*1. Bizonyítsuk be, hogy ha 2^N –1 prím, akkor N szükségszerűen prím.*

Indirekt: tfhogy 2^N –1 prím, de N nem az. Ekkor N összetett, N=K\*L alakban írható. N=1-re látszik, hogy 2-1=1 miatt nem kell vizsgálni az állítást, tehát N>1, mivel N összetett, található olyan K és L, hogy K>1, L>1. Tehát 1<K,L<=N.

2^N-1 = 2^(K\*L)-1 = (2^(K))^L-1^L = (2^K-1)\*(...) formában szorzattá bontható, mivel a^n-b^n =

= (a-b)\*(a^(n-1)+a^(n-2)\*b+...+b^(n-1)).

1=2^1-1 < 2^K-1 <= 2^N-1, mivel 2^K-1>1, valódi osztó, azaz 2^N-1 nem prím.

*2. Lehet-e 4 egymás utáni prímszám összege prím?*

2+3+5+7=17 megfelel, de másik 4 nincsen, mert ha 4 szám összege prím, akkor az összegnek ptlnnek kell lennie, de a 2 kivételével minden prím ptln, 4 ptln szám összege meg páros, tehát nem prím. Tehát a 2-nek a 4 db prím között kell lennie, az viszont csak a fenti módon lehetséges.

*3. Ha b osztója a-nak, mik lehetnek az értékei az*

1. *) lnko(a,a+b),*
2. *lnko(2a,a-b) legnagyobb közös osztóknak?*

Tehát a=k\*b. -> 2a=2k\*b, a-b=k\*b-b=(k-1)\*b

a.) lnko (a,a+b) = lnko(k\*b,k\*b+b) = b\* lnko(k,k+1) = b\*1 =b

Másképp is belátható:

Ismert, hogy:

1.) ha d│a & d│b -> d │a-b ,

2.) ha d│a & d│b -> d│n\*a-m\*b, azaz bármely kombinációjukat is osztja. (Tóth Géza 7. gyakorlat/IV)

azaz b osztja a -t, a+b -t is.

b.) b osztja a - b -t is, így: k ps : b

lnko ( 2a , a-b ) = lnko ( 2\*k\*b , (k-1)\*b ) = b \* lnko(2k,k-1)

k ptln: 2b

4. *Biz be, hogy 4 egymást követő szám között mindig van olyan, amelyik a másik 3 mindegyikéhez relatív prím.*

Minden 2 szám osztható 2-vel, minden 3. 3-mal, legrosszabb esetben ez a 4 számból 3-at jelent, a 4-ik azonban nem osztható se 2-vel se 3-mal (4-gyel a 2 ps közül valamelyik osztható, az 5-öt már nem is kell nézni), tehát biztos hogy a 4. szám a másik 3-hoz képest relatív prím. Lehet a Tóth Géza 7.gyakorlat/II/2-ben jelölt módon is ügyeskedni, 2 ps van, 2 ptln, biztos, hogy a 2 ptln relatív prímek, mert 2 a különbségük. (pl: a-1 és a+1 legyenek a ps számok, a és a+2 ptln, II/1-ből a-1 és a , ill a és a+1 relatív prímek, és ez a+2 és a-1 vonatkozásában is elmondható).

*5.Az euklideszi algoritmussal számítsuk ki a 396 és a 210 legnagyobb közös osztóját*

lnko (396,210)=lnko(210,186)=lnko(186,24)=lnko(24,18)=lnko(18,6)=6 mert:

396:210=1 , 210:186=1, 186:24=7, 24:18=1

186 24 18 6

6. Mutassuk meg, hogy az (a³+2a)/(a^4+3a²+1) tört egyetlen a egész esetén sem egyszerűsíthető. (Vigyázat, itt nem polinomok legnagyobb közös osztójáról van szó, mert polinomok esetén megengedett a tört együttható is!)

*a*=a^4+3a²+1=a\*(a³+2a)+(a²+1)=*q\*b+m*

lnko (a^4+3a²+1,a³+2a) = lnko (a³+2a, a²+1) = lnko(a²+1,a)=lnko(a,1)=1 , mert:

a³+2a=a\*(a²+1)+a //b=a²+1, m=a

a²+1=a\*a+1 //b=a, m=1

a=a\*1+0 //b=1, a=0

az euklideszi algoritmus alapján.

7. *.) Legyen k<n. Mi a legnagyobb közös osztója az n!+k , (n+1)!+k számoknak?*

Ha k=0 : (n+1)!/n!=n+1, tehát n! .

Egyébként: Legyen d, azt akarjuk megmutatni, hogy d=k.

d>=k biztosan igaz, mert mind n!, mind (n+1)! tartalmazza k-t szorzótényezőként, mert 1<=k<n.

d=k: Ha d│n!+k => d│(n+1)\*(n!+k)=(n+1)!+nk+k. d│((n+1)!+nk+k)– ((n+1)!+k), a IV/2 alapján., így d│nk. Továbbá: n!=1\*2\*..\*k\*...\*n, azaz nk│n!, tehát d│n!, de d│n!+k-nak is, azaz d│(n!+k)-(n!)=k, tehát d│k, így d=k a d>=k feltételből.