Matematika A1 1. vizsga

2021. december 20.

1. (10+10 pont)

   (a) Igazoljuk, hogy $(A \cap B) \setminus (A \setminus C) = A \cap B \cap C$ tetszőleges A, B, C halmazok esetén.

   (b) Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely az $A(2, -3, 4)$, $B(-4, 1, 0)$ pontokat összekötő szakaszt felezi, és merőleges rá.

   Megoldás

   (a) $(A \cap B) \setminus (A \setminus C) = A \cap B \cap (A \cap C^c)^c = A \cap B \cap (A^c \cup C) = (A \cap B \cap A^c) \cup (A \cap B \cap C) = \emptyset \cup (A \cap B \cap C) = A \cap B \cap C$ (minden egyenlőség **2 pont**)

   (b) A felezőpont: $(-1, -1, 2)$ (**3 pont**), a normálvektor: $(6, -4, 4)$ (**3 pont**), a síkegyenlet: $6(x+1)-4(y+1)+4(z22) = 0$ (**4 pont**), (esetleg $3x-2y+2 = -5$.)

2. (10+10 pont)

   (a) Számolja ki az $z^5 - 5z^3 - 36z = 0$ egyenlet megoldásait.

   (b) Határozza meg az $\sqrt[n]{3^{2n} + (-9)^n + n^3}$ sorozat torlódási pontjainak halmazát, limesz szuperiorját és limesz inferiorját.

   Megoldás

   (a) $z^5 - 5z^3 - 36z = z(z^4 - 5z^2 - 36) = z(z^2 - 9)(z^2 + 4) = 0$ (**5 pont**), tehát a megoldások $z = 0$ (**1 pont**), $z = \pm 3$ (**2 pont**), és $z = \pm 2i$ (**2 pont**)

   (b) Ha n páros, akkor

   $$9\sqrt[n]{2} = \sqrt[n]{2 \cdot 9^n}\sqrt[n]{3^{2n} + (-9)^n + n^3} = \sqrt[n]{2 \cdot 9^n + n^3} \le \sqrt[n]{3 \cdot 9^n} = 9\sqrt[n]{3},$$

   és mindkét oldal határértéke 9, így a résszorozaté is az (**5 pont**) .
   Ha n páratlan,9 akkor1 $\sqrt[n]{3^{2n} + (-9)^n + n^3} = (\sqrt[n]{n})^3 \to 1$. (**2 pont**).
   A torlódási pontok halmaza $\{1, 9\}$ (**1 pont**), a limesz inferior 1 (**1 pont**), a limesz szuperior pedig 9 (**1 pont**).

3. (20 pont) Végezzünk teljes függvényvizsgálatot, és ábrázoljuk az $f(x) = (x^2 - 4x - 5)e^x$ függvényt.

   Megoldás. I. $D_f = \mathbb{R}$ (**1 pont**)
   II. $f(0) = -5$, $f(x) = 0$, ha $x = 5$ vagy $x = 1$ (**2 pont**)
   III. így a függvény nem páros, nem páratlan, nem periodikus.(**1 pont**)

IV. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ (**1 pont**)

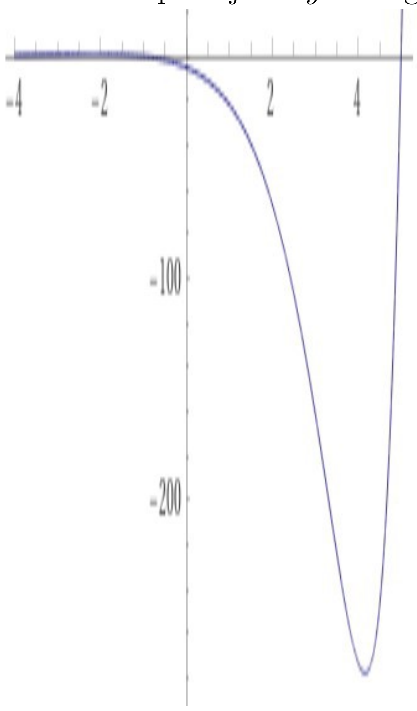
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-4x-5}{e^{-x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x-4}{-e^{-x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{e^{-x}} = 0$ (**2 pont**).

V. Monotonitás: $f'(x) = (x^2-2x-9)e^x$ (**1 pont**) zérushelyei $1 \pm \sqrt{10}$ (**1 pont**), tehát f monoton nő a $(-\infty, 1-\sqrt{10})$ és $(1+\sqrt{10}, \infty)$ intervallumon, és monoton csökkenő az $(1-\sqrt{10}, 1+\sqrt{10})$ intervallumon (**3 pont**).

VI. konvexitásvizsgálat: $f''(x) = (x^2-11)e^x$ (**1 pont**) zérushelyei $\pm\sqrt{11}$ (**1 pont**), tehát f konvex a $(-\infty, -\sqrt{11})$ és $(\sqrt{11}, \infty)$ intervallumon, és konkáv a $(-\sqrt{11}, \sqrt{11})$ intervallumon (**3 pont**).

VII. $-\infty$-ben aszimptotája az $y=0$ egyenes, ∞-ben nincs aszimptotája (**1 pont**)

VIII.



IX. $R_f = [f(1+\sqrt{10}), \infty)$ (**1+1 pont**)

4. (20 pont) Határozzuk meg az $f(x) = \dfrac{x^4+1}{x^3-x^2}$ függvény primitív függvényét.

Megoldás. $\dfrac{x^4+1}{x^3-x^2} = \dfrac{x(x^3-x^2)+(x^3-x^2)+x^2+1}{x^3-x^2} = x+1+\dfrac{x^2+1}{x^3-x^2}$ (**5 pont**)

$$\frac{x^2+1}{x^3-x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} = \frac{A(x^2-x)+B(x-1)+Cx^2}{x^3-x^2} \qquad \textbf{(5 pont)}$$

Itt $A+C=1$, $B-A=0$, $-B=1$, tehát $A=B=-1$, $C=2$ (**5 pont**), és

$$\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2}\,dx = \frac{x^2}{2} + x - \ln|x| + \frac{1}{x} + 2\ln|x-1| + c. \qquad \textbf{(5 pont)}$$

5. (20 pont) Számoljuk ki az $\int_0^{\frac{2\pi}{3}} |\sin^2 x \cos^3 x| \, dx$ integrált.

Megoldás. $\sin^2 x \cos^3 x = \sin^2 x(1 - \sin^2 x)\cos x$, (**3 pont**) tehát

$$\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx = \int \sin^2 x \cos x - \sin^4 x \cos x \, dx = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + c. \qquad (\textbf{6 pont})$$

$\sin^2 x \geq 0$, míg $\cos^3 x \geq 0$, ha $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, és $\cos^3 x \leq 0$ ha $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$, (**4 pont**) így

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} |\sin^2 x \cos^3 x| \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^3 x \, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \sin^2 x \cos^3 x \, dx =$$

$$= \left[\frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} - \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{9\sqrt{3}}{160} \qquad (\textbf{7 pont})$$

IMSC. (8 pont) Igazoljuk, hogy az $f(x) = \operatorname{sh} x^2$ függvény 0 középpontú Taylor-polinomja csak páros kitevőjű tagokat tartalmaz.

Megoldás. A Taylor polinom együtthatói $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ (**1 pont**). A függvény összes deriváltja polinom és hiperbolikus függvény kompozíciója, illetve szorzata, így akárhányszor folytonosan differenciálható. (**1 pont**) f páros függvény (**1 pont**), deriváltja páratlan (**2 pont**):

$$f'(-x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{h} = -f'(x),$$

páratlan függvény deriváltja páros (**2 pont**):

$$f'(-x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-f(x-h) + f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{-h} = f'(x).$$

Így a függvény minden páratlanadik deriváltja páratlan és folytonos, így a 0 pontban értéke 0 (**1 pont**).