

Zárthelyi dolgozat

1. Az egyes számú zsákban 13 piros és 11 kék színű golyó van, a kettes számú zsákban 13 piros, 11 kék és 12 zöld. Véletlenszerűen húzunk egy golyót az egyik zsákból. Annak az esélye, hogy az első zsákból húzunk $\frac{4}{13}$. Feltéve, hogy piros golyót húzunk, mi az esélye, hogy az első zsákból húztunk?
2. Legyen Y olyan valószínűségi változó, aminek sűrűségfüggvénye valamilyen $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén

$$f : x \mapsto \begin{cases} \frac{\alpha}{x\sqrt{x}} & \text{ha } 1 < x < 4, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

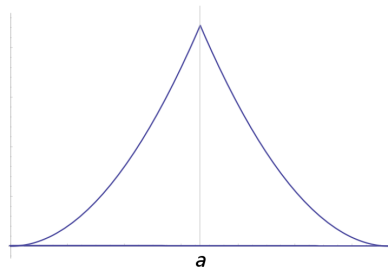
Határozza meg $\mathbb{E}(Y)$ -t.

3. Béla híres ember, sokszor kérnek tőle autogramot az utcán. Tegyük fel, hogy az egyes autogram kérések egymástól független, azonos, de egyenként kis valószínűségű események. Egy nap átlagosan 4 kérést kap. Béla úgy érzi, jó napja van, ha 1-nél több, de 5-nél kevesebb kérést kap. (Tegyük fel, hogy más okból nem lehet jó napja.)
 - (a) Mekkora a valószínűsége, hogy Bélának egy adott napon jó napja van?
 - (b) Várhatóan hány napig kell várnia Bélának, hogy jó napja legyen (a jó napot is beleszámolva)?
4. Jelölje A azt az eseményt, hogy nem támad fel a szél a következő 2 órában, B pedig azt, hogy nem ered el az eső a következő 1 órában. Tegyük fel, hogy mind a szél feltámadásáig eltelő X , mind az eső eleredéséig eltelő Y órák száma exponenciális eloszlású, azonos λ paraméterrel.
 - (a) Határozza meg a $\mathbb{P}(A)$ és $\mathbb{P}(B)$ valószínűségeket (λ függvényében).
 - (b) A fenti eseményeken túl, jelölje C azt az eseményt, hogy ma front lesz. Ismerjük a következő valószínűségeket:

$$\mathbb{P}(C) = 0,5, \quad \mathbb{P}(A \cap B) = 0,2, \quad \mathbb{P}(A \cap C) = 0,3, \quad \mathbb{P}(B \cap C) = 0,2, \quad \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0,1.$$

Ha 0,9 az esélye, hogy A , B és C események valamelyike bekövetkezik, akkor mennyi λ ?

5. Dobjunk egy szabályos dobókockával 4-szer. Jelölje X a dobott hatosok számát. Az Y valószínűségi változó legyen 0, ha az első két dobás közt van hatos, 1, ha az első két dobás közt nincs, de az utolsó két dobás közt van hatos, és 2 egyébként. Mennyi $\text{cov}(X, Y)$?
- 6.* Legyen $a > 0$ valós szám. Vegyük azt a síkidomot, aminek határai a $(0; 0)$ -t a $(2a; 0)$ -val összekötő szakasz, az $y = x^2$ ($x \in [0, a]$) egyenlettel meghatározott görbe, illetve ugyanezen görbének az $x = a$ egyenesre vett tengelyes tükörképe. Az a paraméter értéke $1 - 2^{-1-N}$, ahol $N \sim B(2, 2^{-1})$. Mekkora az esélye, hogy a $[0, 2] \times [0, 1]$ téglalaphól találmra választott pont a síkidomba esik?



Tudnivalók: A vizsga időtartama 90 perc. Számológépet lehet használni. A feladatokra minden esetben számszerű megoldást várunk (4 értékes jegyre kerekítünk). A teljes pontszám eléréséhez a megoldás menete is szükséges, beleértve az egyes lépéseknél felhasznált tulajdonságokat. A vizsga első 30 percében nem lehet a termet elhagyni.