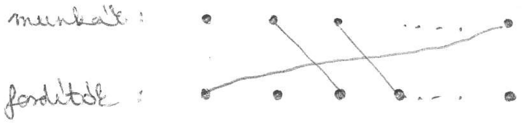
2006.09.11.

# Lineáris programozás



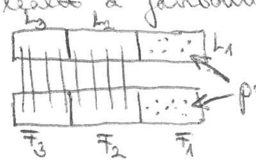
← ezek a párosítások lehetségesek

Cél: a lehető legtöbb munkát végezzük el

Mo.: maximális párosítás keresése

A szaggatott éleket vesszük be a párosításba a másik 2 már behúzott él helyett, így nő a párosítások száma. – javítóutas algoritmus

Ha leállt a javítóutas algoritmus, akkor:



párosítatlanok

$L_2$: eljuthatunk ide $F_1$-ből alternáló úton keresztül

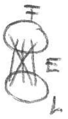
$F_1$ és $F_2$ párjai a max. párosításban $= L_2$

$N(F_1 \cup F_2) = L_2$

Tehát tényleg max. párosítást találtunk.

Adott: egy páros gráf: $G(F, L, E)$

$w: E \to \mathbb{R}$ (minden élhez rendel egy számot)



Keressük: M egy párosítás

$\max_{M} \sum_{e \in M} w(e)$ (maximalizáljuk az M-beli élek összsúlyát)

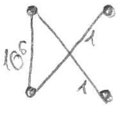
} optimum assignment

Adott: $G(F, L, E)$ (feltesszük, hogy G-ben ∃ teljes párosítás)

$w: E \to \mathbb{R}$

Keressük: M egy teljes párosítás

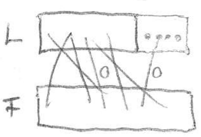
$\max_{M} \sum_{e \in M} w(e)$ (maximalizáljuk az M-beli élek összsúlyát)



max. párosítás: $10^6$

max. teljes párosítás: 2

Visszavezetjük az 1. feladatot a 2. feladatra:

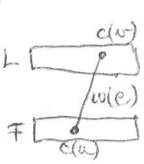


A kisebb ponthalmazt kiegészítjük annyi ponttal, hogy a 2 halmazban ua.-an legyenek.

Behúzunk 0 súlyú éleket, ahol csak lehet, amik még nincsenek összekötve

A negatív súlyú éleket már az elején töröljük.

Hogyan bizonyítjuk be, hogy amit találtunk, az tényleg max. teljes párosítás?



**Def:** Címkézés:

$c: F \cup L \to \mathbb{R}$

$\forall uv \in E$-re $\quad c(u)+c(v) \geq w(e)$

$$\sum_{e=uv\in M} w(e) \leq \sum_{e=uv\in M} c(u)+c(v) = \sum_{v\in F\cup L} c(v)$$

↑ teljes párosítás

**Lemma:** M teljes párosítás; c címkézés. Ha $\forall e\in M$-re $c(u)+c(v)=w(e)$, akkor M max. összsúlyú teljes párosítás.

**Egerváry-algoritmus:**

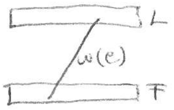
Nyilvántartjuk: M párosítás
c címkézés

Az $e=uv$ élet piros élnek nevezzük, ha $c(u)+c(v)=w(e)$.

M minden éle piros legyen.

Cél: M teljes párosítás

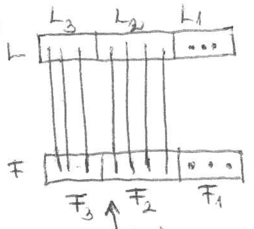
0. lépés: $M = \emptyset$



$$c(v)=\begin{cases} 0, & \text{ha } v\in L \\ \max\limits_{t\in L} w(vt), & \text{ha } v\in F \end{cases}$$

1. lépés: M-ből indulva a piros részgráfban max. párosítás legyen M'. Ha M' teljes párosítás, akkor kész vagyunk és kiadjuk M'-t.

2. lépés:



párosításbeli piros élek

Mivel M' maximális, ezért (készítsük el az előző felosztást) $F_1\cup F_2$ és $L_1\cup L_3$ között nincs piros él.

$$\delta = \min_{\substack{u\in F_1\cup F_2 \\ v\in L_1\cup L_3}} \{c(u)+c(v)-w(e) \mid uv=e\in E\} \overset{\downarrow}{>} 0$$

Elkészítünk egy új címkézést a régi címkézés segítségével.

$$c'(v)=\begin{cases} c(v)-\delta, & \text{ha } v\in F_1\cup F_2 \\ c(v)+\delta, & \text{ha } v\in L_2 \\ c(v), & \text{egyébként} \end{cases}$$

Visszatérünk az 1. lépésre M'-vel és c'-vel.

**Áll**: c' is címkézés

biz.: $c(u)+c(v) \geq w(e)$

$\underset{uv \in E}{c(u)+c(v)}$ csökken $\Leftrightarrow$ $u \in F_1 \cup F_2$ ; $v \in L_1 \cup L_3$

De pont csak $\delta$-val csökken és igaz lesz: $c'(u)+c'(v) \geq w(e)$

P = piros részgráf

P-ből kikerül $e=uv$, ha: $u \in F_3$ ; $v \in L_2$

$\Rightarrow$ M' élei pirosak maradnak

$\Rightarrow$ az $L_2$-beli lányok továbbra is elérhetőek $F_1$-ből

P-be bekerül $e=uv$ $\Leftrightarrow$ e olyan $F_1 \cup F_2$ és $L_1 \cup L_3$ között menő él, ahol a $\delta$ minimum felvétetik
(legalább 1 ilyen él van)

$\Rightarrow$ Legfeljebb $|F|=|L|=n$ ciklus után M nő, mert kiürül $L_3$ és az új él csak $L_1$-be mehet.

$\Rightarrow$ Legfeljebb $n^2$ ciklus után megvan a teljes párosítás.

$\Rightarrow$ $O(n^2e)$ lépésszámban végetér az algoritmus.

2006. 09. 14.

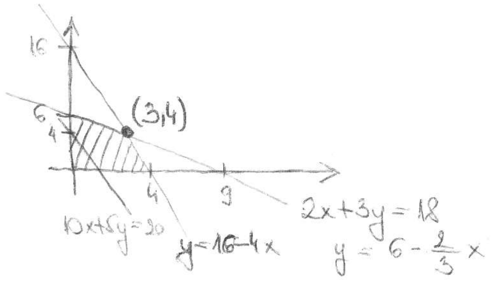
Drakula-művek:

| 1. szörny | 2. szörny | raktár |
|---|---|---|
| 4 fej | 1 fej | 16 fej |
| 2 láb | 3 láb | 18 láb |
| ↓ x db | ↓ y db | |

profit: 1. szörny: 10 dollár
2. szörny: 5 dollár

$$\left.\begin{array}{r} 4x+y \leq 16 \\ 2x+3y \leq 18 \\ x, y \geq 0 \end{array}\right\}$$

$\max 10x+5y=S$



pl. 20dolláryi profit megvalósítható

$y = \frac{S}{5} - 2x$ Mi lesz a legnagyobb lehetséges S?

$S = 10 \cdot 3 + 5 \cdot 4 = \underline{\underline{50}}$ a max. profit

Ált. lin. programozási feladat:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n} \leq b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn} \leq b_m \\ \max c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \end{array}\right\} \text{LP alapfeladata}$$

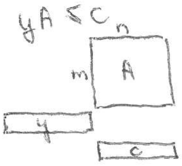
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad Ax \leq b$$

$c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$

LP alapfeladata:
$\max \{cx : Ax \leq b\}$

Megj.: $2x+3y=7$ helyett: $2x+3y \leq 7$
$-2x-3y \leq -7$

$yA \leq c$



Nincs szigorú egyenlőtlenség a feltételek között! (Mert akkor nem lenne maximum.)

Esetleges problémák:

- van-e megoldás? ($Ax \leq b$ megoldható-e)
- $cx$ korlátos-e a megoldáshalmazon? pl. $\max\{x : x \geq 1\}$
- mennyi a maximum?

$\min\{cx : Ax \leq b\} = -\max\{(-c)x : Ax \leq b\}$ A min. és max. feladatok egymásba átalakíthatóak.

## Fourier-Motzkin elimináció:

Az $n$ változós $Ax \leq b$ egyenlőtlenségrendszert visszavezetjük egy $n-1$ változós $A^*x^* \leq b^*$ egyenlőtlenségrendszerre úgy, hogy: $Ax \leq b$ megoldható $\Leftrightarrow$ $A^*x^* \leq b^*$ megoldható

$Ax \leq b \rightsquigarrow A^*x^* \leq b^*$

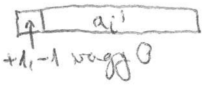
$(A|b) \rightsquigarrow (A^*|b^*)$

Szabad $\lambda > 0$-val sorokat szorozni.
Elérhetjük azt, hogy $A$ első oszlopában csak $-1, 0, 1$ szerepel.

pl.

$Ax \leq b$ megoldható $\Rightarrow$ $A_0x' \leq b_0$ megoldható
$x'$ kiegészíthető-e egy megfelelő $\lambda$-val, ami mo.-a lesz az eredeti feladatnak

A $i$. sora:



1. eset: ha J üres

$\forall i \in I$-re $\lambda + a_i'x' \leq b_i$

$\lambda \leq b_i - a_i'x'$ Így kapunk $|I|$ db felső becslést $\lambda$-ra.

Legyen $\lambda = \min_{i \in I}\{b_i - a_i'x'\}$. Ezzel a $\lambda$-val kiegészíthető $x'$.

Ekkor $(A^*|b^*) = (A_0|b_0)$

Ha I üres, akkor hasonló a gondolatmenet.

2. eset: $I$ és $J$ is nemüres

$\forall i \in I$-re $\quad \lambda + a_i' x' \leq b_i \quad\quad \lambda \leq b_i - a_i' x'$

$\forall j \in J$-re $\quad -\lambda + a_j' x' \leq b_j \quad\quad a_j' x' - b_j \leq \lambda$

$\exists \lambda \iff \forall i \in I, j \in J$-re $\quad a_j' x' - b_j \leq b_i - a_i' x$

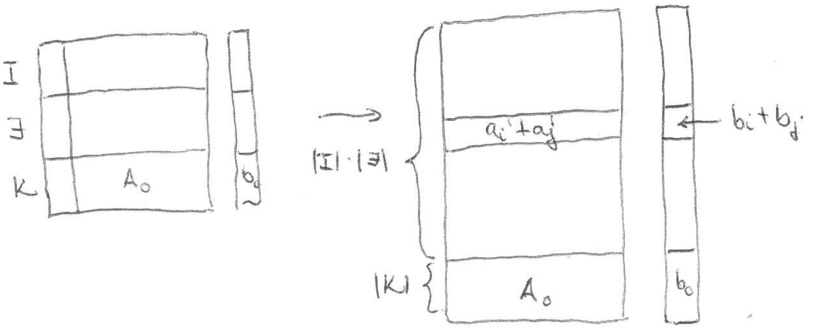
$(a_i' + a_j') x' \leq b_i + b_j \quad \forall i \in I, j \in J$-re ← Ha ez teljesül, akkor $x'$ kiegészíthető egy alkalmas $\lambda$-val $x$-szé.

$Ax \leq b$ vissza van vezetve erre: $A_0 x' \leq b_0$

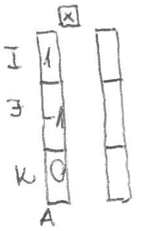
n változós

$(a_i' + a_j') x' \leq b_i + b_j \quad \forall i \in I, j \in J$

n-1 változós



n=1:



Ha $\exists k \in K$, hogy $b_k < 0$, akkor nem megoldható.
$I$-ből: $x \leq b_i$
$J$-ből: $x \geq -b_j$
Ha $\exists i \in I, j \in J$, hogy $b_i < -b_j$, akkor nem megoldható.

} Egyébként megoldható.

pl.

$$\left.\begin{aligned} x+y+z &\leq 1 \\ 2x-y+z &\geq 1 \\ x+4y-z &\geq 2 \\ x,y,z &\geq 0 \end{aligned}\right\} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -4 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ -1 & -4 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2/3 & -1/3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 5/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2/5 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} z \leq 0 \\ z \leq 1 \\ z \leq 2/5 \\ z \leq 1 \\ -z \leq 0 \end{array} \Rightarrow z = 0$$

$\Downarrow$

$0; \frac{1}{3} \leq y \leq \frac{1}{3}; 1$

$\Downarrow$

$y = \frac{1}{3}$

Az első mátrixból: $\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

$Ax \leq b$ Hogyan láthatjuk be, ha nincs megoldás?

Tfh. $\exists y$, hogy $yA = 0$, $y \geq 0$, $yb < 0$. $\Rightarrow$ Ekkor $Ax \leq b$ nem megoldható.

biz: ha $\exists x$ megoldás

$$\underset{\substack{\uparrow \\ yA=0}}{0 =} (yA)x = y(Ax) \underset{\substack{\uparrow \\ Ax \leq b;\ y \geq 0 \\ (\text{ez fontos feltétel})}}{\leq} yb < 0 \ \lightning$$

2006.09.18.

<u>Tétel:</u> Ha $A, b$ adott, akkor az alábbi (1) és (2) közül pontosan az egyik megoldható.

(1) $Ax \leq b$

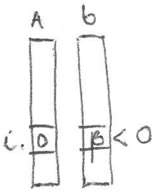
(2) $yA = 0$; $y \geq 0$; $yb < 0$ (Ez a Farkas-lemma.)

biz: (1) és (2) egyszerre nem megoldható ✓

Belátjuk, hogy ha (1) nem, akkor (2) megoldható.

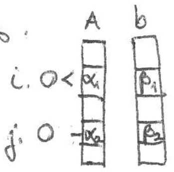
Teljes indukcióval:

$n=1$: 1. eset:



(1) nem megoldható. Ekker legyen $y = \boxed{0 \cdots 0 \,|\, \overset{i.}{1} \,|\, 0}$, ezzel (2) megoldható.

2. eset:



(1) nem megoldható, mert egy felső becslés kisebb egy alsó becslésnél.

$x \leq \frac{\beta_1}{\alpha_1}$ $x \geq -\frac{\beta_2}{\alpha_2}$ Azaz: $\frac{\beta_1}{\alpha_1} < -\frac{\beta_2}{\alpha_2}$

Ekker legyen $y = \boxed{0 \,|\, \overset{i.}{\alpha_2} \,|\, 0 .. 0 \,|\, \overset{j.}{\alpha_1} \,|\, 0}$ $\Rightarrow$ $yA = \alpha_2\alpha_1 - \alpha_1\alpha_2 = 0$

$yb = \alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2 < 0$

$y \geq 0$

Indukciós lépés:

(2) megoldásában $y$ helyett $\lambda y$-ra is áttérhetünk $(\lambda > 0)$

(2) megoldható $\Leftrightarrow$ $\left.\begin{array}{l} yA = 0 \\ y \geq 0 \\ yb = -1 \end{array}\right\}$ megoldható $\Leftrightarrow$ $\begin{array}{l} y \cdot (A|b) = (0, \ldots, 0, -1) \\ y \geq 0 \end{array}$ megoldható $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $(A|b)$ soraiból kifejezhető a $(0, \ldots, 0, -1)$ vektor nemnegatív együtthatós lin. komb.-val

Tfh. $(A|b)$ nem megoldható, n változós rendszer. Ebből kapjuk az $(A^*|b^*)$ n-1 változós, szintén nem megoldható rendszert. Az indukciós feltevés miatt erre igaz a tétel.

$\Rightarrow (A^*|b^*)$ soraiból kifejezhető a $(0, \ldots, 0, -1)$ vektor nemneg. eh.-s lin. komb.-val

nem egyforma hosszúak

$\Downarrow$

$(A|b)$ soraiból is kifejezhető a $(0, \ldots, 0, -1)$ vektor nemneg. eh.-s lin. komb.-val

$\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{smallmatrix} A^* | b^*\right)$ soraiból is kifejezhető a $(0, \ldots, 0, -1)$ vektor nemneg. eh.-s lin. komb.-val

**Tétel:** (Farkas-lemma): Az (1) és (2) közül pontosan az egyik megoldható.

$(1)\ Ax=b\ ;\ x\geq 0$

$(2)\ yA\geq 0\ ;\ yb<0$

biz.: (1) és (2) egyszerre nem megoldható, mert:

$$0\leqslant (yA)x = y(Ax) = yb < 0 \quad \lightning$$

Ha (1) nem, akkor (2) megoldható:

$Ax=b$ helyett: $Ax\leqslant b$

$(-A)x\leqslant -b$

$x\geq 0$ helyett: $(-E)x\leqslant 0$ $\Rightarrow$

$$\begin{array}{|c|}\hline A \\ \hline -A \\ \hline -E \\ \hline\end{array} \begin{array}{c} \leqslant \\ \leqslant \\ \leqslant \end{array} \begin{array}{|c|}\hline b \\ \hline -b \\ \hline 0 \\ \hline\end{array} \quad \otimes$$

$\otimes$ nem megoldható $\Rightarrow \exists y$, hogy $y\cdot\begin{pmatrix}A\\-A\\-E\end{pmatrix}=0,\ y\geq 0,\ y\cdot\begin{pmatrix}b\\-b\\0\end{pmatrix}<0$ (előző tételből)

$$y = \boxed{\ y_1\ |\ y_2\ |\ y_3\ }$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} y_1A-y_2A-y_3=0 \\ y_1b-y_2b<0 \\ y_1,y_2,y_3\geq 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} (y_1-y_2)A=y_3 \\ (y_1-y_2)b<0 \\ y_1,y_2,y_3\geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$y_1-y_2$ lesz a mi $y$ vektorunk!

**Tétel:** Az (1) és (2) közül pontosan az egyik megoldható.

$(1)\ Ax=b$

$(2)\ yA=0\ ;\ yb\neq 0$

biz.: egyszerre nem megoldhatóak ✓

Ha (1) nem, akkor (2) igen:

$Ax=b \rightarrow Ax\leqslant b$ nem megoldható $\Rightarrow \exists y:\ y\begin{pmatrix}A\\-A\end{pmatrix}=0;\ y\geq 0;\ y\begin{pmatrix}b\\-b\end{pmatrix}<0$

$(-A)x\leqslant -b$

$$y = \boxed{\ y_1\ |\ y_2\ }$$

$$\Downarrow$$

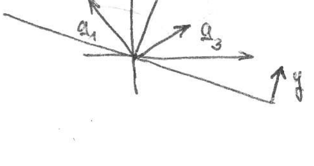
$$\left.\begin{array}{l} y_1A-y_2A=0 \\ y_1b-y_2b<0 \\ y_1,y_2\geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} (y_1-y_2)A=0 \\ (y_1-y_2)b<0 \end{array}$$

Megj.: $(1)\ Ax=b;\ x\geq 0$

$(2)\ yA\geq 0;\ yb<0$

$A=(a_1|\dots|a_m)$

$b=\left(\vdots\right)$



(1) jelentése: $b$ benne van az $a_i$-k által kifeszített kúpban

(2) jelentése: van olyan $y$ normálvektorú sík, amely $b$-t separálja az $a_i$-ktől

Mostantól feltesszük, hogy $Ax \leq b$ megoldható.
$cx$ korlátos-e a megoldáshalmazon?

**Áll:** Ha $\exists z$, hogy $Az \leq 0$; $cz > 0$, akkor $cx$ nem felülről korlátos $Ax \leq b$ mo. halmazán.

biz: Legyen $x_0$ megoldás.

$$x_\lambda = x_0 + \lambda \cdot z \quad (\lambda \geq 0)$$

Ekkor $x_\lambda$ is megoldás: $Ax_\lambda = \underbrace{Ax_0}_{\leq b} + \underbrace{\lambda}_{0\leq} \cdot \underbrace{Az}_{\leq 0} \leq b$

$cx_\lambda = \underbrace{cx_0}_{} + \underbrace{\lambda}_{\geq 0} \cdot \underbrace{cz}_{> 0}$ ← ez felülről nem korlátos ✓

Ha $cx$ felülről korlátos, akkor $\underbrace{\nexists z, \text{amire } Az \leq 0; cz > 0.}$

$\Updownarrow$ Farkas-lemma

$\exists y$, amire $yA = c$; $y \geq 0$

**Tétel:** $Ax \leq b$ megoldható

$$\begin{tikzcd} cx \text{ felülről korlátos} \arrow[r, Rightarrow] & \nexists z : Az \leq 0;\ cz > 0 \arrow[r, Leftrightarrow] & \exists y : yA = c;\ y \geq 0 \arrow[ll, Rightarrow, bend left, "\circledast"] \end{tikzcd}$$

biz: ⊛: $cx = (yA)x = y(Ax) \leq yb$

$Ax \leq b$, $y \geq 0$ ↑ ; $yb$ ← felső korlát $cx$ értékére

Az az érdekünk, hogy $yb$ értéke a lehető legkisebb legyen: $\min\{yb : yA = c;\ y \geq 0\}$

$\max\{cx : Ax \leq b\}$ duálisa: $\min\{yb : yA = c;\ y \geq 0\}$
primál program — duál program

2006.09.21.

Ha $Ax \leq b$ megoldható és $cx$ felülről korlátos (a mo. halmazon), akkor:

(i) $\exists y : yA = c,\ y \geq 0$ ($y$ a duális megoldása) és az $yb$ célfv. alulról korlátos (a mo. halmazon)

(ii) $\max\{cx : Ax \leq b\} \leq \min\{yb : yA = c,\ y \geq 0\}$

pl. primál:

$$\max 10x_1 + 5x_2$$
$$4x_1 + x_2 \leq 16$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 18$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 16 \\ 18 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c = (10\ \ 5)$$

duál: $y = (y_1\ y_2\ y_3\ y_4)$

$$\min 16y_1 + 18y_2$$
$$4y_1 + 2y_2 - y_3 = 10$$
$$y_1 + 3y_2 - y_4 = 5$$
$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

→

$$\min 16y_1 + 18y_2$$
$$4y_1 + 2y_2 \geq 10$$
$$y_1 + 3y_2 \geq 5$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

↑ duális ekvivalens alakja

Primál:
$\max\{cx : Ax \leqslant b,\ x \geqslant 0\}$

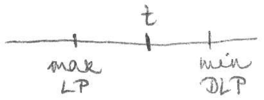
$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$(\, y_1 \mid y_2 \,)$
↑
az y vektor

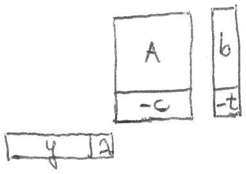
Duális ekvivalens alakja:
$\min\{yb : yA \geqslant c,\ y \geqslant 0\}$
(Azért tudtuk ezt felírni, mert a primál változókra volt nemnegativitási feltétel!)

<u>Dualitás-tétel:</u> Ha $Ax \leqslant b$ megoldható és $cx$ felülről korlátos a mo. halmazon, akkor
(i) $\exists y : yA = c,\ y \geqslant 0$ és az $yb$ célfv. alulról korlátos a mo. halmazon
(ii) $\max\{cx : Ax \leqslant b\} = \min\{yb : yA = c,\ y \geqslant 0\}$

biz: (i) ✓
(ii) tudjuk, hogy $\max \leqslant \min$
indirekten. tfh. $\underset{LP}{\max} < \underset{DLP}{\min}$



Ekker $\exists t$ szám a max és min között.
Azaz nincs olyan $x$, amire: $\left.\begin{matrix} Ax \leqslant b \\ cx \geqslant t \end{matrix}\right\} \underset{\text{Farkas-lemma}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists y, \lambda \geqslant 0$, hogy: $\begin{matrix} yA - \lambda \cdot c = 0 \\ yb - \lambda t < 0 \end{matrix}$



Ha $\lambda = 0$, akkor $\exists y \geqslant 0 : yA = 0,\ yb < 0$, ezért a Farkas-lemma miatt $Ax \leqslant b$ nem megoldható. ↯
Tehát $\lambda > 0$.
Osszunk le $\lambda$-val: $\frac{1}{\lambda} yA = c$ $\quad y' = \frac{1}{\lambda} y$ jelöléssel : $y'A = c$
$\frac{1}{\lambda} yb < t$ $\qquad y'b < t$
$\frac{1}{\lambda} y \geqslant 0$ $\qquad y' \geqslant 0$

De ekkor $y'b < t < \underset{DLP}{\min}$ és $y'$ a duális megoldása. ↯

Miért létezik a $\max\{cx : Ax \leqslant b\}$?
biz: indirekten: ~~tfh.~~ $\nexists \max\{cx : Ax \leqslant b\}$
Legyen $t = \sup\{cx : Ax \leqslant b\}$.

Nincs olyan $x$, amire $\left.\begin{matrix} Ax \leqslant b \\ cx \geqslant t \end{matrix}\right\}$. $\Rightarrow \exists y' : \begin{matrix} y'A = c \\ y' \geqslant 0 \\ y'b < t \end{matrix}$
↑
duál megoldás

De ekkor $y'b$ is felső korlát és $t$-nél kisebb. ↯

$\max\{cx : Ax \leq b\}$

1947, Dantzig: szimplex módszer (exponenciális nagyságú)

Adott: $A, b, c, t$

Kérdés: Létezik-e olyan $x$, amire $Ax \leq b; cx \geq t$ ? } Ez egy eldöntési feladat.

Ez a probléma NP-beli (tanú egy olyan $x$, ami teljesíti a feltételeket)

Ha mutatok a duális feladaton egy olyan megoldást, ahol a célfv. kisebb, mint $t$, akkor beláttam, hogy $\max cx < t$. ⇒ Ez a probléma co-NP-beli.

1979, Hacsijan: polinomiális időben tudja megoldani az előző problémát (ellipszoid módszer)
1984, Karmarkar: jobb polinomiális algoritmus (belső pontos)

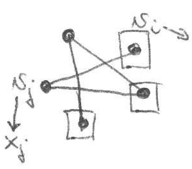
## Egészértékű programozás

IP: $\max\{cx : Ax \leq b, x \text{ egész}\}$

↳ azaz $x$ ∀ koordinátája egész

Adott: $G$ gráf

Kérdés: $\alpha(G) = ?$ (max. ftlen ponthalmaz mérete)



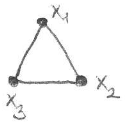
$0 \leq x_i \leq 1$   $x_i$ egész

$\forall (v_i, v_j) \in E$-re $x_i + x_j \leq 1$

$\max x_1 + x_2 + \ldots + x_n$

IP-feladat:

Adott: $A, b, c, t$
Kérdés: ∃-e olyan egész $x$, hogy $Ax \leq b; cx \geq t$ } $\in NP$ ; NP-teljes



$\max x_1 + x_2 + x_3$
$x_1 + x_2 \leq 1$
$x_1 + x_3 \leq 1$
$x_2 + x_3 \leq 1$

opt.mo.: $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{2}$ (LP feladatként)

$\max = \frac{3}{2}$

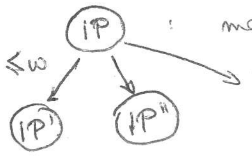
2006.09.25.

LP : $\max\{cx : Ax \leq b;\ x$ egész$\}$ IP

DLP : $\min\{yb : yA = c;\ y \geq 0;\ y$ egész$\}$ DIP

$$\max_{IP} \leq \max_{LP} = \min_{DLP} \leq \min_{DIP}$$

Branch Bound algoritmus



: $\max\{cx : Ax \leq b,\ f \leq x \leq g,\ x$ egész$\}$

LP relaxáció : → mázli : x egész

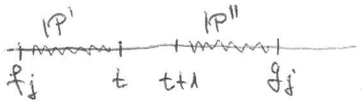
→ x nem egész felbontás

IP' : $\max\{cx : Ax \leq b,\ f' \leq x \leq g'\}$

$x_j$ : elágazási változó

$f_j \leq x_j \leq g_j$

$$f' = f \qquad g' = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ t \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} - j$$



Algoritmus:

Nyilvántartjuk: $\alpha = \{IP^{(i)} = (f_i; g_i; w_i)\}$

$x^*$ = eddigi legjobb optimum

$z^*$ = $x^*$-hoz tartozó célfv. érték ($z^* = cx^*$)

0. lépés: $\alpha = \{(IP)\}$

$x^*$ = nem definiált

$z^* = -\infty$

1. lépés: Ha $\alpha$ üres, akkor STOP.

Ha $\alpha$ nem üres, akkor válasszunk $\alpha$-ból $(IP)^{(i)} = (f_i, g_i, w_i)$

2. lépés: Ha $w_i \leq z^*$, akkor 1. lépés.

3. lépés: $(LP)^{(i)}$ megoldása

Ha nincs megoldás, akkor 1. lépés.

Ha van megoldás, akkor az $x^{(i)}$ opt. helyen $z^{(i)}$ a célfv. érték.

4. lépés: 4a) Ha $z^{(i)} \leq z^*$, akkor 1. lépés.

4b) Ha $z^{(i)} > z^*$ és $x^{(i)}$ egész, akkor $x^{(i)} \rightarrow x^*$ és 1. lépés.

$z^{(i)} \rightarrow z^*$

4c) Ha $z^{(i)} > z^*$ és $x^{(i)}$ nem egész, akkor $x_j$ elágazási változó választása.

$\underbrace{(IP^i)',\ (IP^i)''}_{w_i = z_i}$ – $\alpha$-hoz vesszük

$(IP)^{(i)}$ választása: LIFO szabály (Last In First Out): ami utoljára került a listába, azzal foglalkozunk

Haszna: - általában a m.o. mélyen van a fában, ezzel a módszerrel lefelé lépünk
- duál szimplexben nem kell újra számolni, lehet folytatni (megszorítása az előző feladatnak)

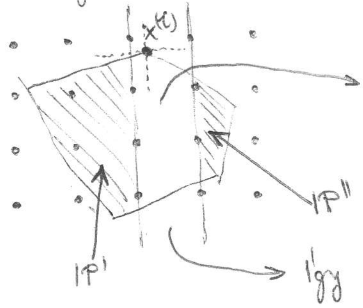
Ha nem így választunk, akkor $w_i$ max.

$x_j$, t választása  $x^{(i)}$ - $x_j$ az a változó, ami legkevésbé egész értékű

↓

valamelyik koordináta

$$t = L(x^{i})_j$$



Inkább $x_2$ van középen

Így a lehető legnagyobb részt vágtuk ki!

Def: A totálisan unimoduláris, ha ∀ négyzetes M részmátrixára $\det M = 0$ v. $= 1$ v. $= -1$.

Tétel: $\max\{cx : Ax \leq b,\ x \text{ egész}\}$

Ha A tot. unimod. és b egész, akkor $\max\limits_{LP} = \max\limits_{IP}$

$Ax \leq b$ megoldható és cx felülről korlátos.

biz: később

Ha c is egész, akkor $\max\limits_{IP} = \min\limits_{IP}$ !

$$\max_{IP} \underset{\uparrow}{\leq} \max_{LP} = \min_{DLP} \underset{\uparrow}{\leq} \min_{DIP}$$

egyenlő, ha A tot. unimod. és c egész

egyenlő, ha A tot.unimod. és b egész

$\min\{yb : yA = c,\ y \geq 0\}$

$$\left.\begin{aligned} A^T y^T &\leq c^T \\ (-A^T) y^T &\leq (-c)^T \\ (-E) y^T &\leq 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{array}{|c|}\hline A^T \\ \hline -A^T \\ \hline -E \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|}\hline c^T \\ \hline -c^T \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}$$

↓

A TU (tot.unimod.)

$$-\max\{(-b)^T y^T : \quad \}$$

Tétel: A TU marad

(i) egy sort/oszlopot (−1)-gyel szorzunk
(ii) egy sort/oszlopot ismételten hozzáveszünk
(iii) új sor/oszlop: egy egységvektort veszünk hozzá: $(0,\dots,0,1,0,\dots,0)$
(iv) transzponáljuk

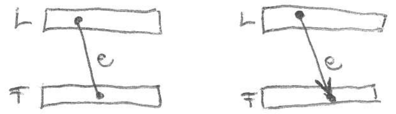
biz: (i) sor/oszlop szorzása mátrixban a determinánst (−1)-szeresére változtatja
(ii) ismétlődő sor/oszlop miatt a determináns 0
Nincs benn ⇒ előzőben is lehetett.
(iii) kifejtési tétel
(iv) triviális

Tétel: (i) Irányított gráf illeszkedési mátrixa TU.
(ii) Páros gráf illeszkedési mátrixa TU.

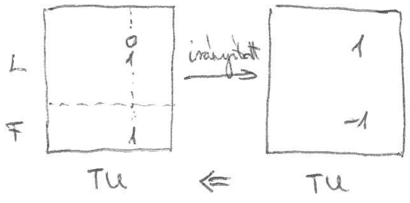
biz: (i) $k$-ra indukció ($k\times k$-as részmátrix)
1. eset: $M$-ben $\exists$ oszlop, ami legfeljebb 1db nemnulla elemet tartalmaz.
Ekkor kifejtési tétel miatt $\det M = \pm 1 \cdot \det((k-1)\times(k-1)$-es részmátrix$)$
2. eset: $M$ $\forall$ oszlopában 1db 1-es és 1db (−1)-es szerepel.
A sorok összege 0, det = 0.

2006.09.28.

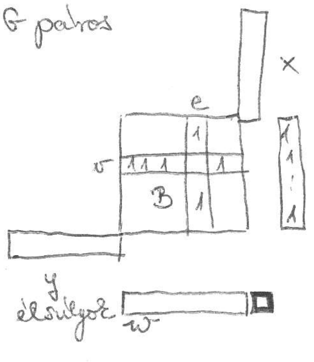
(ii)



Illeszkedési mátrix:



G páros



$e \to x(e)$

max. összsúlyú párosítást keresünk

$\max\{wx : Bx \leqslant \begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}, x \geq 0, x \text{ egész}\}$

$||$ → $x$ 0-1 értékei
→ 1-es értékű élek párosítása

$\max\{cx : Ax \leqslant b, x \geq 0\} = \min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}$

$\min\{y \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix} : yB \geq w, y \geq 0\}$

$\downarrow$

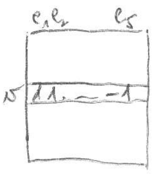
$y(u) + y(v) \geq w(e)$ ← címkézés az Egerváry-algoritmusban
$y(v) \geq 0$
$\min \sum g(v)$

Volt tétel: G páros gráfban a max. párosítás összsúlya = min{címkék összege ∀ nemneg. értékű címkézésben}

$\underset{IP}{\max} = \underset{IP}{\min}$ x, y egész ha B tot. unimod; w, $\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$ is egész

König-tétel hasonlóan: min. lefogó = max. ftlen

$e \mapsto x(e)$



$$\longrightarrow \overbrace{\sum_{\substack{e \\ \overset{\bullet\!\!\longrightarrow}{v}}} x(e)}^{\delta_x(v)} - \overbrace{\sum_{\substack{\longrightarrow\!\!\bullet \\ v}} x(e)}^{\varrho_x(v)} \implies \text{hálózati folyamok}$$

Ismétlés: hálózati folyamok

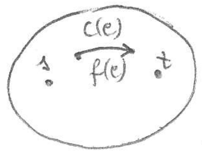
$f = ?$

$0 \leq f(v) \leq c(e)$

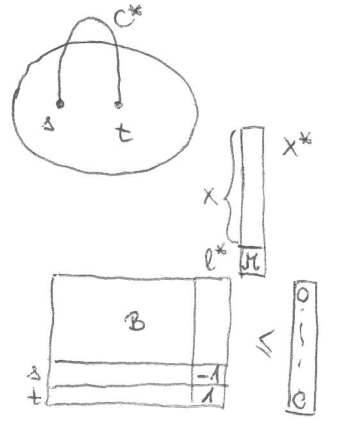
$\forall v \neq s,t$ -re $\varrho_f(v) = \delta_f(v)$

$\max \delta_f(s) - \varrho_f(s) = \delta_f(t) - \varrho_f(t)$

$\vec{G}$



**Áll:** $\left.\begin{array}{l}\forall v \neq s,t\text{-re} \quad \delta_f(v) \leq \varrho_f(v) \\ f(e) = c(e) \text{ esetén } \varrho_f(t) \geq \delta_f(s)\end{array}\right\} \iff f$ folyam



$B^* x^* \leq \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$

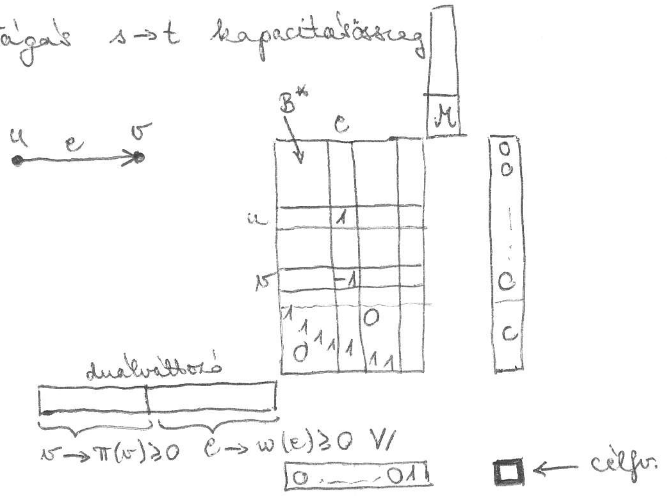
$$\longrightarrow \left.\begin{array}{l}\delta_x(v) - \varrho_x(v) \leq 0 \\ \delta_x(s) - M \leq 0 \\ -\varrho_x(t) + M \leq 0\end{array}\right] \longrightarrow \underbrace{\begin{array}{l}\delta_x(v) \leq \varrho_x(v) \\ \delta_x(s) \leq M \leq \varrho_x(t)\end{array}}_{x(e)\ M \text{ értékű folyam}}$$

$$\max\left\{(0, \dots, 0, 1)\, x^* : B^* x^* \leq \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\ x \leq c,\ x^* \geq 0\right\}$$

$\downarrow$

$$\min\left\{y \cdot \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ c\end{pmatrix} : y \cdot \begin{bmatrix} B^* \\ \hline \begin{matrix}1 & & 0 \\ 0 & \ddots & 1\end{matrix}\end{bmatrix} \geq (0, \dots, 0, 1),\ y \geq 0\right\}$$

Vágás s→t kapacitásösszeg



$\forall \underset{u \to v}{e}$ élre $\pi(u) - \pi(v) + w(e) \geq 0$

$\pi(t) - \pi(s) \geq 1$

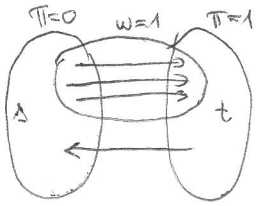
$\min \sum_{e} w(e) \cdot c(e)$

élkapacitás

0-1 értékű: az él s→t irányú-e a vágásban

$m_C \geq m_{DLP}$

Mivel a vágásokat is megadhatóak w-ként.



∀ más élre $w(e) = 0$

$\sum w(e) \cdot c(e) =$ vágás értéke

⇒ Az optimális π és w lehet egészértékű.

$$\pi'(v) = \begin{cases} 0, \text{ ha } \pi(v) \leq \pi(s) \\ 1, \text{ ha } \pi(v) > \pi(s) \end{cases} \qquad w'(e) = \begin{cases} 0, \text{ ha } w(e) = 0 \\ 1, \text{ ha } w(e) \geq 1 \end{cases}$$

<u>Áll:</u> π', w' DLP megoldása

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ 1}}{\pi'(t)} \geq \underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{\pi'(s)} + 1$$

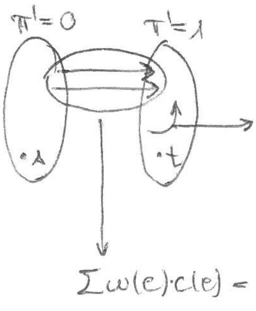
w', π' ⇒ ↯

w, π olyan, hogy ≤π(s) 0 >π(s) Ilyen nem lehet.

w és π lehet 0-1 értékű

$\sum w'(e) \cdot c(e) \leq \sum w(e) \cdot c(e)$

Célfv. értéke csak csökken az optimális esetben!



→ $w(e) = 1$ → Átváltoztatjuk 0-ra

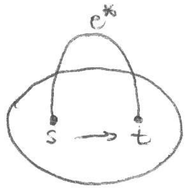
$\sum w(e) \cdot c(e)$ csökken, de ≠ 0 ↯

$\sum w(e) \cdot c(e) =$ vágásérték

$m_C \leq m_{DLP}$

minimális vágás

2006.10.02.



$\max\{(0,\dots,0,1)\,x^* : B^* x^* \leq 0,\ x^* \geq 0,\ x \leq c\}$ LP

$x^*$ egész IP

Min. költségű folyam egészértékű *

Adott: $\vec{G}$; $s,t \in V(G)$; $e \to c(e) \geq 0$; $e \to k(e)$

$\uparrow$ szállítási költség

M – mekkora folyam kell?

Keressük: f folyam $s \to t$, értéke $\geq M$

$\min \sum_e f(e)\cdot k(e)$

$\hookrightarrow \underline{k}$

$$\left.\begin{bmatrix} x \\ \hline M \end{bmatrix}\right\} x^*$$

$\min\{\underline{k}\cdot\underline{x} : B^* x^* \leq 0,\ x^* \geq 0,\ x \leq c,\ \mathcal{M} \geq M\}$

$x^*$ egész

$\in P$ probléma

* ha c(e) és M egészek

Többtermékes folyam: egy hálózaton keresztül több szállítási feladat adott.

Adott: $\vec{G}$; $(s_i, t_i)$ $i=1,\dots,k$; $e \to c(e) \geq 0$

Keressük: $e \to x_1(e), \dots, x_k(e) \geq 0$

$\forall v \neq s_i, t_i$-re $\varrho_{x_i}(v) = \delta_{x_i}(v)$ Kirchoff

$\forall e$-re $\sum x_i(e) \leq c(e)$

$\max \sum_{i=1}^{n} \left(\delta_{x_i}(s_i) - \varrho_{x_i}(s_i)\right)$ P-beli!

<u>Def</u>: $Ax \leq b$ megoldható, x egy megoldás

$A_x^=$: A azon $a_i$ soraiból áll, amikre $a_i x = b_i$ (tehát amiknél egyenlőséggel teljesül a feltétel)

x bázismo., ha $r(A_x^=) = r(A)$.

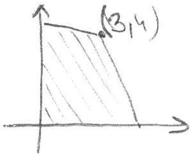
x erős bázismo., ha bázismo. és x nemnulla komponenseinek megfelelő A-beli oszlopok lin. ftlenek

1. példa: Drakula művek:

$\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix}4&1\\2&3\\-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}16\\18\\0\\0\end{pmatrix}$

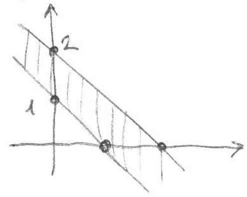
$r(A)=2$



$\forall$ csúcs bázis és erős bázismo.

Általában: A oszlopai lin. ftlenek $\Rightarrow$ bázis = erős bázis

2. példa



$1\leq x+y\leq 2$

$A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

$r(A)=1$

Mindkét egyenes összes pontja bázismo.

• : erős bázismo.

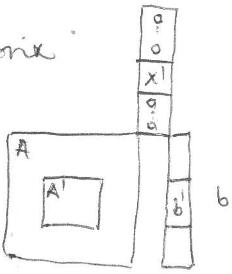
**Áll:** $Ax\leq b$

$A'$: A-beli, $r(A)\times r(A)$ méretű nem szing. részmátrix

$b'$: b megfelelő része

$A'x'=b'$ : $x'$ (egyértelmű, létező) megoldás

$x:=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ x'\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ / Az A-beli, de $A'$-be nem tartozó oszlopok helyén 0 áll. /

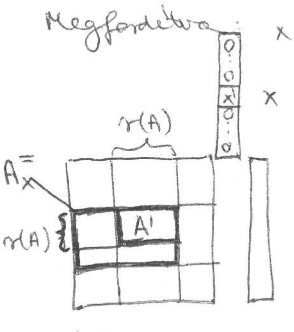


Ha x megoldása $Ax\leq b$-nek, akkor x erős bázismo. és $\forall$ erős bázismo. előáll így.

biz: x bázis: $A_x^=$ $A'$ sorai ott vannak, ezek lin. ftlenek

x erős bázis: $\neq 0$ komponenseinek megfelelő oszlopok $A'$ oszlopai (egy része) $\Rightarrow$ lin. ftlen.

Megfordítva: x erős bázis $\Rightarrow A'$



$A_x^=$-ből válasszunk $r(A)$ lin. ftlent

x $\neq 0$ komponenseinek megfelelő oszlopokat egészítjük ki $r(A)$ db lin. ftlen oszloppá

$A'$: $r(A)$ db sor / $r(A)$ db oszlop kereszteződés

↳ nem szing.

$A'x'=b'$ megoldása $x'+0$ komp. : x ✓

<u>Köv</u>: Az erős bázismo-ok száma véges : $\leq\binom{m}{r(A)}\cdot\binom{n}{r(A)}$

2006.10.09.

**Tétel** (Charatheodory): Ha $Ax \leq b$ megoldható és $\{cx : Ax \leq b\}$ felülről korlátos, $x_0$ tetsz. megoldás, akkor $\exists x_1$ erős bázismo, hogy $cx_1 \geq cx_0$

**Köv**: Ha $Ax \geq b$ megoldható, akkor $\exists$ erős bázismo.

biz: $c=0$

**1. Tétel**: A TU, b egész $\Rightarrow \max\limits_{LP} = \max\limits_{IP}$

biz: Charatheodory-tételből és a köv. állításból

**Áll**: A TU; b egész $\Rightarrow$ $Ax \leq b$ minden erős bázismo.-a egész

biz: Cramer-szabály: $x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$

**biz** (Charatheodory tétele):

**1. Lemma**: Tfh. $x_0$ nem bázismo. $\Rightarrow$ $\exists x'$, ami több sort teljesít egyenlőséggel, mint $x_0$ és $cx' \geq cx_0$

**Köv.** Charatheodory-tétel erős! nélküli változata (csak bázismo.) $(A^{=}_{x_0}, A^{=}_{x'})$

$\underbrace{x_0 < x'}_{} \underbrace{< x''}_{} < \ldots < b$ ✓

ha bázismo. .....

biz (1. Lemma): $x' = x_0 + \lambda z$ ($\lambda \geq 0$) Ekkor $z = ?$

Kell: $x'$ mo.: $a_i x' = a_i(x_0 + \lambda z) = a_i x_0 + \lambda a_i z \leq b_i$, ha $a_i x_0 = b_i$; $a_i z \leq 0$

$A^{=}_{x_0} z \leq 0$

Ha $a_i z \leq 0$, akkor OK.

Ha $a_i z > 0$, akkor $\lambda \leq \frac{b_i - a_i x_0}{a_i z}$ teljesüljön. Ez véges sok feltételt jelent.

Kell: ha $a_i$ egyenlőséggel teljesül $x_0$-ra, akkor továbbra is ($x'$-re).

$A^{=}_{x_0} z = 0$

Kell: Legyen új egyenlőséggel teljesülő sor

$\exists a_i$, hogy $a_i z > 0$. Ekkor legyen $\lambda = \min\limits_{\substack{i \\ a_i z > 0}} \frac{b_i - a_i x_0}{a_i z}$

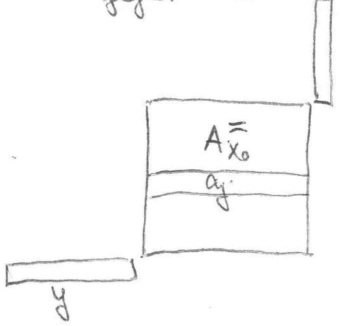
Kell: $cx' \geq cx_0$

$cx' = c(x_0 + \lambda z) = cx_0 + \lambda cz \Rightarrow cz \geq 0$

**2. Lemma**: Ha $x_0$ megoldás, de nem bázismo., akkor $\exists z$, amire:

- $A^{=}_{x_0} z = 0$
- $\exists i$, hogy $a_i z > 0$
- $cz \geq 0$

biz: Ha $x_0$ nem bázis, akkor $r(A^{=}_{x_0}) < r(A)$. $\Rightarrow \exists a_j$ sor, ami nem fejezhető ki $A^{=}_{x_0}$ soraiból lin. komb.-val.



1.) $Ax = b$

2.) $yA = 0$ ; $yb \neq 0$

1. eset : $cz = 0$ Ekkor $z$ vagy $-z$ jó

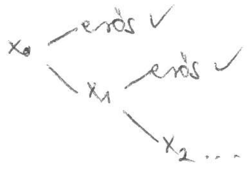
2. eset : $cz \neq 0$ Ekkor $z$-re vagy $-z$-re $cz > 0$ ✓

$A^{=}_{x_0} z = 0$

Ha: $\left.\begin{array}{l} Az \leq 0 \\ cz > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ $cx$ nem felülről korlátos $\{Ax \leq b\}$-n

Lemma: $x$ bázismo., de nem erős $\Rightarrow \exists x_1$ bázismo, aminek több 0 koordinátája van, mint $x_0$-nak és $cx_1 = cx_0$

Köv:



biz: $x_1 = x_0 + \lambda z$ $\lambda \in R$

$z = ?$ ( $\exists$ alkalmas $\lambda$)

Kell: $x_1$ bázismo.

$a_i x_1 = a_i(x_0 + \lambda z) = a_i x_0 + \lambda a_i z \leq b_i$

$Az = 0$

Kell: $x_0$ 0 koordinátái megmaradjanak

$\forall i$-re ha $x(i) = 0$, akkor $z(i) = 0$

Kell: létrejöhessen új 0 koordináta $z \neq 0$

Ha $z(j) \neq 0$, akkor $x_0(j) \neq 0$

$0 = x_1(j) = x_0(j) + \lambda z(j) \Rightarrow \lambda = -\frac{x_0(j)}{z(j)}$

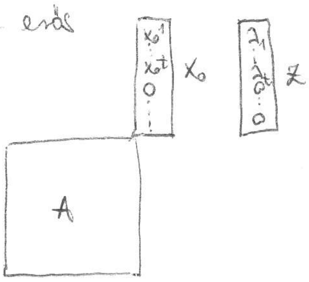
Kell: $cx_1 = cx_0$

$cx_1 = c(x_0 + \lambda z) = cx_0 + \lambda(cz)$ $cz = 0$

**Lemma:** Ha $x_0$ bázismo, de nem erős, akkor $\exists z$, amire:

- $Az = 0$
- $x_0(i) = 0 \Rightarrow z(i) = 0$
- $cz = 0$

biz: nem erős



lin. összefüggőek: $\lambda_1 \cdot [\ ] + \dots + \lambda_t \cdot [\ ] = 0$

Azaz $\exists$ nem triviális nullát adó lin. komb.-juk.

$\Rightarrow Az = 0$ $\lambda_i$-k választása miatt

$z \neq 0$ ✓

$x_0(i) = 0 \Rightarrow z(i) = 0$ a választás miatt

Ha $cz \neq 0$, akkor $c(x + \lambda z)$ nem korlátos.

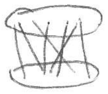
$cz > 0$ $z$ vagy $-z$

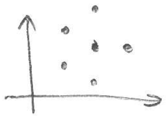
↯

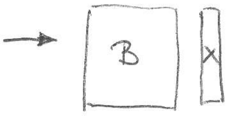
pl. Ponthalmazt $k$ színnel színezünk.

$\forall$ sorban és $\forall$ oszlopban egyenletes a színezés.

2szín:







$0 \leq x \leq \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\left\lfloor \frac{d(v)}{k} \right\rfloor \leq v \cdot x \leq \left\lceil \frac{d(v)}{k} \right\rceil$$

$$\left\lfloor \frac{d}{k} \right\rfloor \leq Bx \leq \left\lceil \frac{d}{k} \right\rceil \qquad B \cdot \begin{pmatrix} 1/k \\ \vdots \\ 1/k \end{pmatrix} = \frac{d}{k} \Rightarrow \exists \text{ egész mo. (TU alaptétel)}$$

# Matroidelmélet

2006.10.12.

$V[T]$-ből néhány vektor halmaza $E$

$X \subseteq E$ Ha lin. ftlen, akkor $X \in \mathcal{F}$ (lin. ftlen halmazok halmaza)

Tulajdonságok: (1) $\emptyset \in \mathcal{F}$

(2) $X \in \mathcal{F}$ és $Y \subseteq X \Rightarrow Y \in \mathcal{F}$

(3) $X, Y \in \mathcal{F}$, $|X| > |Y| \Rightarrow \exists x \in X - Y$, hogy $Y \cup \{x\} \in \mathcal{F}$

$G(V, E)$ gráf

Ha $X \subseteq E$ körmentes, akkor $X \in \mathcal{F}$ (gráf körmentes részgráfjainak halmaza)

(1), (2), (3) tulajdonságok itt is teljesülnek.

Legyen $E$ egy tetsz. (véges halmaz); $\mathcal{F} \subseteq \underbrace{2^E}_{\text{hatványhalmaz}}$

**Def:** Ha $(E, \mathcal{F})$ teljesíti az (1), (2), (3) tulajdonságokat, akkor matroidnak nevezzük.

Alkalmazás: pl. villamoshálózatok elmélete, összekapcsolt rúdszerkezet statikai tulajdonságai

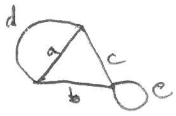
→ Összekapcsolja a lin. algebrát (mátrixok, egyenletek) és a gráfelméletet.

pl. $\begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & c \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$ Speciális matroidot reprezentál:

$E = \{a, b, c\}$ $\mathcal{F} = 2^E - E$ (lin. ftlen oszlopvektorok)

(körmentesek részhalmaza)

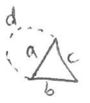
pl. $\begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$ 5 elemű halmazon ftlen részhalmazok



Ugyanazt a matroidot határozza meg.

(A matroid lin. algebrai, ill. gráfelméleti reprezentánsa.)

pl. $\begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$ $\longrightarrow$ Nincs. mo.

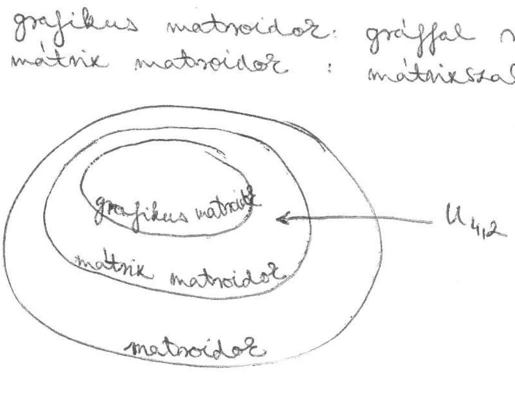


d: bármelyik 2-vel kört alkot, de külön semelyikkel sem

b, c, d kör → d az a-val párhuzamos, de d-a nem kör!

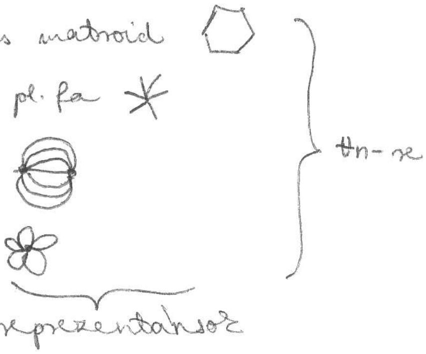
**Def:** grafikus matroidok: gráffal reprezentálhatóak

mátrix matroidok : mátrixszal reprezentálhatóak



Def: Legyen n és k két tetsz. egész szám, $0 \leq k \leq n$.
$|E| = n$ ; $\mathcal{F} = \{X \mid X \subseteq E ;\ |X| \leq k\}$
$\Longrightarrow$ $U_{n,k}$ uniform matroid

$U_{n,n-1}$ : n élű kör, grafikus matroid
$U_{n,n}$ : grafikus matroid pl. fa
$U_{n,1}$ : grafikus matroid
$U_{n,0}$ : grafikus matroid



Áll: A többi uniform matroid ($2 \leq k \leq n-2$) nem grafikus.
biz: később

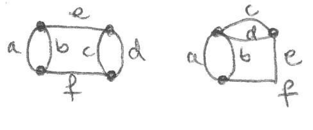
pl. $U_{n,2}$ nem grafikus: ld. fenti példa

Megj: A reprezentáns gráf nem egyértelmű
pl.  

$G \to \mathcal{M}(G)$ a G gráf körmatroidja
Ha $\mathcal{M}(G_1) \cong \mathcal{M}(G_2)$, abból NEM következik, hogy $G_1 \cong G_2$. pl.  $\cong$ 

(Gráfok gyenge izomorfiája: élek olyan kölcs. egyért. megfeleltetése, ami kört körbe, vágást vágásba visz)

$$\mathcal{M}(G_1) \cong \mathcal{M}(G_2) \iff G_1 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{gyengén izomorf}}}{\cong} G_2$$

pl. 

Ugyanazok az élek alkotnak kört.
Körtartásból következik a vágástartás.
A gyenge izomorfiát lehet csak körtartással definiálni.

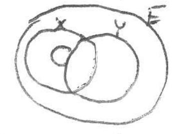
Áll: Legyen $(E, \mathcal{F})$ egy matroid és $k: E \to \mathbb{R}^+$. Keressük a $\max\limits_{X \in \mathcal{F}} \sum\limits_{x \in X} k(x)$ értéket.
($X \subseteq E$ független, ha $X \in \mathcal{F}$)
Tetszőleges $(E, \mathcal{F})$ matroidra és tetszőleges k költségfv.-re ezt a maximumot az alábbi (mohó) algoritmus megtalálja:

```
0. lépés:  $X \leftarrow \emptyset$
1. lépés:  $\max\{k(x) \mid x \notin X,\ X \cup \{x\} \in \mathcal{F}\}$
2. lépés:  ha ilyen nincs, akkor STOP. Különben $X \leftarrow X \cup \{x\}$ és vissza az 1. lépésre.
```

Megj: gráfokra működik (Kruskal-tétel)
$k \equiv 1$ élsúlyokra mátrix rangja = lin. ftlen oszlopok max. száma

biz: Ha az algoritmus leáll, akkor max. elemszámú halmazt talált.

(3) tulajdonság:



Tfh. $|X|>|Y|$. Ekkor X-ből hozzá lehet venni egy elemet Y-hoz úgy, hogy $\mathcal{F}$-beli marad.

indirekt: tfh. $B_{\text{mohó}} = \{a_1 a_2 \ldots a_r\}$
$B_{\text{opt}} = \{b_1, b_2 \ldots b_r\}$

$$\sum_{i=1}^{r} k(a_i) \overset{\circledast}{<} \sum_{i=1}^{r} k(b_i)$$

$k(a_1) \geq k(a_2) \geq k(a_3) \geq \ldots$ Ilyen sorrendben veszi az elemeket a mohó algoritmus.

$k(b_1) \geq k(b_2) \geq k(b_3) \geq \ldots$ Ilyen sorrendben számozom az elemeket.

$k(a_1) \geq k(b_1)$, mert a mohó algoritmus $a_1$-et választja először

$\circledast$ fennáll, ezért $\exists i$, hogy
$$\begin{array}{ccc} k(a_i) & \geq & k(a_{i+1}) \\ \rotatebox[origin=c]{-90}{$\geq$} & & \wedge \\ k(b_i) & \geq & k(b_{i+1}) \end{array}$$

$i+1$ a legkisebb olyan index, amire ez teljesül $i \geq 1$

$X = \{b_1, b_2, \ldots b_{i+1}\} \in \mathcal{F}$ (2) tul.

$Y = \{a_1, a_2, \ldots, a_i\} \in \mathcal{F}$ (2) tul.

$|X|>|Y| \Rightarrow \exists b_j \in X-Y,\ Y \cup \{b_j\} \in \mathcal{F}$ $j \leq i+1$

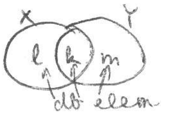
$$k(b_j) \underset{\substack{\uparrow \\ j \leq i+1}}{\geq} k(b_{i+1}) > k(a_{i+1})$$

$Y = \{a_1, a_2, \ldots, a_i, b_j\} \in \mathcal{F}$ ↯ Az alg. $a_{i+1}$-et választja $b_j$ helyett, pedig $k(b_j) > k(a_{i+1})$.

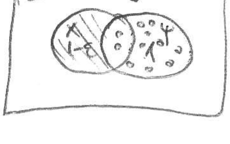
Megj: A matroidok a legtágabb struktúra, ahol a mohó algoritmus működik.

**Tétel:** Legyen E egy véges halmaz, $\mathcal{F} \subseteq 2^E$, $\emptyset \in \mathcal{F}$ és $\{X \in \mathcal{F}, Y \subseteq X \Rightarrow Y \in \mathcal{F}\}$ és a mohó algoritmus tetszőleges $k: E \to \mathbb{R}^+$ költségfv. mellett megtalálja a $\max\limits_{X \in \mathcal{F}} \sum\limits_{x \in X} k(x)$ értéket.
Ekkor tetsz. $X, Y \in \mathcal{F}$, $|X|>|Y|$-ra $\exists x \in X-Y$, hogy $Y \cup \{x\} \in \mathcal{F}$.

biz: indirekt: tfh. $\exists X; Y \in \mathcal{F}$; $|X|>|Y|$, hogy $\forall x \in X-Y$-ra $Y \cup \{x\} \notin \mathcal{F}$.



$l > m$



$$k(x) = \begin{cases} 1 & ,\ \text{ha } x \in Y \\ 1-\varepsilon & ,\ \text{ha } x \in X-Y \\ 0 & ,\ \text{különben} \end{cases}$$

A mohó algoritmus $(k+m) \cdot 1$ értéket ad.

Ha az X-eket választjuk előbb, akkor: $l(1-\varepsilon)+k \cdot 1$

$$(k+m) \cdot 1 < l(1-\varepsilon) + k \cdot 1$$
$$m < l(1-\varepsilon)$$
$$0 < \varepsilon < \frac{l-m}{l} = 1 - \frac{m}{l}$$

Ha így választjuk $\varepsilon$-t és a k költségfv.-t, akkor a mohó alg. nem jó.

(Lovász-Korte: további általánosítások: a (2) axióma gyengítése, hogy a mohó alg. még most is működik → Greedoid)

2006.10.16.

$(E, \mathcal{F})$ matroid, $\mathcal{F} \subseteq 2^E$:

(1) $\emptyset \in \mathcal{F}$

(2) $X \in \mathcal{F}$ és $Y \subseteq X \Rightarrow Y \in \mathcal{F}$

(3) $X, Y \in \mathcal{F}$ és $|X| > |Y| \Rightarrow \exists x \in X - Y;\ Y \cup \{x\} \in \mathcal{F}$

Ha $X \subseteq E$-re teljesül, hogy $X \in \mathcal{F}$, akkor $X$-et független halmaznak nevezzük.
— " — $X \notin \mathcal{F}$ — " — összefüggő — " —

A maximális méretű független halmazokat bázisoknak nevezzük.
A minimális méretű összefüggő halmazokat köröknek nevezzük.
Az $X$ halmaz által tartalmazott maximális független részhalmazok (közös) elemszáma az $X$ halmaz rangja: $r(X)$.

Ha $\mathcal{B}$ jelöli egy matroid bázisainak halmazát, akkor:

(B1) $\mathcal{B} \neq \emptyset$

(B2) Ha $X, Y \in \mathcal{B}$, akkor $|X| = |Y|$

(B3) Ha $X, Y \in \mathcal{B}$ és $\exists x \in X - Y$, akkor $\exists y \in Y$, hogy $(X - \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}$

Tétel:
Tfh. $\mathcal{B} \subset 2^E$ tetszőleges halmazrendszer, amelyre (B1); (B2) és (B3) teljesül.
$\Rightarrow$ Ekkor $\exists$ olyan matroid (és egyértelmű), melynek éppen $\mathcal{B}$ elemei a bázisai.

Tétel: Ha $r: 2^E \rightarrow \mathbb{Z}_0^+$ egy matroid rangfv.-e, akkor igazak:

(1) $0 \leqslant r(X) \leqslant |X| \quad \forall X \subseteq E$-re

(2) Ha $X \subseteq Y$, akkor $r(X) \leqslant r(Y)$.

(3) submoduláris: $\forall A, B \subseteq E$-re $r(A) + r(B) \geq r(A \cup B) + r(A \cap B)$

Tétel: Ha $r: 2^E \rightarrow \mathbb{Z}_0^+$ fv.-re (1); (2) és (3) teljesül, akkor $\exists!$ olyan matroid, amelynek ez a rangfv.-e.

Ha csak $r$ adott, akkor $\mathcal{F} = \{X : r(X) = |X|\}$.

biz (submoduláris):

$r(A \cap B) := \alpha$

$r(A \cup B) = \alpha + \beta + \gamma$

Az $A \cap B$-ben levő $\alpha$ méretű ftlen halmazt bővítem $A \cup B$-ben ftlen halmazzá, amíg csak lehet.

$$\left.\begin{array}{l} r(A) \geq \alpha + \gamma \\ r(B) \geq \alpha + \beta \end{array}\right\} \Longrightarrow r(A) + r(B) \geq r(A \cap B) + r(A \cup B)$$

Hf.: biz: $r(X) \leqslant r(X \cup \{x\}) \leqslant r(X) + 1$ a matroidaxiómák segítségével

Hf: Ha $r(X) = r(X \cup \{x\}) = r(X \cup \{y\})$, akkor $r(X) = r(X \cup \{x\} \cup \{y\})$. ← bix.

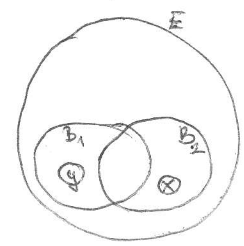
Legyen $\mathcal{M} = (E, \mathcal{F})$ egy matroid.

| $\mathcal{M}$ bázisai: | komplementerek: |
|---|---|
| $B_1$ | $E - B_1$ |
| $B_2$ | $E - B_2$ |
| ⋮ | ⋮ |

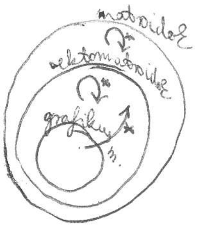
Ezek bázisai egy másik matroidnak az E halmazon.
↳ $\mathcal{M}^* = (E, \mathcal{F}^*)$

$\mathcal{M}$ és $\mathcal{M}^*$ egymás duálisai. (def. szerint)

Ahhoz hogy $\mathcal{M}^*$-ról belássuk, hogy matroid, a (B3)-at kell belátni. ((B1) és (B2) könnyen látszik)



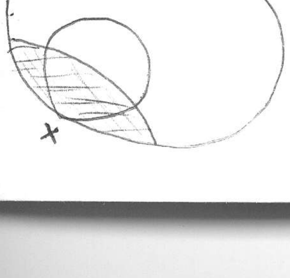
Ha G síkbarajzolható gráf és $G^*$ a duálisa, akkor $[\mathcal{M}(G)]^*$ is grafikus és $[\mathcal{M}(G)]^* = \mathcal{M}(G^*)$.
$\uparrow$
körmatroid



G tetsz. gráf.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r] \arrow[d, "\text{ha G síkbarajzolható; gráfelméleti dualitás}"'] & \mathcal{M}(G) \arrow[d, "\text{matroidelméleti dualitás}"] \\ G^* \arrow[r] & {[\mathcal{M}(G)]^*} \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] \\ & \mathcal{M}(G^*) \end{tikzcd}$$

Tfh. az E halmazon van egy matroid és egy rangfv.-e neki. Ekkor hogyan határozhatjuk meg a duális matroid rangfv.-ét?



$r(E) - r(E-X)$

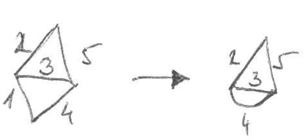
$$\underline{r^*(X) = |X| - r(E) + r(E-X)}$$

$\mathcal{M} = (E, \mathcal{F})$ egy matroid ; $x \in E$

Egy elem elhagyása matroidból : $\underbrace{(E-\{x\}, \mathcal{F}\setminus\{x\})}_{\mathcal{M}\setminus\{x\}}$-ben $X \subseteq E-\{x\}$ ftlen $\Leftrightarrow X \in \mathcal{F}$

Ha nem grafikus, hanem vektormatroidban gondolkozom, akkor?
Az elhagyás a mátrixból egy oszlop elhagyását jelenti.

„Él" összehúzása :
$\mathcal{M} = (E, \mathcal{F})$ ; $x \in E$
Egy elem összehúzása: $\mathcal{M}/\{x\} = (E-\{x\}, \mathcal{F}/\{x\})$-ben $X \subseteq E-\{x\}$ ftlen $\Leftrightarrow X \cup \{x\} \in \mathcal{F}$, ha $\{x\} \in \mathcal{F}$



Különben (azaz ha $\{x\} \notin \mathcal{F}$) legyen $\mathcal{M}/\{x\} = \mathcal{M}\setminus\{x\}$

De ez problémás, és nem így szokták definiálni az összehúzást, hanem rangfv. segítségével.

Ha $\mathcal{M} = (E, \mathcal{F})$ ; $X \subseteq E$, akkor az $\overset{\text{összehúzás}}{\mathcal{M}/X}$ matroidot az alábbi rangfv.-nyel definiálom:
$\forall U \subseteq E-X$-re $R(U) = r(U \cup X) - r(X)$ ← erre beláthatjuk a 3 tulajdonságot

Tétel: Tetszőleges $\mathcal{M} = (E, \mathcal{F})$ matroidra és $X \subseteq E$ részhalmazra teljesül: $(\mathcal{M}\setminus X)^* = \mathcal{M}^*/X$.
(Azaz az elhagyás és összehúzás egymás duálisai.)

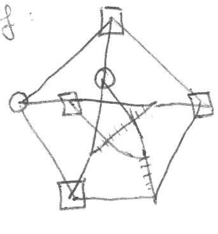
Az elhagyás és összehúzás műveletei felcserélhetőek, azaz:
$$(((\mathcal{M}\setminus\{x_1\})/\{x_2\})\setminus\{x_3\})/\{x_4\} \ldots = (\mathcal{M}\setminus\{x_1, x_3, \ldots\})/\{x_2, x_4, \ldots\}$$

Ez a minorképzés: elhagyások és összehúzások tetsz. sorrendben való elvégzése.

Wagner-tétel: $G$ síkbarajzolható $\Leftrightarrow \nexists$ benne minorként $K_{3,3}$ vagy $K_5$

Kuratowski-tétel: $G$ síkbarajzolható $\Leftrightarrow \nexists$ benne részgráfként $K_{3,3}$ vagy $K_5$ vagy ezek soros bővítése

Petersen-gráf:



Minorként benne van a $K_5$, de nem tartalmazza $K_5$ soros bővítését részgráfként, csak $K_{3,3}$ soros bővítését.

V[F]-ben reprezentálható egy matroid (F felett koordinátázható egy matroid) 2006.10.19.

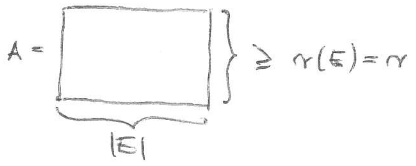
Karakterisztika:

| + | 0 | 1 | a | b |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | a | b |
| 1 | 1 | 0 | b | a |
| a | a | b | 0 | 1 |
| b | b | a | 1 | 0 |

| · | 0 | 1 | a | b |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | a | b |
| a | 0 | a | b | 1 |
| b | 0 | b | 1 | a |

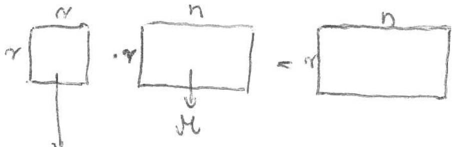
prímhatványrendű test

$\{x\}\in F$ Tfh $M(E, F)$ koordinátázható $F$ felett



Feltehető, hogy A r×n-es mátrix

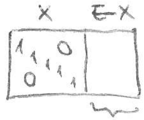
égével



← Ez ugyanazt a matroidot koordinátázza.

det≠0 → bázistrafó

Ha pl. $X \subseteq E$ egy rögzített bázis, akkor A =



bázistrafóval elérhető

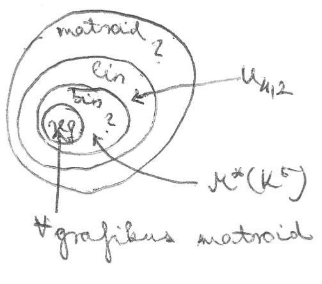
pl. $U_{4,2}$ koordinátázása

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & x \end{pmatrix}$$

GF(2) = 𝔹 (bináris test)
Bináris test felett nem is koordinátázható

$U_{4,2}$ koordinátázható F felett $\Leftrightarrow |F| > 2$

**Def:** Egy matroid reguláris, ha ∀ test felett koordinátázható.



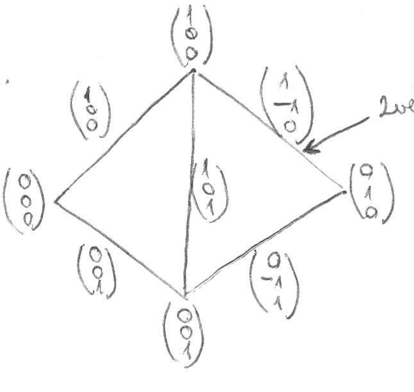
**Def:** Egy matroid bináris, ha a 𝔹 test felett koordinátázható.

**Def:** Egy matroid vektormatroid v. lineáris matroid, ha van olyan test, ami felett koordinátázható.

∀G gráfra és ∀F testre ∃ mátrix, ami M(G)-t koordinátázza F felett

/test karakterisztikája pl. 5 (legkisebb jó), ha a+a+a+a+a = 0 ∀a
ℝ karakterisztikája = 0
mod $p^k$ karakterisztikája = p
A karakterisztika a lényeg./

pl.



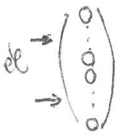
2végpont különbsége

$V(G) : \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_r, \underline{0}\}$

$E(G) : \{ij\} : \underline{e}_i - \underline{e}_j$

Ha lin. ftlen, akkor körmentes.

körmentes ⇒ lin. ftlen

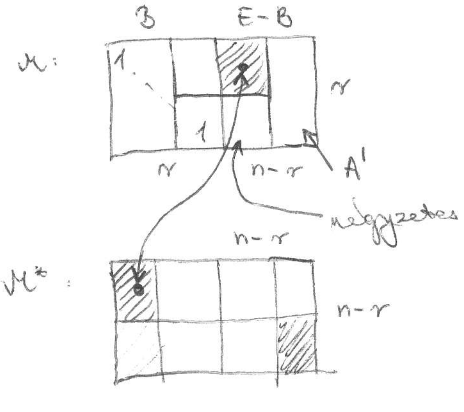


Pontot jelöl ki

∀ pont foka ≥ 2 ✓

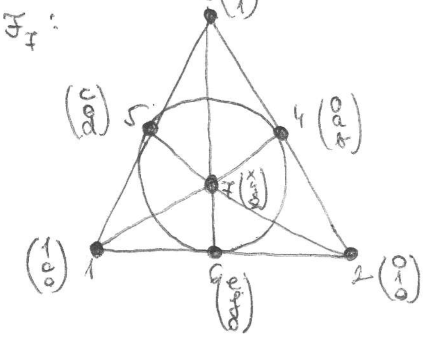
**Tétel:** Ha $M$ koordinátázható $F$ felett, akkor $M^*$ is.

bix:



Reguláris matroidra: elhagyás nem vezet ki – triviális
összehúzás (duál – elhagyás – duál)

pl. $F_7$:



$E = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ (Fano)

$F: X \subseteq E - x \quad X \in F \iff$ vagy $|X| \leq 2$
vagy $|X| = 3$, de ez a 3 nincs
egy egyenesen (vagy a körön)

$a,b \neq 0$ ; $c,d \neq 0$ ; $e,f \neq 0$ ; $x,y,z \neq 0$

$$174 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & a & y \\ 0 & b & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{matrix} az - yb = 0 \\ cz - dx = 0 \\ ey - fx = 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} z = \frac{yb}{a} \\ z = \frac{dx}{c} \end{matrix} \qquad \frac{eby}{a} = \frac{cdx}{a} = \frac{fbx}{a}$$

$$\Downarrow$$

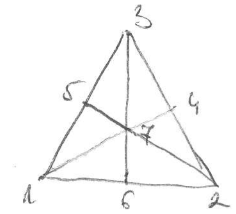
$$ade = bcf$$

$$456 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & c & e \\ a & 0 & f \\ b & d & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{matrix} cfb + ead \doteq 0 \\ ead \overset{*}{=} -bcf \end{matrix}$$

$\mathcal{F}_7$ koordinátázható $\Leftrightarrow$ ha F 2karakterisztikájú!

(Ezért nem rajzolható a síkra mint egyenesek kollineációja)

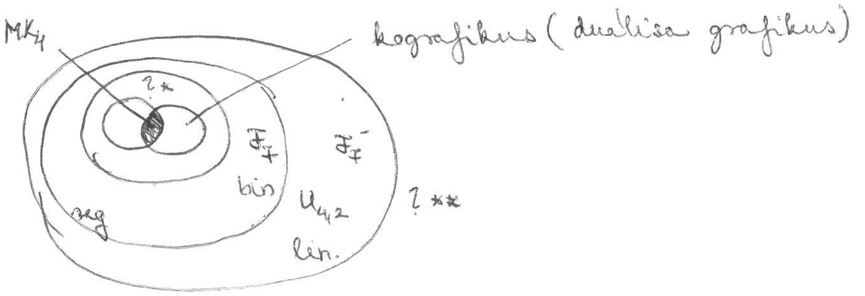
$\mathcal{F}_7^-$ :



(Antifano)

$\mathcal{F}_7^-$ koordinátázható $\Leftrightarrow$ ∀testben kivéve a binárisban

$*$ helyén ǂ



$E_1 \wedge E_2 = \phi$ $\quad \mathcal{M}_1 = (E_1, \mathcal{F}_1)$ és $\mathcal{M}_2 = (E_2, \mathcal{F}_2)$ direkt összege $\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2$ :

Az alaphalmaz $E_1 \cup E_2$ és ebben $X \subseteq E_1 \cup E_2$ ftlen $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} X \cap E_1 \subset \mathcal{F}_1 & \text{és} \\ X \cap E_2 \subset \mathcal{F}_2 \end{cases}$

**1.Áll:** Grafikus matroidok direkt összege is az. (egymás mellé rakható)

**2.Áll:** Ha $\mathcal{M}_1$ és $\mathcal{M}_2$ koordinátázható felett, akkor $\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2$ is.

biz.:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline A_1 & \emptyset \\ \hline \emptyset & A_2 \\ \hline \end{array}$$

$|E_1| + |E_2|$

(A rang összeadódik.)

$*$ $\mathcal{M}(K_5) \oplus \mathcal{M}^*(K_5)$ se grafikus, se kografikus, de reguláris

$**$ $\mathcal{F}_7 \oplus \mathcal{F}_7^-$

**Def:** Egy matroid összefüggő, ha nem áll elő két kisebb matroid direkt összegeként.

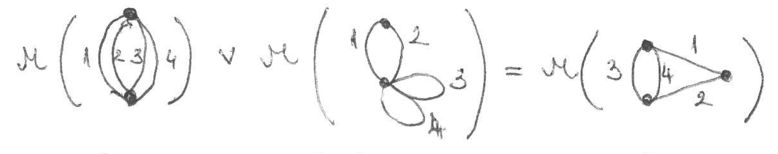
Gráfokra ekvivalens: G kétszeresen öf $\Leftarrow$ $\mathcal{M}(G)$ öf.

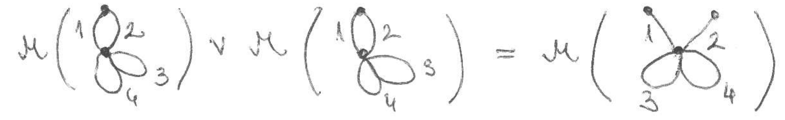
2006. 10. 26.

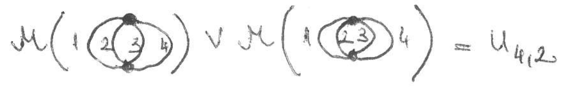
Direkt összeg: $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ ; $\mathcal{M}_1 = (S_1, \mathcal{F}_1)$ ; $\mathcal{M}_2 = (S_2, \mathcal{F}_2) \Rightarrow \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2 = (S_1 \cup S_2, \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2)$
úgy, hogy $X \in \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \Leftrightarrow \exists X = X_1 \cup X_2$, hogy $X_1 \in \mathcal{F}_1$ és $X_2 \in \mathcal{F}_2$
(Ha $\exists$ ilyen felbontás, akkor az egyértelmű $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ miatt.)

Összeg: $\mathcal{M}_1 = (S, \mathcal{F}_1)$ ; $\mathcal{M}_2 = (S, \mathcal{F}_2)$ (ua-on az S halmazon)
$\Rightarrow \mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_2 = (S, \mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2)$ úgy, hogy $X \in \mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2 \Leftrightarrow \exists X = X_1 \overset{\overset{\text{diszjunkt unió}}{\downarrow}}{\dot{\cup}} X_2$, hogy
$X_1 \in \mathcal{F}_1$ és $X_2 \in \mathcal{F}_2$
(A kettébontás nem feltétlenül egyértelmű)

pl. grafikus matroidok összege







**Tétel:** Matroidok összege matroid.

biz: 1. axióma: $\emptyset \in \mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2$ ✓

2. axióma: $X \in \mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2$ ; $Y \subseteq X \Rightarrow Y \in \mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2$

3. axióma: $X, Y \in \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ ; $|X| > |Y|$

$X = X_1 \dot{\cup} X_2$ ; $Y = Y_1 \dot{\cup} Y_2$ $\qquad X_1, Y_1 \in \mathcal{F}_1$ ; $X_2, Y_2 \in \mathcal{F}_2$

$\left.\begin{array}{l}|X_1| > |Y_1| \\ |X_2| > |Y_2|\end{array}\right\}$ Legalább az egyik teljesül $|X| > |Y|$ miatt. Ffh. $|X_1| > |Y_1|$.

Ekkor $\exists$ olyan elem, ami $\in X_1$ és $\notin Y_1$.

$X = X_1 \dot{\cup} X_2$, $Y = Y_1 \dot{\cup} Y_2$ : Az összes ilyen felbontáspár közül válasszuk azt, amelyre $|(X_2 \cap Y_1) \cup (Y_2 \cap X_1)|$ minimális.

Ekkor az előző elem $X_1 - Y$ -ban van. Vegyük ezt hozzá $Y$-hoz.
(Különben $Y_1$-et definiáljuk úgy, hogy ez az elem is benne van ↯)

**Def:** $|S| = n$ ; $\mathcal{M} = (S, 2^S) = U_{n,n}$ matroid a szabad matroid.
(Minden független benne.)

## $MPP_k$ probléma:

Input: k db matroid $M_i = (E, \mathcal{F}_i)$ $i = 1, 2, \dots, k$

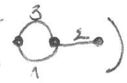
Kérdés: $\bigvee_{i=1}^{k} M_i \overset{?}{=} (E, 2^E)$ vagyis $E \overset{?}{=} \bigcup_{i=1}^{k} E_i$ úgy, hogy $E_i \in \mathcal{F}_i$ ∀i-re

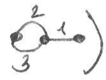
MPP = matroid partíciós probléma

→ ∈ NP (tanú: a partíció – lineáris időben ellenőrizhető)
(valójában ∈ P)
→ ∈ coNP (ha a válasz nemleges, mi a tanú?)
Megadunk egy X részhalmazt, ami összefüggő lesz.
$X \subseteq E$; $\sum_{i=1}^{k} r(X) < |X|$

Algoritmus:
- vagy talál egy jó partíciót
- vagy talál egy ilyen durván öf. X halmazt
- mindezt polinom időben

A mohó algoritmus nem jó

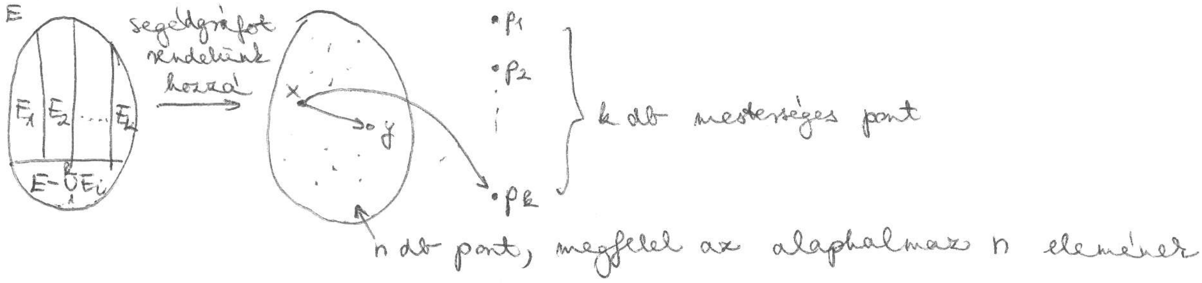
$M_1 = M($  $)$

$M_2 = M($  $)$

$\{1,2\}$-t már particionáltuk: $\{1\} \cup \{2\}$, ahol $\{1\} \in M_1$; $\{2\} \in M_2$
3-at mohó módon már nem tudjuk hozzáadni
$\{1,2,3\} = \{3\} \cup \{1,2\}$

Az algoritmus:

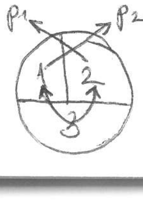
1. lépés: ∀i-re $E_i = \emptyset$, $E_i \in \mathcal{F}_i$
2. lépés: Ha $\bigcup_{i=1}^{k} E_i = E$, akkor STOP (IGEN).
Ha nem, akkor – vagy bővíthető (bővítjük és GOTO 2. lépés)
\ vagy nem (kiválasztjuk X-et és STOP (NEM))



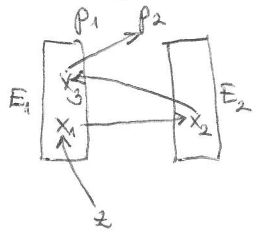
$(\overrightarrow{x, p_i}) \in E$, ha $x \notin E_i$, de $\{x\} \cup E_i \in \mathcal{F}_i$

$(\overrightarrow{x, y}) \in E$ (ahol $y \in E_j$), ha $x \notin E_j$, $E_j \cup \{x\} \notin \mathcal{F}_j$, de $(E_j \cup \{x\}) - \{y\} \in \mathcal{F}_j$

pl. fenti példában:



Ha van irányított út z-ből pi-be (ahol $z \in E - \bigcup_{i=1}^{k} E_i$), akkor bővíthető.



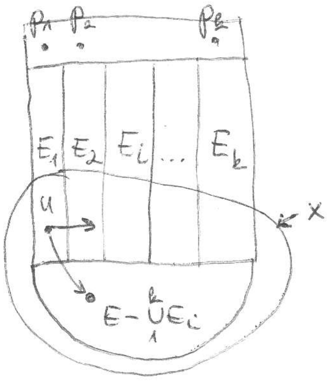
$E_1 + z - x_1 \in \mathcal{F}_1$ $\qquad$ $E_2 + x_1 - x_2 \in \mathcal{F}_2$

$E_1 + x_2 - x_3 \in \mathcal{F}_1$ $\qquad$ $E_2 + x_3 \quad \in \mathcal{F}_2$

$\not\Downarrow$ általában $\qquad$ $\not\Downarrow$ általában

$E_1 + z + x_2 - x_1 - x_3 \in \mathcal{F}_1$ $\qquad$ $E_2 + x_1 - x_2 + x_3 \in \mathcal{F}_2$

⇒ Bővíthető olyan irányított út mentén, mely nem rövidíthető.



X: azon pontok, ahová a lefedetlen pontokból irányított úton el lehet érni

$\forall i$-re $r_i(X) \underset{\substack{\uparrow \\ \geq \text{: trivi}}}{=} |E_i \cap X| \left( \Rightarrow \sum r_i(X) < |X| \right)$

Ha vmely $i$-re $r_i(X) > |E_i \cap X|$, akkor $E_i \cap X$-hez vmi még hozzávehető úgy, hogy $\mathcal{F}_i$-ben továbbra is ftlen legyen. → u

$(E_i \cap X) \cup \{u\} \in \mathcal{F}_i$ → vagy $E_i \cup \{u\} \in \mathcal{F}_i$ ↯

↘ vagy $E_i \cup \{u\}$ tartalmaz olyan $\mathcal{M}$-beli kört, mely $(E_i - X)$-be belemetsz ↯

Kész!

- MPP algoritmusa működik
- $MPP_k \in P$ ($\forall k$-ra) biz:

Legyen $|E| = n$.

$$\text{lépésszám} \leq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{max. ennyi ciklus}}}{n} \cdot \Big[ \underbrace{\underbrace{(n+k)^2}_{\substack{\text{irányított} \\ \text{párok} \\ \text{max. száma}}} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{3 dolgot kell} \\ \text{ellenőrizni}}}{3}}_{\text{segédgráf megkonstruálása}} + c \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{útkeresés}}}{(n+k)^2} \Big] \sim c \cdot n^3$$

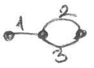
MMP(k) = matroid metszet probléma

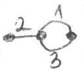
Input: $\mathcal{M}_i = (E, \mathcal{F}_i)$ $\quad i = 1, 2, \dots, k$ és $p$ egész szám

Kérdés: Létezik-e $X \subseteq E$, $|X| \geq p$ és $X \in \bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{F}_i$ ?

$MMP(k) \in NP$ (igenlő válasz: tanú a megfelelő X)

Megj: $(E, \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2)$ általában nem matroid.

pl. $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}\big($  $\big)$

$\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}\big($  $\big)$

$\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \underset{Y}{\{3\}}, \underset{X}{\{1,2\}} \}$

$|X| > |Y|$, de Y nem bővíthető X-ből (3. axióma) ↯

$$\left.\begin{array}{l} MMP(2) \in P \\ MMP(k) \in NP\text{-nehéz } k \geq 3\text{-ra} \end{array}\right\}$$

/Ha belátjuk, hogy $MMP(k) \in NP$-nehéz, akkor $MMP(k+1) \in NP$-nehéz.
Ha $MMP(k+1)$-re létezne P-beli alg., akkor $(k+1)$.-nek vegyük a szabad matroidot./

Def: $\mathcal{M}=(E,\mathcal{F})$ ; $r(E)=r \geq 1$
Az $\mathcal{M}$ matroid csonkoltja: $\mathcal{M}_{cs}=(E,\mathcal{F}_{cs})$ úgy, hogy $X \subseteq E$-re
$X \in \mathcal{F}_{cs} \Leftrightarrow X \in \mathcal{F}$ és $|X| \leq r-1$.

Megj: • matroid csonkoltja is matroid
• $U_{n,k}$ csonkoltja $U_{n,k-1}$
$\Rightarrow$ A csonkolás kivezet a grafikus matroidok köréből.

Áll: $MMP(2) \in P$

biz: $\mathcal{M}_1=(E,\mathcal{F}_1)$ ; $\mathcal{M}_2=(E,\mathcal{F}_2)$ ; $p$ egész
$r_1(E)=r_1$ ; $r_2(E)=r_2$ $\qquad$ $r_1$: bázisok mérete $\mathcal{M}_1$-ben
$p \leq \min(r_1,r_2)$ (Különben nemleges a válasz - trivi.)
Ha pl. $r_2 > r_1$, akkor $\mathcal{M}_1$ és $\mathcal{M}_2$ helyett $\mathcal{M}_1$-re és $(\mathcal{M}_2)_{cs}$-re futtatom le.
Feltehető, hogy $r_1 = r_2 = p$
$>$: ekkor mindkettőt csonkolom

$\Rightarrow$ Közös bázis keresése a 2 matroidban.

Ilyenkor MMP-re a válasz igenlő $\Leftrightarrow$ $\mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_2^* = (E, 2^E)$
(Elég ha ezt be tudjuk bizonyítani.)

$\Rightarrow$: $\exists B \subseteq E$ bázis $\mathcal{M}_1$-ben és $\mathcal{M}_2$-ben is.
$E-B$ bázis $\mathcal{M}_2^*$-ban
$E = \underset{\in \mathcal{F}_1}{B} \cup \underset{\in \mathcal{F}_2^*}{(E-B)}$ ✓

$\Leftarrow$: $E = C \cup D$ úgy, hogy $C \in \mathcal{F}_1$ és $D \in \mathcal{F}_2^*$.
$|C| \leq p$ $\qquad$ $|D| \leq n-p$ (a duális matroid rangja)
$|C \cup D| = n$ $\Rightarrow$ $|C| = p$ ; $|D| = n-p$ ; $|C \cup D| = n$

$\Rightarrow$ $C$ bázis $\mathcal{M}_1$-ben; $D$ bázis $\mathcal{M}_2^*$-ban ; $E-D=C$ bázis $\mathcal{M}_2$-ben.

2006. 10. 30.

$$\mathrm{MMP}_k \begin{cases} \in \mathcal{P}, \text{ ha } k \le 2 \\ \in NP\text{-nehéz, ha } k \ge 3 \end{cases}$$

Input: $\vec{G}$ irányított gráf; $x, y \in V(G)$

Kérdés: Létezik-e $\vec{G}$-ben olyan irányított Hamilton-út, amely $u$-ból indulva $v$-be érkezik

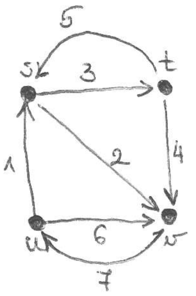
↑

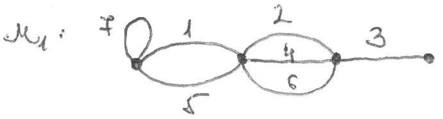
Ezt visszavezetjük az $\mathrm{MMP}_3$ problémára.

$E = E(\vec{G})$

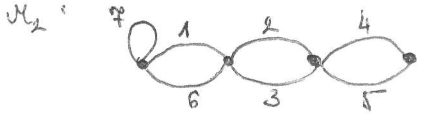
$\mathcal{M}_1 = (E, \mathcal{F}_1)$ úgy, hogy $X \subseteq E$-re $X \in \mathcal{F}_1 \Leftrightarrow$ ha $d_X^{be}(u) = 0$ és $d_X^{be}(w) \le 1$ $\forall w \ne u$-ra

pl.





$\mathcal{M}_2$ definíciójában hasonló a feltétel: $d_X^{ki}(v) = 0$ és $d_X^{ki}(w) \le 1$ $\forall w \ne v$-re



$\mathcal{M}_1$-ben és $\mathcal{M}_2$-ben közös max. ftlenek: $\{1,4,3\}$

$\{3,5,6\}$ — ebben van kör

Legyen $\mathcal{M}_3 = \mathcal{M}(G)$.

Az $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$ matroidok közös bázisai éppen a $\vec{G}$ gráf $u \to v$ Hamilton-útjai.

Múlt órán volt: lépésszám $\le n \cdot (3(n+\varepsilon)^2 + c \cdot n^2) = c \cdot n^3$

Valójában: $\le c \cdot n^3 \cdot I$, ahol $I$ = mennyibe kerül nekem egy ftlenségvizsgálat

Ha $\mathcal{M}$ grafikus, akkor $I = c \cdot n$. $\Rightarrow$ lépésszám $\le c \cdot n^4$

Ha $\mathcal{M}$ koordinátázható, akkor $I = c \cdot n^3$. $\Rightarrow$ lépésszám $\le c \cdot n^6$

Ha $\mathcal{M}$ általános matroid, akkor fogalmunk sincs $I$ nagyságrendjéről.

# Matroid-adatstruktúrák

Input: $X \subseteq E$
Kérdés: $X \in \mathcal{F}$ ? } Ez egy függetlenségi orákulum.

Input: $X \subseteq E$
Kérdés: X kör-e? } kör orákulum

Input: $X \subseteq E$
Kérdés: X bázis-e? } bázis orákulum

Input: $X \subseteq E$
Kérdés: $r(X) = ?$ } rang orákulum

A ftlenségi és a rang orákulum egymásra polinom időben visszavezethetőek.

$$\begin{tikzcd}
\text{kör} \arrow[r, bend right, "/" marking] \arrow[d, bend right, "/" marking] & \text{ftlenségi} \arrow[l, bend right] \arrow[d, bend right] \\
\text{bázis} \arrow[u, bend right, "/" marking] \arrow[r, bend right, "/" marking] & \text{rang} \arrow[l, bend right] \arrow[u, bend right]
\end{tikzcd}$$

$A \to B$ jelentése: B-re kapok egy inputot, amire A-t megkérdem polinom sokszor, ezután meg tudom mondani B-t.

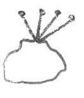
rang $\to$ ftlenségi bizonyítása: Ha rang < halmaz mérete $\to$ Nem ftlenek.
Ha rang = halmaz mérete $\to$ Igen, ftlenek.

ftlenségi $\to$ rang bizonyítása: mohó algoritmussal

kör $\not\to$ ftlenségi bizonyítása: tfh. valki azt állítja, hogy $\exists$ alg., ami polinom sok kérdést tesz fel, hogy vmi kör-e vagy sem, és ezalapján megmondja, hogy ftlen-e.
Kérdés: Az egész matroid ftlen-e?
Mindig azt mondjuk, hogy az adott halmaz nem kör
De mi 2 matroidra gondoltunk:

$M_1 = (E, 2^E)$

$M_2 =$



$\leftarrow \frac{n}{2}$ híd

$\leftarrow \frac{n}{2}$ pontból álló hurok

n elemű halmazon $\binom{n}{\frac{n}{2}}$ féle $M_2$ lehetséges.

$\hookrightarrow c \cdot \frac{2^n}{\sqrt{n}}$

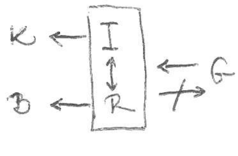
Nem tud a diák polinomidőben az összes részhalmazra rákérdezni.

bázis $\not\to$ rang biz. hasonlóan (Hf.)

Hf: biz: bázis $\to$ ftlenségi, ha előre ismerünk egy konkrét bázist

Girth (= öv) orákulum: Input: $X \subseteq E$

$$g(X) = \begin{cases} \infty, \text{ ha } X \text{ ftlen} \\ \text{az } X \text{ által tartalmazott legrövidebb kör hossza, ha } X \notin \mathcal{F} \end{cases}$$

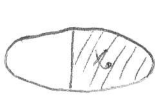


Grafikus matroidokra: $I \rightleftarrows G$

Elhagyom az $(u,v)$ élet, ezután $u \to v$ legrövidebb utat keresek. Ez $(u,v)$ élet tartalmazó körök közül a legrövidebb lesz.

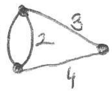
$I \not\to G$ biz: szadista tanár módszere:

$\mathcal{M}_1 = U_{n,\frac{n}{2}}$ $\qquad g(\mathcal{M}_1) = \frac{n}{2}+1$



$\mathcal{M}_2 = \{\forall \frac{n}{2} \text{ elemű bázis, kivéve } X_0\text{-at}\}$ $\qquad g(\mathcal{M}_2) = \frac{n}{2}$

$n=4$: $\mathcal{M}_1 = U_{4,2}$ ; $\mathcal{M}_2 =$



Polinom időben nem tudjuk az összes részhalmaz ftlenségét megkérdezni.

$g_n$: n pontú gráfból hány nem izomorf gráf van

$g_n < 2^{\binom{n}{2}}$ (bármely 2 pont között vagy behúzok élet vagy nem)

$\underbrace{\log g_n}_{} < c\,n^2$

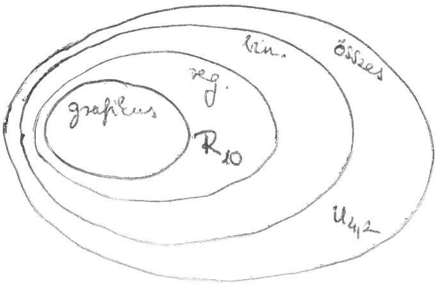
hány jegyre van szükség max. az n pontú gráfok felsorolásakor

$m_n$: n pontú matroidból hány nem izomorf van

$m_n < 2^{2^n}$

$\log m_n < 2^n$, másrészt $\frac{2^n}{n^3} < \log m_n$

$\Rightarrow$ Esélyünk sincs arra, hogy találjunk olyan adatstruktúrát, ami tömören leírja a matroidokat.



Ha $M$ bináris, akkor $\nexists U_{4,2}$-vel izomorf minorja.

$U_{n,k}$ nem grafikus, ha $2 \leq k \leq n-2$. (Ekkor elhagyásokkal és összehúzásokkal elérhető, hogy $U_{4,2}$ minorként maradjon.)

Áll: $M$ bináris $\Leftrightarrow$ ha $\nexists U_{4,2}$-vel izomorf minorja (Tutte)

Áll: $M$ reguláris $\Leftrightarrow$ ha $\nexists U_{4,2}; \underset{\underset{\text{Fano}}{\uparrow}}{F_7}; F_7^*$ -gal izomorf minorja (Tutte)

Áll: $M$ grafikus $\Leftrightarrow$ $\nexists U_{4,2}; F_7; F_7^*; M^*(K_5); M^*(K_{3,3})$-gal izomorf minorja (Tutte, Wagner)

Tfh. $\exists$ totálisan unimoduláris $A$ mátrix, amely a rac. test felett egy $M$ matroidot koordinátáz. $\Rightarrow$ Ekkor $M$ reguláris.
Ez az állítás visszafelé is igaz! ($\Leftarrow$)

Köv. Ha $M$ GF(2) és GF(3) felett is koordinátázható, akkor reguláris.

De ezzel a regularitást eldöntése még nem lett polinom idejű.
Paul Seymour adott erre polinom idejű algoritmust.

Tétel: $M$ reguláris $\Leftrightarrow$ ha néhány grafikus matroidból, néhány kografikus matroidból és egyetlen további reg. matroidból 3féle művelet segítségével $M$ felépíthető.

biz: $\Leftarrow$: könnyű
$\Rightarrow$: nagyon nehéz

2006. 11. 02.

bináris test felett

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & & 0 \\ 1 & 1 & & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & & 1 \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}}_{10\text{ oszlop}} \xrightarrow{\mathbb{B}} R_{10}$$

Belátható, hogy minden test felett koordinátázható

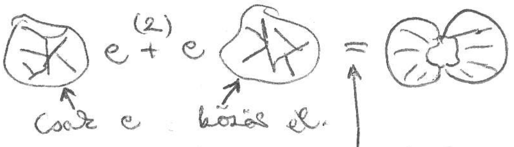
Belátható: $R_{10} \setminus X = M(K_{3,3})$ (3ház-3kút gráf körmatroidja)

$R_{10} \Rightarrow$ nem lehet kografikus

Belátható: $R_{10}^* \cong R_{10}$ $\Rightarrow$ Nem lehet grafikus

A három művelet: 1-sum: $\oplus$ (direkt összeg)

2-sum:



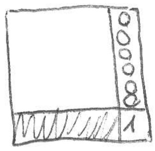
Csak e közös él.

A 2 gráfot a közös e élnél összeragasztjuk, majd e-t elhagyjuk.

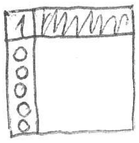
Összeg bázisa: 1. gráfból fa, mely e-t tartalmazza,
2. gráfból fa, mely e-t nem tartalmazza.

Áll: A művelet a reguláris matroidok köréből nem vezet ki.

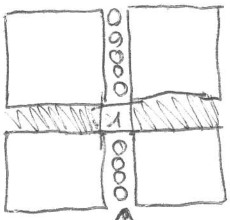
1. matroidot koordinátázza:
$\mathbb{F}$ felett



2. matroidot koordinátázza:

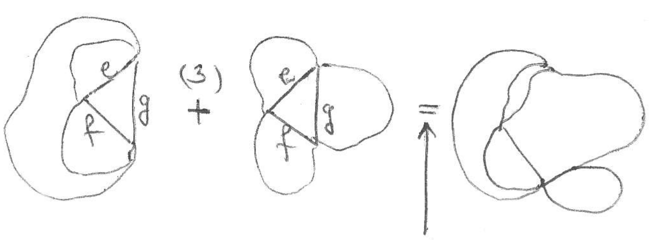


$\Longrightarrow$



A végén ezt az oszlopot kihúzzuk.

3-sum:



A 2gráfot az e,f,g háromszögnél összeragasztom, majd ezeket elhagyom.

Áll: A 3-sum sem vezet ki a reguláris matroidok köréből.

$$\begin{array}{c|ccc} & e & f & g \\ \hline A_1' & \begin{matrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{matrix} \\ \hline A_1'' & \begin{matrix}1&0&1\\0&1&1\end{matrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \begin{matrix}1&0&1\\0&1&1\end{matrix} & A_2' \\ \hline \begin{matrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{matrix} & A_2'' \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|c} A_1' & 0 \\ \hline A_1'' & A_2' \\ \hline 0 & A_2'' \end{array}$$

$\mathcal{F}$ felett az 1. és 2. matroidot koordinátázzák

← A 3-sumot koordinátázza

Seymour tétele: $\Leftarrow$ : ✓

$f: 2^E \to \mathbb{Z}_0^+$ rangfv., ha (1) $f(\emptyset) = 0$

(2) $X \subseteq Y \Rightarrow f(X) \leq f(Y)$

(4) $f(X) + f(Y) \geq f(X \cup Y) + f(X \cap Y)$

(3) $f(\{x\}) \leq 1$ vagy $f(X) \leq |X|$ vagy $f(X, Y) \leq f(X) + |Y|$

(Ezek ekvivalensek, ha (1), (2) és (4) teljesül.)

A (3) feltételt elhagyjuk, helyette: $(3^*)$ $f(\{x\}) \leq k$ vagy $f(X) \leq k \cdot |X|$

Ezáltal egy tágabb fv. osztályhoz jutunk, amelynek tagjait k-polimatroid rangfv.-eknek nevezzük.

Def: $X \subseteq E$ k-polimatroid-matching, ha $f(X) = k \cdot |X|$.

pl. $G(V, E)$ $\quad f: 2^E \to \mathbb{Z}_0^+$

$f(X) = |\{$az X-beli élek által lefedett pontok halmaza$\}| \leq 2 \cdot |X|$

$\Rightarrow$ Ez egy 2-polimatroid rangfv. $\quad$ (1), (2), $(3^*)$ triviális

$\| \quad N \quad X, Y \quad \left.\begin{array}{l} f(X) + f(Y) = 6 + 4 = 10 \\ f(X \cup Y) + f(X \cap Y) = 6 + 2 = 8 \end{array}\right\} 8 < 10$ ✓

pl. $(E, \mathcal{F}_i) = \mathcal{M}_i \quad i = 1, 2, \ldots, k \quad r_i$ az $\mathcal{M}_i$ rangfv.-e

$f(X) = \sum_{i=1}^{k} r_i(X)$ $k$-polimatroid rangfv.

(1), (2), (4), (3) ✓

$X$ egy $k$-polimatroid matching $\Leftrightarrow f(X) = k \cdot |X| \Leftrightarrow X \in \bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{F}_i$

Értelmes kérdés: van-e $k$-ra egy $t$ elemű ftlen?

gráfokra: $k=2$: $t$ elemű párosítás → polinom idő
$k>2$: $t$ elemű diszjunkt élhalmaz → NP teljes

$\Downarrow$

$k>2$: $t$ elemű ftlen → NP nyilván

$k=2$ esetben milyen lesz?

Kérdés: 2-polimatroid-matching probléma milyen bonyolultságú?

Input: $f$ (2-polimatroid-rangfv.); $t$

Kérdés: Létezik-e $X \subseteq E$; $|X| \geq t$; $f(X) = 2|X|$ ?

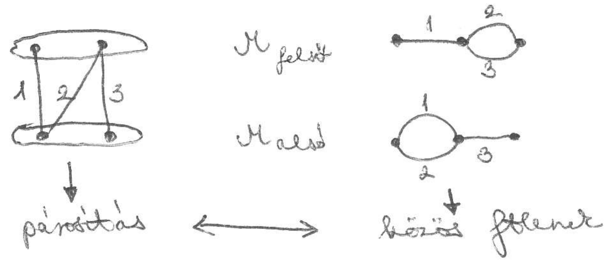
Speciális esetek:

Input: tetsz. $G$ gráf; $t$
Kérdés: $\nu(G) \geq t$ ?

Input: 2 matroid; $t$
Kérdés: Létezik-e $X \subseteq E$; $|X| \geq t$; $X \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ ?

közös spec eset

Input: tetsz. páros gráf; $t$
Kérdés: $\nu(G) \geq t$



Valójában: exponenciális nehézségű probléma
2-polimatroid-matching probléma $\notin P$

biz.: (Lovász, Korte-Jensen)

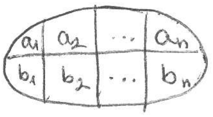
$|E| = 2n$ , $X \subseteq E$

$$f(X) = \begin{cases} 2\cdot|X| , & \text{ha } |X| < n \\ 2n , & \text{ha } |X| > n \\ \in \{2n, 2n-1\} , & \text{ha } |X| = n \end{cases}$$

↑ véletlen választással

Ekkor 2-polimatroid rangfv.-eket kapunk, méghozzá exponenciális sok ilyet.
Mindig $2n-1$-et mondunk, de nem lehet az összes $f$-et leellenőrizni.

$(E, \mathcal{F}) = \mathcal{M}$



← Az alaphalmaz elemei párokba vannak állítva.

$I = \{1, 2, \dots, n\}$ indexhalmazon definiálunk egy $f$ fv.-t:

$\forall J \subseteq I$-re $f(J) = r\left(\bigcup_{i \in J} \{a_i, b_i\}\right)$

Ha $\forall i$-re $r(\{a_i, b_i\}) = 2 \Rightarrow f$ egy 2-polimatroid rangfv.

Lovász: Ha $f$ ilyen, $\mathcal{M}$ koordinátázva van az $\mathbb{R}^+$ valós test felett, akkor $\in P$.

↳(Ismernem kell a mátrixot, ami koordinátázza)

2006. 11. 09.

1. Közelítő algoritmusok
2. Ütemezéselmélet
3. Megbízható hálózatok — esettanulmány
0. Ismétlés

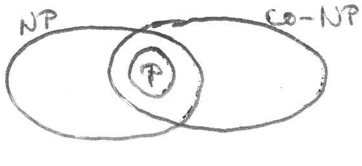
## Ismétlés

Eldöntési problémák:

$P$ – $\exists$ polinomiális algoritmus

$NP$ – $\exists$ polinom időben ellenőrizhető tanú az IGEN-re

co-$NP$ – $\exists$ polinom időben ellenőrizhető tanú a NEM-re



Tudjuk: $P \subseteq NP \cap \text{co-}NP$

$\uparrow$

Nem tudjuk, hogy a tartalmazás valódi-e.

Optimalizálási problémák:

$P$ – polinom idő

pl. max. párosítás $\frac{n}{2}$? $\frac{n}{4}$? méretű párosítás

NP-nehéz – $\forall$ NP-beli probléma visszavezethető polinom időben rá

NP-teljes – NP-nehéz és NP-beli

TP: Létezik-e G-ben teljes párosítás?

TPP: Létezik-e a G páros gráfban teljes párosítás?

Frobenius-Hall tétel: $G=(A,B)$ páros gráfban $\exists$ TP

$$\Updownarrow$$

$|A|=|B|$ és $\forall X \subseteq A$-ra $|N(X)| \geq |X|$

$\Rightarrow$ TPP $\in NP$ (maga a párosítás tanú)

TPP co-NP (Frobenius-Hall tétel)

Tehát TPP $\in NP \cap$ co-NP. Kérdés: TPP $\in P$? Igen. (ld. magyar módszer)

TP $\in NP$

TP $\in$ co-NP

TP $\in P$ (Nem tanultuk, mert nehéz, de igaz.)

MP: maximális párosítás (optimalizálási alg.)

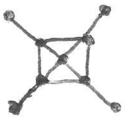
MPP $\in$ P (magyar módszer)
↑
páros gráf

MP $\in$ P (Edmonds-módszer)

FTL: max ftlen ponthalmaz $\in$ NP-nehéz

$\alpha(G)$: max ftlen ponthalmaz mérete
$\tau(G)$: lefogó pontok min. száma

pl.



$\tau(G) \geq \nu(G)$: vegyünk $\nu(G)$ méretű párosítást. Ennek lefogásához min. $\nu(G)$ pont kell.

páros gráfban $\tau(G) = \nu(G)$ (König-tétel)
Gallai-tétel: $\alpha(G) + \tau(G) = n$ (egyszerű gráfban)
$\nu(G) + \rho(G) = n$

Színezés: $\chi(G) = ?$
$\chi(G) \leq k$ eldöntése NP-nehéz $\Rightarrow$ Az opt. megkeresése is NP-nehéz.
pl. A G gráf színezhető-e 3 színnel? Ez is NP-nehéz.

NP-nehéz probléma:
1.) elég spec. eseteket nézni, ahol P-beli (mázli)
2.) közelítő megoldás
3.) heurisztikák

I: input
$f: X_I \rightarrow \mathbb{R}^+$ (a fv., amit optimalizálni akarunk.)

pl. input: G gráf
$X_I$: G színezéseinek halmaza
$f(x)$ = használt színek száma
↑
színezés

konstanssal

**Def:** Egy algoritmus C additív hibával (közelítve) jól oldja meg a problémát, ha ∀I inputra polinom időben ad egy $y_I$-t, amire:

$$f(y_I) \leq \min_{x \in X_I} f(x) + C$$

$$\left( f(y_I) \geq \max_{x \in X_I} f(x) - C \right)$$

pl. $\chi_e(G)$: éleket színezünk

$$\Delta(G) \leq \chi_e(G) \leq \Delta(G)+1$$

$\uparrow$ max. fok — $\uparrow$ Vizing-tétel (algoritmikus)

Ekkor C=1-gyel teljesül a definíció.

pl. síkgráfok: $\chi(G) \leq 4$

4-szín tétel: nem algoritmikus, nem ad meg egy színezést

Gyengítve: az 5-szín tétel már algoritmikus, polinomiális

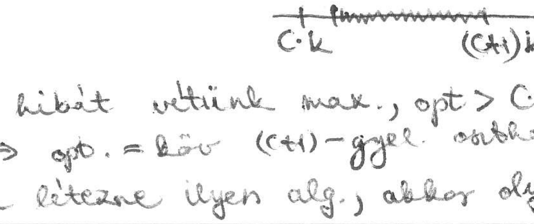
⇒ C=3 (Ha nem az üresgráfról van szó, akkor van él, így legalább 2 szín kell, ezért max. 3-at téved.)

pl. páros-e? ⇒ C=2

Leghosszabb kör keresése gráfban
(tartalmazza van-e Hamilton-kör a gráfban)

Ekkor ∄C konstans, amivel additíven közelíteni lehet a megoldást, ha P ≠ NP. (Ha P = NP, akkor pontos megoldást lehet kapni.)

biz: Tfh. ∃C additív hibával alg.



opt.

((C+1)·opt. értékű az opt. G'-ben

C hibát vétünk max., opt > C·k, de az opt. (C+1)-gyel osztható

↳ opt. = kör (C+1)-gyel osztható

Ha létezne ilyen alg., akkor olyan is lenne, ami leghosszabb kört megtalálja.

**Def:** Egy algoritmus k-approximációs, ha $\forall I$ inputra polinom időben ad egy $y_I$-t, amire : $f(y_I) \leq k \cdot \min\limits_{x \in X_I} f(x)$

$$\left( f(y_I) \geq \frac{1}{k} \cdot \max_{x \in X_I} f(x) \right)$$

pl. $\tau(G) = ?$ min. lefogó ponthalmaz keresése

Ez 2-approximációs algoritmus. – G-ben keresünk max. párosítást.
$\nu(G)$ méretű (megy polinom időben)

A max párosítás végpontjai lefogó ponthalmazt alkotnak.

(Ha lenne él, aminek a végpontjai nincsenek lefogva, akkor lenne $\nu(G)+1$ méretű párosítás. ↯ )

$$\underbrace{2\nu}_{\text{ennyit találtunk}} \leq \underset{\uparrow \atop \text{approximáló konstans}}{2} \cdot \underset{\uparrow \atop \text{opt.}}{\tau} \qquad \nu \leq \tau \text{-t tudjuk}$$

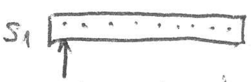
Megj.: max. párosítás helyett elég nem bővíthető élhalmazt venni (sokkal gyorsabb)
$\leq 2\nu$ lefogó pont $\Rightarrow$ Nem rosszabb.

$U$ alaphalmaz ; $|U| = m$ ; $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_n\}$ ; $S_i \subseteq U$ ; $\bigcup\limits_{i=1}^{n} S_i = U$
$c : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^+$
min. költségű fedés kiválasztása $\in$ NP-nehéz (előző pl. ennek spec esete, $c \equiv 1$)
Az alg. talál opt $\cdot (\ln|U|+1)$ értékű fedést.

$T \subseteq U$-t kell még lefedni

$c'(S_i) = \dfrac{c(S_i)}{|S_i \cap T|}$ ← Minél több lefedetlen pontot lefed, annál jobban szeretjük.

Elsőnek kiválasztottuk $S_1$-et.



elemek ára : $c'(S_1)$
↳ a fedés pillanatában érvényes

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}$
aktuálisan lefedettek árainak összege $= c(S_i)$

$\Sigma$ elemek árai = fedés összköltsége alg: mindig a legkisebb $c'$ értékű halmazt veszem be

**Lemma:** $e_1, e_2, \dots, e_m \leftarrow$ aszerint rendeztük, hogy hányadikként fedtük le

$e_k$ ára $\leq \dfrac{opt}{n-k+1}$

$$\sum e_k \text{ ára} \leq \sum_{k=1}^{m} \frac{opt}{n-k+1} = opt \cdot \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + 1 \right) \leq opt \cdot (\ln n + 1)$$