ANALÍZIS(1)
Mérnök Informatikus szak

**VIZSGADOLGOZAT**

**2009. jan. 22.**
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

## 1. feladat (10 pont)

a) Definiálja a következő fogalmat!

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \infty$$

b) Fogalmazza meg a valós egyváltozós függvényekre tanult átviteli elvet!

c) Adja meg a következő integrálok definícióját!

c1) $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ c2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$

a.) $2 \in \mathrm{int}\, D_f$

$\boxed{3}$ $\forall P>0$-hoz $\exists\ \delta(P)>0$ $(P, \delta(P) \in \mathbb{R})$:

$f(x) > P$, ha $0 < |x-2| < \delta(P)$

b.) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \iff \forall\, x_n \to x_0$-ra $f(x_n) \to A$

$\boxed{3}$

$x_n \in D_f$

$x_n \neq x_0$

c.)

$\boxed{2+2}$ c1) Ha $\forall \omega \in (a, \infty)$-re $f \in R_{[a,\omega]}$:

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{\omega\to\infty} \int_a^{\omega} f(x)\,dx$$

c2) $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{\omega_2\to\infty \\ \omega_1\to-\infty}} \int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x)\,dx$$

## 2. feladat (18 pont)

a) Írja le a numerikus sorok konvergenciájának szükséges feltételét!
Az állítást bizonyítsa be!

b) Konvergensek-e az alábbi sorok?

b1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+4}{n+2}\right)^n$ b2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{4n+1}\right)^n$

(T) $$\boxed{\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergens}\right) \quad \Longrightarrow \quad \left(\lim_{k\to\infty} a_k = 0\right)}$$

(B) A Cauchy kritériumból ( $k = 1$ választással):

$$|s_{n+1} - s_n| = |a_{n+1}| < \varepsilon, \quad \text{ha } n > N(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad a_n \to 0$$

Vagy (egy másik bizonyítás)

$$s_n = s_{n-1} + a_n \quad \Longrightarrow \quad a_n = s_n - s_{n-1} \to s - s = 0$$

■

b) b1) $\sum^{\infty} a_n$ : $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(1+\frac{4}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n} = \dfrac{e^4}{e^2} = e^2 \neq 0$

$\boxed{6}$

$\Rightarrow \sum^{\infty} a_n$ div., mert nem teljesül a konv. szüks. feltétele.

b2) $\sum^{\infty} b_n$ : $0 < b_n \leq \left(\dfrac{n+2n}{4n+0}\right)^n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$

$\boxed{6}$ $\sum^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$ konv. geom. sor $\left(0 < q = \frac{3}{4} < 1\right) \xrightarrow[\text{maj. kr.}]{} \sum^{\infty} b_n$ konv.

**3. feladat (12 pont)**

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = ?$ (Nem használhat L'Hospital szabályt!)

b) Bizonyítsa be, hogy a $\sin x$ deriváltja $\cos x$ !
A felhasznált nevezetes limeszt nem kell bizonyítania!

a) $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ azonosság felhasználásával:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin^2 \frac{x}{2}}{x} = \lim_{x\to 0} -\underbrace{\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)}_{\to 1} \cdot \underbrace{\sin\frac{x}{2}}_{\to 0} = 0$$

b.) $f(x) := \sin x$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \underbrace{\sin x}_{\to \sin x} \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{\to 0 \text{ (a)-ban láttuk)}} + \underbrace{\cos x}_{\to \cos x} \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\to 1} = \cos x; \quad x \in \mathbb{R}$$

**4. feladat (11 pont)**

a) $\lim\limits_{x\to\infty} (3x^5 - 7x^2) = ?$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} 7x\,\mathrm{e}^{-5x} = ?$

c) $\lim\limits_{x\to 3\pm 0} \left(\frac{1}{|x-3|} + \frac{1}{x-3}\right) = ?$

a.) $\lim\limits_{x\to\infty} \underset{\downarrow \atop \infty}{x^5} \left(\underset{\downarrow \atop 3}{3 - \frac{7}{x^3}}\right) = \infty$

$\boxed{2}$

b.) $\lim\limits_{x\to\infty} \underset{\infty \cdot 0}{7x\,e^{-5x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{7x}{e^{5x}} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{7}{5e^{5x}} = 0$ $\quad \frac{\infty}{\infty}$

$\boxed{5}$

c.) $\lim\limits_{x\to 3+0} \left(\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+3}\right) = \lim\limits_{x\to 3+0} \frac{2}{\underset{\to +0}{(x+3)}} = +\infty$

$\boxed{4}$

$\lim\limits_{x\to 3-0} \left(\underbrace{-\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+3}}_{=0}\right) = 0$

**5. feladat (9 pont)**

Hol monoton növő, illetve csökkenő az

$$f(x) = \frac{x^2+2x}{x^2+2x+2}$$

függvény?

$x^2+2x+2 = (x+1)^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = \frac{(2x+2)(x^2+2x+2) - (x^2+2x)(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2}$ (2) $= \frac{(2x+2)(x^2+2x+2-(x^2+2x))}{(x^2+2x+2)^2}$

$= \frac{4(x+1)}{\underset{>0}{(x^2+2x+2)^2}}$ (2)

| | $(-\infty,-1)$ | $-1$ | $(-1,\infty)$ | |
|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $-$ | $0$ | $+$ | (3) |
| $f$ | ↘ | (lok. min.) | ↗ | (2) |

$f$ (szig.) mon. csökken $(-\infty,-1)$-en,

és $f$ (szig.) mon. nő $(-1,\infty)$-en.

an1o-09012213.

**6. feladat (13 pont)***

a) $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{x^2+9}\,\mathrm{d}x = ?$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-9}\,\mathrm{d}x = ?$

a.) $\boxed{5}$

$$J_a = \frac{1}{9}\int_0^3 \frac{1}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}\,dx \;(2) = \frac{1}{9}\,\frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{3}}{\frac{1}{3}}\Big|_0^3 \;(1) =$$

$$= \frac{1}{3}(\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0)\;(1) = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right)\;(1) = \frac{\pi}{12}$$

b.) $\boxed{8}$

$$\frac{1}{x^2-9} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3} \;(2) \Rightarrow 1 = A(x+3) + B(x-3)$$

$x=-3: \quad 1 = B(-6) \quad : B = -\frac{1}{6}$

$x = 3 \quad : \quad 1 = 6A \quad : A = \frac{1}{6} \quad (3)$

$$J_b = \int\left(\frac{1}{6}\,\frac{1}{x-3} - \frac{1}{6}\,\frac{1}{x+3}\right)dx = \frac{1}{6}\ln|x-3| - \frac{1}{6}\ln|x+3| + C \;(3)$$

**7. feladat (9 pont)***

a) $\displaystyle\int 2x\, e^{x^2+1}\,\mathrm{d}x = ?$

b) $\displaystyle\int 2x\, e^{-x}\,\mathrm{d}x = ?$

a.) $\displaystyle\int \underbrace{2x}_{f'}\,\underbrace{e^{x^2+1}}_{e^f}\,dx = e^{x^2+1} + C \quad (3)$

b.) $\displaystyle\int 2x\, e^{-x}\,dx = -2x\,e^{-x} + 2\int e^{-x}\,dx \;(2) =$

$u = 2x \quad v' = e^{-x}$

$u' = 2 \quad v = -e^{-x} \quad (2)$

$$= -2x\,e^{-x} + 2(-e^{-x}) + C \quad (2)$$

**8. feladat (9 pont)***

$$f(t) = \begin{cases} 3t\,, & \text{ha } t \in [0,1] \\ 3\,, & \text{ha } t > 1 \end{cases}$$

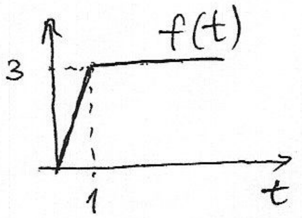
Írja fel a

$$G(x) = \int_0^x f(t)\,dt\,, \qquad x > 0$$

függvényt! Hol differenciálható a $G$ függvény és mi a deriváltja?

an1c-090122/4.

$0 < x \leq 1: \quad G(x) = \int_0^x 3t\,dt = 3\frac{t^2}{2}\Big|_0^x = \frac{3}{2}x^2$ 3




$1 < x: \quad G(x) = \int_0^1 3t\,dt + \int_1^x 3\,dt =$

$= \frac{3}{2}t^2\Big|_0^1 + 3t\Big|_1^x = \frac{3}{2} + 3x - 3 = 3x - \frac{3}{2}$ 3

$$G(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2, & 0 < x \leq 1 \\ 3x - \frac{3}{2}, & 1 < x \end{cases}$$

Mivel $f$ folytonos $(0,\infty)$-en, az integrálszámítás II. alaptétele értelmében $G$ deriválható $x > 0$-ra és

$$G'(x) = f(x) = \begin{cases} 3x, & \text{ha } x \in (0,1] \\ 3, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$$ 3

**9. feladat (9 pont)***

$t = \sqrt[4]{x}$ helyettesítéssel oldja meg az alábbi integrált!

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}\,dx\,, \qquad x > 0$$

$t = \sqrt[4]{x} \Rightarrow x = t^4 \Rightarrow dx = 4t^3\,dt$ 2

$\int \frac{1}{t^2+t}\,4t^3\,dt$ 2 $= 4\int \underbrace{\frac{t^2}{t+1}}_{\text{áltört}}\,dt =$

$= 4\int \frac{t^2-1+1}{t+1}\,dt = 4\int \left(t - 1 + \frac{1}{t+1}\right)dt =$

$= 4\left(\frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1|\right) + C$ 4

$I = 4\left(\frac{\sqrt[4]{x^2}}{2} - \sqrt[4]{x} + \ln\left(\sqrt[4]{x} + 1\right)\right) + C$ 1

*Pótfeladat (csak az elégséges és közepes vizsgajegy eléréséhez javítjuk ki):*

**10. feladat (12 pont)**

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{4-x}{x-5}$$

a) Keresse meg az alábbi határértékeket!

$\lim_{x\to 5+0} f(x) = ?$, $\lim_{x\to 5-0} f(x) = ?$, $\lim_{x\to 5} f(x) = ?$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = ?$

b) $f'(x) = ?$

a.) $\lim_{x\to 5+0} \operatorname{arctg} \underbrace{\left(\frac{4-x \to -1}{x-5 \to +0}\right)}_{-\infty} = -\frac{\pi}{2}$ (2) $\lim_{x\to 5-0} \operatorname{arctg} \underbrace{\left(\frac{4-x \to -1}{x-5 \to -0}\right)}_{+\infty} = \frac{\pi}{2}$ (2)

$f(5+0) \neq f(5-0) \Rightarrow \lim_{x\to 5} f(x) \nexists$ (1)

$\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} \underbrace{\left(\frac{\frac{4}{x}-1}{1-\frac{5}{x}}\right)}_{\to -1} = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$ (2) (1)

b.) $x \neq 5$: $f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{4-x}{x-5}\right)^2} \quad \frac{-1\,(x-5)-(4-x)\cdot 1}{(x-5)^2}$

**11. feladat (8 pont)**

a) $\int \sin^2 x \, dx = ?$ b) $\int_0^{\pi/2} \sin x \cdot \cos^2 x \, dx = ?$

a) $\int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2} + C$ (3)

b.) $\boxed{5}$ $-\int_0^{\pi/2} \underbrace{-\sin x}_{f'} \cdot \underbrace{\cos^2 x}_{f^2} \, dx = -\frac{\cos^3 x}{3}\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{1}{3}(0-1) = \frac{1}{3}$