár körútja a probléma. Huszárral lépjünk végig a sakktáblán, érintsünk minden mezőt egyszer.

Gyors, Hamilton-kör kereső algoritmus ritka.

II Hogyan lehet kimutatni, hogy egy gráfban nincs Hamilton-kör?

A szükséges feltétel



∠: elhagyás

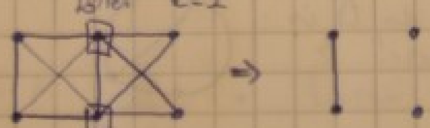
Tétel: 1, Ha $\exists$ H-kör: G-ből akárhogy k csúcsot törölve a maradék gráfnak legfeljebb k komponense van.

Biz: A H-kör megmaradt része legf. k komponenst alkot, a többi él ezt csak csökkentheti.

2, Ha $\exists$ H-út:

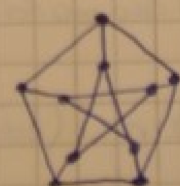
Hasonló a fentihez.

törlés $k=2$



Legfeljebb 2 komponensre eshetett volna a 3 helyett!

A tételek $\Leftarrow$ nem igazak.



Petersen-gráf az ellenpélda.

Az elégséges feltétel

Tétel: Dirac

Ha G n csúcsú, egyszerű gráf és minden pont foka $\geq \frac{n}{2} \Rightarrow$ létezik Hamilton-kör.

Biz:

$d(u)+d(v) \geq \frac{n}{2}+\frac{n}{2}=n$ ✓ (l. köv. oldal)

Tétel: Ore

G n csúcsú egyszerű gráf és bármely u, v nem szomszédos csúcsok fokait összeadva összegük $\geq n \Rightarrow$ létezik H-kör.

$\boxed{\forall}$
- u, v nem szomszédos
- $d(u) + d(v) \geq n$

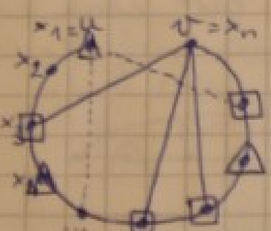
A tételek nem megfordíthatók!

Biz: indirekt

G ellenpélda (ha 1 van, van több is; válasszunk olyat hogy az n csúcsú ellenpéldák közül a legtöbb élű)

G ellenpélda, ha: $\forall$ u, v nem szomszédos (ez teljesül), ~~ha~~ a $d(u) + d(v)$ is, de még sincs benne H kör.
Illetve egy új élet behúzva (G') már nem lesz ellenpélda (mert G a legtöbb élű ellenpélda), ezért G'-ben kell lennie Hamilton-körnek.

u, v nem szomszédos (ilyenek biztosan léteznek):



u-ból v-be létezik Hamilton-út.

Aki v-vel szomszédos: ⊡
Aki u szomszédait eggyel megelőző: △

Ha van olyan, ami egyszerre □ és △ is:
Ekkor van benne Hamilton-kör! ↯

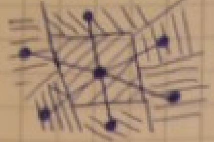
$|\square| = d(v)$ // számosságuk
$|\triangle| = d(u)$

$d(u) + d(v) \geq n$ (ez ugye teljesül)

$\Downarrow$

Akkor már csak az lehet, hogy ha valamelyik nem □, akkor az △ lesz. Azaz mindennek fel kell vennie valamelyiket. De a v nem ilyen $\Rightarrow |\square \cup \triangle| \leq n-1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\, w \in \square \cap \triangle$
$\parallel$
x_j

Dirac, Ore: csak a Hamilton-kör kimutatására
Elhagyás: ~~nem~~ nem létezés bizonyí



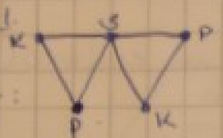
Def:

G gráf k színnel színezhető, ha csúcsaik k színnel megszínezhetők úgy, hogy a szomszédos csúcsok különböző színt kapjanak.

G kromatikus száma k, ha G k színnel színezhető, de annál kevesebbel már nem.

Jele: $\chi(G) = k$ (khi)

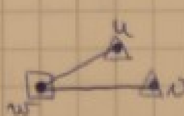
Pl.

G: 

$\chi(G) = 3$ - 3 színnel meg lehet színezni
- de kevesebbel nem

G: K_{100}  $\chi(K_{100}) = 100$ - bármelyik két csúcs össze van kötve

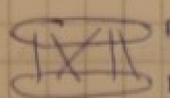
Pl.:



⊢⊣: CPU folyamatok
Az összekötöttek „ütik" egymást

Most 2 proc.-ra van szükségem.

$\chi = 1$  (üres gráfok)

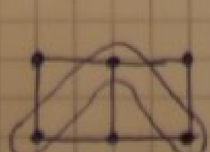
$\chi \leq 2$  (páros gráfok)

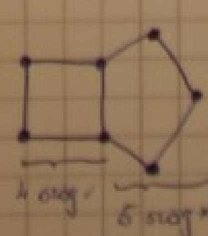
Def: Páros gráf

G páros gráf, ha V(G) felbontható két diszjunkt részre (A, B), ha G $\forall$ éle A-beli csúcsot köt össze B-vel.

Jele: $G(A, B; E)$

Pl.

 ← páros



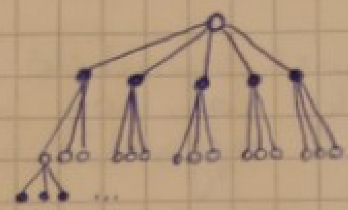
← nem páros, $\exists$ páratlan kör

Tétel:

G páros gráf ⇔ nincs benne páratlan kör

Biz: ⇒: ✓ // Ha 3-szor úszol át egy folyót, nem a v-hoz jutsz vissza.

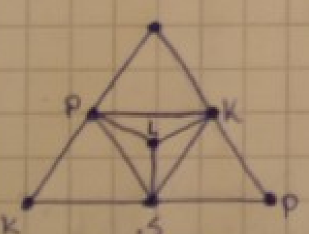
⇐: v tetsz.



- ha G összefüggő: szintenként felváltva színezgetek. Ha azonos színű csúcsok szomszédosak volnának, akkor az ő legközelebbi közös ősükön keresztül volna páratlan kör (pedig feltettük, hogy nincs) ↯

  2 szint távolságon azonos színű csúcsok nem lehet ~~összefüggő~~ szomszédos.

- ha G nem öf.: mindegyik komponensben eljátszom a fentit.



négycsúcsú teljes gráf

Teljes részgráf: klikk

A középső négyes miatt min. 4 szín kell. $\chi(G) = 4$.

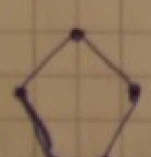
Def:

G gráf maximális klikkmérete k, ha G-ben található k db csúcs úgy, hogy közülük bármelyik kettő szomszédos, de k-nál több nem.

Jele: $\omega(G) = k$

Állítás: $\omega(G) \leq \chi(G)$ $\forall$ G gráfban

Biz: $\omega(G) = k \Rightarrow$ ehhez a k csúcshoz kell k szín.



$\omega(C_5) = 2$
$\chi(C_5) = 3$

Tehát $\omega(G) \underset{\text{nem mindig}}{\neq} \chi(G)$!

Elő tud-e állni tetszőleges méretű különbség ω és χ közt?

Tétel: Mycielski-konstrukció

$\exists$ olyan G gráf, amire $\omega(G_k)=2$, $\chi(G_k)=k$, $\forall\, k \geq 3$-ra

Biz:

$\forall k = 1000$-hez elképzeljük a 999-est.

$\Downarrow$

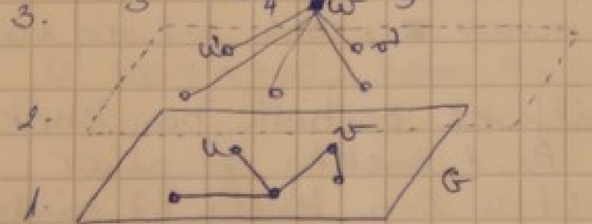
$G \longrightarrow H$

$\omega=2 \quad \omega=2$

$\chi=k \quad \chi=k+1$

$k=3$:  $= G_3$

$G_3 \to G_4 \to G_5 \to \dots \to G_x$



2 emeleti csúcsok az 1. emeleti „szomszédok" szomszédaival vannak összekötve.

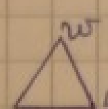
$V(G)=\{v_1, v_2 \dots v_n\}$

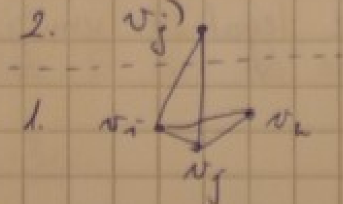
$V(H)=V(G) \cup \{v_1', v_2' \dots v_n'\}$

$E(H)=E(G) \cup \{\{\underset{2.\,em.}{v_i'}, \underset{1.\,em}{v_j}\} : \{v_i, v_j\} \in E(G)\} \cup \{\{w, v_i'\} \; \forall i=1,\dots n\}$

Áll: $\omega(H)$, azaz H-ban nincs Δ

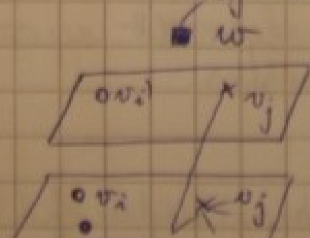
Biz:

a)  ↯ b)  ↯ c)  $\omega(G)=2 \Rightarrow$ ↯

d) 

$\to G$-beli $\Delta \Rightarrow$ ↯

Áll: H $(k+1)$ színnel színezhető.



B) H nem k színnel színezhető.

indirekt Biz:

Ha H k színnel színezhető lenne, akkor az 1. emeleten található G gráf k-1 színnel is színezhető lenne.

⇓

2. emeleten nincs ■!

Ha az 1.-n van ■, akkor megnézzük az ikertestvérét és átfestjük arra az 1. emeletet.
⇒ 1.-n nincs ■, csak k-1 szín van.

De az eredeti, már átfestett pontnak nem lehet új színű szomszédja. Az 1. emeleten így akkor nem ronthatjuk el, mert a 2.-n lehet új színű szomszédja.

Tehát G k-1 színnel színezhető. Azaz ↯

A fentiek mondhatni teljes indukció volt

$\omega(G) \leq \chi(G) \leq$

Mohó színezés

Lehet hogy nem a legjobb de legalább valamilyen

csúcsok: $v_1, v_2 \dots v_n$

① ② ③

$v_1 \to$ ①

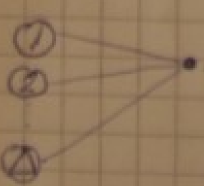
Ha már $v_1 \dots v_i$ színezett ⇒ v_{i+1} a legkisebb sorszámú olyan szín, amilyen sorszámú színe nincs.

Tétel: $\chi(G) \leq \Delta(G)+1$, // Δ maximális fokszám
azaz

Biz:

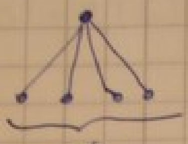
a mohó színezés $\leq \Delta+1$ színt használ

① ② —— $\Delta+1$



v_i $\leq \Delta$ szomszéd (a legrosszabb esetben =)
$i - \Delta$ db. kilőtt szín + v színe

Pl. Csillag alakzat



10^6

$\Delta + 1 = 10^6 + 1$

$\chi = 2$

$K_n \Rightarrow \Delta = n-1$ Teljes gráfoknál nem vágható le a +1.

$\chi = n$

C_{2k+1}  $\Delta = 2$ $\chi = 3$ Itt sem vágható le, a páratlan körnél.

Tétel: Brooks

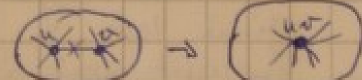
G összefüggő, nem K_n és nem $C_{2k+1} \Rightarrow \chi(G) \leq \Delta(G)$

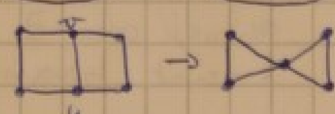
Tétel: ötszíntétel

Ha G síkbarajzolható gráf, akkor $\chi(G) \leq 5$

Biz:

- élösszehúzás:





Áll: síkbarajzolható gráfból síkbarajzolhatót készít ✓

Biz: mondhatni triviális

- ha G sr. és egyszerű $\Rightarrow \exists$ v csúcs, hogy foka ≤ 5.

Biz:

ha $\forall v \quad d(v) \geq 6$

$\underset{\text{tétel}}{3n-6} \geq e = \frac{\sum d(v)}{2} \geq \frac{6n}{2} = 3n$ ↯

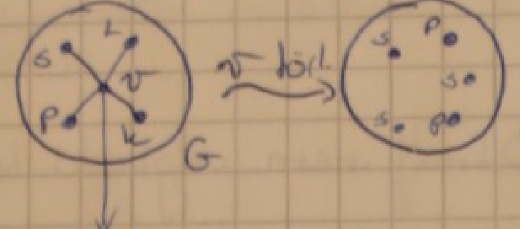
A bizonyítás teljes indukció a csúcsok számára

Tfh. $\forall$ n csúcsú gráfra igaz $\Rightarrow$ n+1-re is igaz.

→

$v: d(v) \le 5$

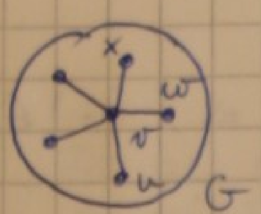
Ha $d(v) < 4$:



v-nek jut szín az 5-ből

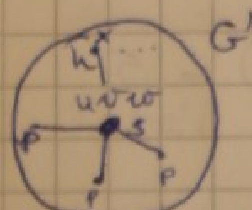
indukció => 5 színnel színezhető

Ha $d(v) = 5$:



v szomsz. között van nem szomszédos pár (ha nem: K_6 volna G-ben ↯)

vu, vw éleket összehúzzuk: G' n-1 csúcsú => 5 színnel színezhető



G'-t kiszínezzük, majd visszaörökítjük G-re. De ilyenkor u, v és w ugyanolyan színű lesz.
Viszont v-t átszínezzük egy szabad színre, ami $\exists$, mert az 5 szomszéd csak 4 színt használt.

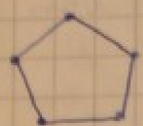
Tehát az a lényeg, hogy az 5 szomszéd ne kapjon különböző színt.

$\omega(G) \le \chi(G)$

Def

G perfekt, ha $\chi(G) = \omega(G)$ és G $\forall$ F feszített részgráfra is $\chi(F) = \omega(F)$

Pl.

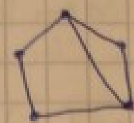


$\chi = 3$
$\omega = 2$

Nem perfekt!

$\chi = 3$
$\omega = 3$

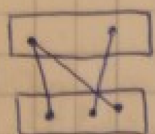
Nem perfekt!



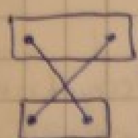
$\chi = 3$
$\omega = 3$

Perfekt ✓

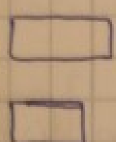
Pl.



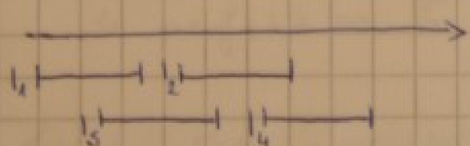
Páros gráfok



Feszített részgráf szintén páros
$\chi = 2$
$\omega = 2$

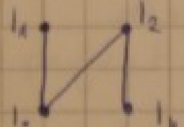


Feszített részgráf, de nincs élük
$\chi = 1$
$\omega = 1$



számegyenes

(zárt) intervallumok



intervallumgráf; élei ~~...~~ vannak, ha az intervallumok metszik egymást. Mindig perfektek.

Def

$I_1 \dots I_n$ számegyenes (korlátos és zárt) intervallumai
$V(G) = \{I_1, I_2, \dots, I_n\}$
I_i – I_j-vel szomszédos, $\Leftrightarrow$ metszik $(i \neq j)$

Tétel:

$\forall$ intervallumgráf perfekt.

Biz.

Adott G ; $I_1 \dots I_n$ intervallumok.

$\omega(G) = k$

*Cél k színnel jó színezés

k+ : nem kell, mert k-val kiszínezzük
k- : nem lehet, mert k klikk van benne

⇓

$\chi(G) = \omega(G) = k$

Illetve az intervallumgráf ∀ feszített gráfja is intervallumgráf.

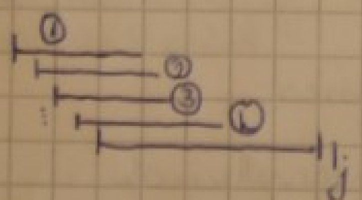
Biz*:

Mohó színezés: a csúcsokat az intervallumok bal oldali végpontjai szerinti növekvő sorrendben veszem: $I_1 \dots I_n$

Ha pedig ezt elkezdjük színezni, mindegyiknek odaadjuk az első színt, k-val színezzük.

Indirekt.

Tfh: (k+1) színre is szükség van, I_j-nél először.



① $I_1 \to$ ①, előbb kezdődik I_j-nél, metszi
②
⋮
ⓚ is korábban kezdődik, ezért ezt sem adhatjuk

Ezek k+1 pontú klikket alkotnak; viszont max. k méretűt engedhetünk meg ↯

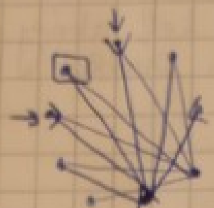
Tehát tényleg csak k színre lesz szükségünk

Pl.: // Az összes páratlan fokú kör nem perfekt

C_{2k+1} $(k \geq 2)$ → nem perfekt

Pl. // komplementerük sem azok

$\overline{C_{2k+1}}$ $(k \geq 2)$



k csúcsból álló klikk van, ha minden másodikat vesszük (∠), de 2 a végén kimarad.

k + 1 csúcsú klikk nincs, mert ennyi-nél volna 2, akik a kör mentén szomszédosak

⇓

$\omega(G) = k$ // C_{101} : $\omega = 50$

□ : színezve

→ : egyiket színezhetem, de nem mindkettőt.

Azaz mindegyik színt legfeljebb kétszer használhatok.

Tehát k + 1 szín szükséges. $\chi(G) \geq k+1$

Valójában $\chi(G) = k+1$. 2 egymás mellett lévő csúcsot kell színezni.

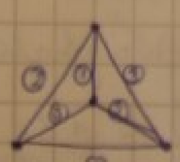
A gráf pedig nem perfekt

Tétel: Lovász, gyenge perfekt gráf tétele ; 1972

G perfekt ⇒ $\overline{G}$ is perfekt

Tétel: Erős perfekt gráf tétel ; 2006-ban publikálva

G perfekt ⇔ G nem tartalmaz C_{2k+1}-et vagy $\overline{C_{2k+1}}$-et $(k \geq 2)$ feszített részgráfjaként

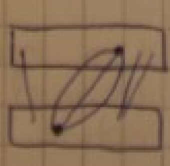


$\chi_e(K_4) = 3$

Def.

G élkromatikus száma k, ha G élei k színnel színezhetők úgy, hogy szomszédos (1 csúcsra illeszkedő) színűek, de (k-1)-gyel nem.

$\chi_e(G) = k$



tanárok

órák

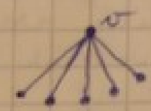
Az azonos színű éleket be lehet tenni egy időpontba (óra, rend), ha nem találkoznak egy csúcsban

$\chi(K_4) = 3$. Van benne egy 3 fokú csúcs.

<u>Állítás:</u>

$\Delta(G) \le \chi_e(G)$

<u>Biz:</u>



Legalább annyi szín kell, ahány fokú, mert egy fokba nem futhat két azonos.

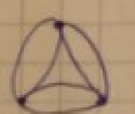
<u>Tétel:</u> Vizing

G egyszerű gráf $\rightarrow \chi_e(G) \le \Delta(G) + 1$

Tehát vagy a maximális fokszám vagy annál eggyel nagyobb a χ_e.

Bizonyítás nem szükséges.

<u>Pl.:</u>

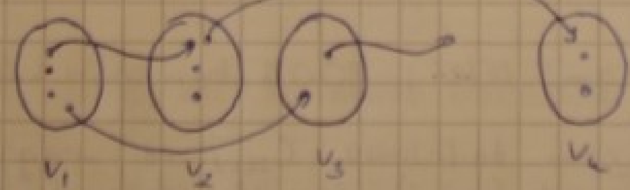


$\chi_e = 6$
$\Delta = 4$

Nem egyszerű gráfnál kicsit bonyolultabb a helyzet.

Irányított gráf

Hogyan színezzük a csúcsait?



$\rightarrow$ Mindig jobbra

<u>Def.</u>

$\vec{G}$ emeletekre bontható ha $V(\vec{G})$ felvágható a $V_1 \dots V_k$ diszjunkt részekre úgy, hogy $x \to y$ a $\vec{G}$ egy éle és $x \in V_i$, $y \in V_j$ és $i < j$

Magyarul egy nála nagyobb halmazba mutasson.

Nem minden gráf bontható emeletekre. Pl. a legelső felrajzolt sem, mert irányított kör van benne. Ez pedig egy mindig nagyobb halmazba dobna át.

Tétel:
Ha G emeletekre bontható $\Leftrightarrow$ nem tartalmaz irányított kört (azaz aciklikus)

Biz:

$\Rightarrow$: ✓

$\Leftarrow$:

Lemma:

Ha G aciklikus, akkor van benne nyelő (csak befele menneк élek).

Biz:

v tetszőleges csúcsból séta az irányított élek mentén;
aciklikus $\Rightarrow$ valahol elakad a séta (mert véges sok csúcs van) $\Rightarrow$ és a nyelő.

Ha G aciklikus, akkor forrás is van benne.

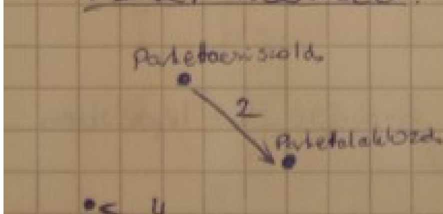
Az állítások nem megfordíthatók!

$L \to V_k$: G-beli nyelők $\to$ V_k csúcsainak törlése

V_{k-1}: maradékban nyelőket a korábbi emeletre tesszük.
V_{k-1} csúcsainak törlése

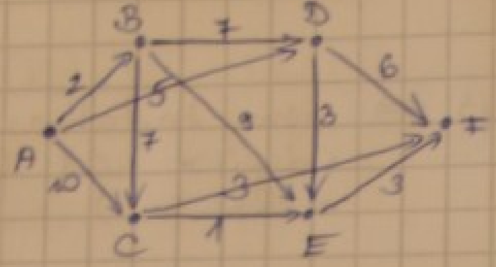
⋮

PERT módszer:

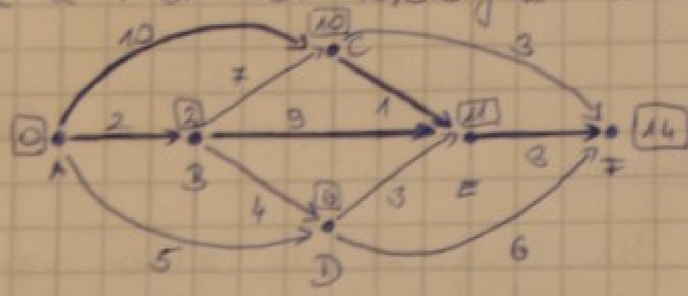


Remélhetőleg aciklikus az irányított gráf.
Minden élhez egy időt jelképező szám van rendelve, azaz súlyozva vannak.

Cél az ütemezés úgy, hogy mindent betartsunk és a legrövidebb idő alatt folyjon le minden



I. Jobbról balra építjük fel az emeletet.
Felírjuk a F-et és letoroljuk E nyelvé vált



II. Ezután balról jobbra haladva megnézzük a nagyobb számösszegeket.

C: $2 + 7 = 9$ $(B + 7)$
$0 + 10 = 10$ $(A + \overrightarrow{10})$

D: $2 + 4 = 6$
$0 + 5 = 5$

E: $10 + 1$
$2 + 9$
$6 + 3$

F: $10 + 3$
$11 + 3$
$6 + 6$

III. Kritikus részfeladatok meghatározása, hol nem szabad csúszásnak lenni.

Az E – F közöt ilyen pl. a $11 + 3$.

Jobbról balra haladva kiszínezzük a kritikus éleket.

Ezt nem lehet megtenni a második lépésben
Lásd: D-nél a 2+4-es részt.

$\gamma(G) = 3$

Def.

G gráf, $M \subseteq E(G)$

M párosítás (független élhalmaz), ha semelyik két M-beli élnek nincs közös végpontja.

M teljes párosítás, ha $\forall$ $v \in V(G)$-re a G-t illeszkedik M-beli él

$\gamma(G) = 10$
$\tau(G) = 10$

Áll.

Def.

$X \subseteq V(G)$

X lefogó ponthalmaz, ha G $\forall$ éle tartalmaz X-beli csúcsot

Def. $\tau(G)$: minimális lefogó ponthalmaz elszáma.

M párosítás, X lefogó ponthalmaz $\rightarrow$ $|M| \leq |X|$

Állítás

$\gamma(G) \leq \tau(G)$ // nü és tau

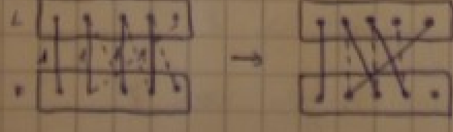
Pl.

$\gamma = 1$ // 1 pont tudok csak lefedni
$\tau = 2$

Párosítások páros gráfokban:

Adott egy páros gráf Magyar módszer

I. független élek felvétele, amíg lehetséges

II. 

--- és — felcserélése
--- : javítóút
így az élszám növelhető

javítóút keresése és ementén a párosítás növelése, amíg lehet.

Def. alternáló út, javító út

G(F, L), E páros gráf és M párosítás
- párosítatlan F-beliből indul
- $\forall$ második éle M-beli

} alternáló út

- alternáló út
- párosítatlan L-beliben ér véget

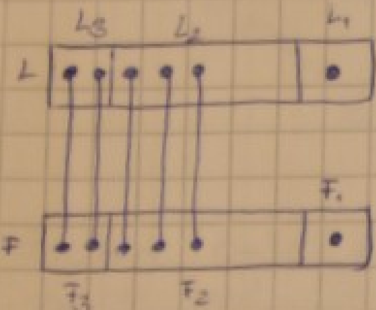
} javító út

Tétel.

$G(F, L; E)$, M párosítás; ha nincs benne javító út, akkor M maximális párosítás.

Biz.

A magyar módszer k élű párosítást adott; keressünk k pontú lefogó ponthalmazt!
ekkor: $k \le \nu(G) \le \tau(G) \le k \Rightarrow k = \nu(G)$



L_1: párosítatlan L-beliek halmaza
F_1: -"- F -"-

L_2: azon L-beli élek, amikhez F_1-ből alternatív útvonalon el lehet jutni.
$L_2 \cap L_1 = \emptyset$, mert jav. út nincs (az algoritmus leállt)

F_2: L_2-beliek párja (M szerint)

L_3: maradék L-beliek
F_3: -"- F-beliek

$L_2 \cup F_3$ lefogó ponthalmaz és ez k pontú.

Állítás.

$F_1 \cup F_2$-ből nem vezet él $(L_1 \cup L_3)$-ba.

Biz.

$F_1 - L_1$ nincs él. Azt nem tudjuk, hogy a párosítás maximális azt bizonyítjuk, ezt ne használjuk fel!

Viszont javítóút volna. ↯

$F_1 - L_3$: 1 élű alternáló út volna. Ekkor viszont L_2-ben kellene lennie. ↯

$F_2 - L_1$: F_2 L_2 lányok párjai. L_2 valamelyik párosítatlan F-ből elérhető alternáló úton. Elérhető lenne javítóúton. ↯

$F_2 - L_3$: L_3 rossz helyen van ↯

Tétel: König Dénes

Ha G páros gráf, akkor $\nu(G) = \tau(G)$.

Biz:

algoritmus $\rightsquigarrow$ k élű $\begin{cases} \text{párosítás} \\ \text{lefogó ponthalmaz} \end{cases}$

$$k \le \nu(G) \le \tau(G) \le k \Rightarrow \nu = \tau$$

Tétel: Hall

Mikor lesz egy olyan párosítás, amely minden pontnak (egy halmazban) ad párt?
Ez az F-et lefedő párosítás

F $\quad X \subseteq F$

L $\quad N(X) :=$ van X-ben szomszédjuk (neighbour), L-beliek

Bárhogy választok ki bárhány fiút max. annyi lányba legyenek szerelmesek, akkor létezik

$\exists$ F-et lefedő párosítás $\iff \forall X \subseteq F$ $|N(X)| \ge |X|$ – Hall feltétel

Biz:

$\Rightarrow$: ✓

$\Leftarrow$: algoritmus adta M-et

- ha M-et lefedi: ok
- ha nem: látjuk $(F_1 \cup F_2) - (L_1 \cup L_3)$ él nincs.
  más szóval $N(F_1 \cup F_2) = L_2$
  ebből $|F_2| = |L_2| \Rightarrow |F_1 \cup F_2| > |L_2| \Rightarrow X = F_1 \cup F_2$ sérti a Hall feltételt

Tétel: Frobenius

G páros $(G(F, L, E))$, és $\exists$ teljes párosítás (tp) $\iff$

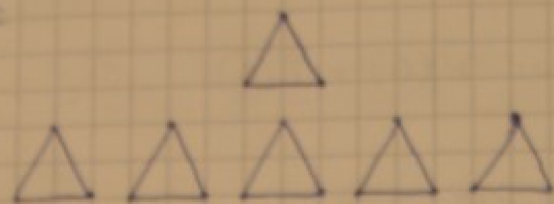
$\iff$ 1, $|F| = |L|$
2, $\forall X \subseteq F$ $|N(X)| \ge |X|$

Biz:

$\Rightarrow$: ✓

$\Leftarrow$: Hall-tétel: $\exists$ F-et lefedő párosítás, de $|F| = |L| \Rightarrow$ ez tp.

Pl.



Felső Δ minden pontját összekötjük az alsókkal

Ha volna tp, minden lenti Δ-nek lenne olyan csúcsa ami. Egy Δ-nak viszont csak 3 pontja van, így a fentinek is

Tétel. Tutte.

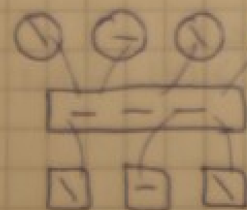
/* Bárhogyan k pontot törölve, legfeljebb k db páratlan komponens ($C_p(H)$) keletkezik. */

$C_p(H)$: H páratlan pontú komponenseinek száma.
G − X: G-ből X-beli csúcsok elhagyása

G-ben ∃ tp ⇔ $\forall X \subseteq V(G)$ $c_p(\underbrace{G-X}_{k}) \le |X|$

Biz:
⇒ nem kell
⇐:

⇒



páratlan komponensek G-X-ben k

X-ben van ≥ k pont

páratlan sok pontot önmagában belül párosítani nem lehet

	fgtln. max.	lefogó min.
él	ν	ϱ
pont	α	τ

$\varrho = \nu$ (−)

$\alpha(G) = 2$ (−, −−)
$\varrho(G) = 2$ (−, ···)

Def:

$X \subseteq V(G)$ X független ponthalmaz, ha X-beli csúcsok nem szomszédosak.
$\alpha(G)$: max. fgth. ponthalmaz mérete

Def: $Y \subseteq E(G)$ lefogó élhalmaz, ha $\forall v \in V(G)$-re illeszkedik X-beli él

Tétel: Gallai

G tetszőleges, n csúcsú

I. $\alpha(G) + \tau(G) = n$ – ha G hurokélmentes

II. $\nu(G) + \rho(G) = n$ – nincs G-ben izolált pont

Köv.

G páros $\Rightarrow$ – $\nu = \tau$

– $\alpha = \rho$

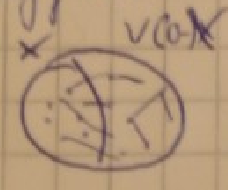
Biz.

I.

$X \subseteq V(G)$

X független $\Leftrightarrow$ $V(G) \setminus X$ lefogó

$\Rightarrow$



[...] -ből egyszerű.

1. $\alpha(G) = k$, X k pontú független $\Rightarrow$
$\Rightarrow V \setminus X$ $n-k$ pontú lefogó $\Rightarrow \tau(G) \leq n - \alpha$

2. $\tau(G)$: Z, $\tau(G)$ pontú lefogó $\Rightarrow V \setminus Z$ független $n - \tau$ pontú $\Rightarrow \alpha \geq n - \tau$

1.: $\alpha + \tau \leq n$

2.: $\alpha + \tau \geq n$