INFO AN1. PPZH2 | -1- | 2018.12.12.

1, a, $\boxed{5}$ $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$, ha $\forall K>0$ esetén $\exists\, \delta(K)>0$, melyre $0<|x-x_0|<\delta(K)$ esetén $f(x)>K$.

b, $|x-2|<1$ esetén $x\in(1,3)$, így $x^2>1$, ③ tehát ekkor

$\boxed{8}$ $$\frac{x^2}{|x-2|} > \frac{1}{|x-2|} > K \;③ \iff |x-2|<\frac{1}{K}\text{, tehát } \delta(K)=\min\left\{1,\frac{1}{K}\right\} \;②$$

2, a, $\boxed{8}$ $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh}(2x)}{\sin(3x)} \overset{L'H\,②}{\underset{0/0}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{ch}(2x)\;②}{3\cos(3x)\;②} = \frac{2}{3}\;②$$

b, $\boxed{8}$ $$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} \overset{L'H\,②}{\underset{0/0}{=}} \lim_{x\to 1}\frac{1/x\;②}{1\;②} = 1\;②$$

c, $\boxed{8}$ $$\lim_{x\to\infty} x^2e^{-x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\;②}{e^x} \overset{\infty/\infty}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x\to\infty}\frac{2x\;②}{e^x} \overset{\infty/\infty}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x\to\infty}\frac{2\;②}{e^x} = 0\;②$$

3 $\boxed{14}$ $x^2-1=(x+1)(x-1)$, tehát a nevező zérushelyei: $x_1=+1$, $x_2=-1$. ②

A $D_f=\mathbb{R}\setminus\{+1,-1\}$ halmazon f folytonos, mert folytonos függvények hányadosa, s a nevező nem nulla. ②

$x_1=+1$-ben:

$$f(1\pm 0)=\lim_{x\to 1\pm 0}\underbrace{\frac{|x-1|}{x-1}}_{\to\pm 1}\cdot\underbrace{\frac{1}{x+1}}_{\to\frac{1}{2}} = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow$$ Elsőfajú szakadás, véges ugrás ⑤

$x_2=-1$-ben:

$$f(-1\pm 0)=\lim_{x\to -1\pm 0}\underbrace{\frac{|x-1|}{x-1}}_{\to\frac{|-2|}{-2}=-1}\cdot\underbrace{\frac{1}{x+1}}_{\to\pm\infty} = \mp\infty \Rightarrow$$ másodfajú szakadás ⑤

4, a, $f'(x)=3\sin^2(x^2+1)\cos(x^2+1)\cdot 2x$ ⑥

b, $g'(x)=\left((x^2+3)^{-1/3}\right)' \overset{②}{=} \frac{-1}{3}(x^2+3)^{-4/3}\cdot 2x$ ④

c, $h'(x)=3\cdot\ln 2\cdot 2^{3x}\operatorname{arsh}(2x+1)\;③ + 2^{3x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+(2x+1)^2}}\cdot 2\;③$

4, d, $f'(x) = \left(e^{x \ln x}\right)' \overset{②}{=} (\ln x + 1)\, x^{x}$ ④

—— . ——

5, $\boxed{12}$ $f'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} \overset{④}{=} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{2(3+h)+1} - \frac{1}{2\cdot 3+1}\right) \overset{③}{=}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{7+2h} - \frac{1}{7}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{7-(7+2h)}{h\cdot 7\cdot(7+2h)} \overset{③}{=} \lim_{h\to 0} \frac{-2\cancel{h}}{7\cancel{h}(7+2h)} =$

$= \frac{-2}{49}$ ②

—— . ——

6, $f(x) = \operatorname{arctg}(x^2 - 2x - 3)$

$\boxed{13}$ $f'(x) = \frac{2x-2}{1+(x^2-2x-3)^2} = \frac{2(x-1)}{1+(x^2-2x-3)^2}$ ④ nevező $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén >0

$f'(x) = 0 \iff x = 1$ ③

x	$x<1$	1	$1<x$
f'	$-$	0	$+$
f	↘	lok. min.	↗

$(-\infty, 1]$-en f monoton csökken ② (Elég a táblázat.)

$[1, +\infty)$-en — „ — nő ②

1-ben f-nek lokális minimuma van. ②