- gyakorlat

2010. XI. 24.

Konzultáció nov. 30 Kedd 18^{00}

Diszkrét idejű Markov-láncok

(ez az utolsó, ami ZH-ban lesz!).

(1.) Markov-lánc → az, hogy egy állapotból hova ugrok, csak attól függ, hogy hol vagyok, attól nem, hogy hol voltam.

a)

Átmeneti-mátrix: $P = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$

most 2 állapot van (esős és száraz), így 2x2-es mátrix lesz.

$$P = \begin{array}{c|cc} & E & Sz \\ \hline E & 0{,}7 & 0{,}3 \\ Sz & 0{,}5 & 0{,}5 \end{array}$$

Az első sorban is egy valószínűségi eloszlás van, valamint a második sorban is.

Hosszú távon → átlagos áll. stacioner eloszlást kell nézni.

Bizonyos valószínűséggel esős, bizonyossal száraz állapotban fogjuk találni. Egy közelítés lesz.

Ez egy sajátvektor-probléma megoldását jelenti.

π stacionárius eloszlás, ha $\pi \cdot P = \pi$

π eloszlásból indultam és π-be jutott.

az eloszlást nem változtatja meg az, ha lépek a Markov-lánccal.

Ez csak egy sajátértékhez tartozó sajátvektor!
(nem kell mindre megcsinálni)

$$\pi(P - I) = 0$$

$$(P^T - I)\pi^T = 0$$ ez kell.

P sajátértékei között az 1 mindig szerepelni fog, mert

$$P \cdot \begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$$

Ekkor P^T-nek is sajátértéke az 1.

$$P^T - I \text{ ekkor} = \begin{bmatrix}0{,}7 & 0{,}5\\0{,}3 & 0{,}5\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-0{,}3 & 0{,}5\\0{,}3 & -0{,}5\end{bmatrix}$$

Erre lin. egyenletrendszert tekintünk.

pl. $\pi = \begin{bmatrix}5 & 3\end{bmatrix}$ jó megoldás

(most csak egy egyenletünk van, így nem csak ez a megoldás, hanem $\forall$ konstansszorosa.

Ez jó -> azt akarjuk, hogy π konstansszorosa is jó legyen.

$\pi = \begin{bmatrix}\frac{5}{8} & \frac{3}{8}\end{bmatrix}$ lesz jó, mert

$\frac{5}{8} + \frac{3}{8} = 1.$

b, Ha ma esett, akkor P(2 nap múlva is esni fog) = ?

Ha 1 nap múlva esett -> akkor $\begin{array}{cc} & E \\ E & \begin{bmatrix}\circ & \\ & \end{bmatrix}\end{array}$ ez az elem.

Ha 2 lépést tekintünk, akkor a T mátrixot kétszer kell egymás után alkalmazni. $\left[P^2\right]_{1,1}$ -et keressük, $\begin{bmatrix}\circ & \\ & \end{bmatrix}$ őt keressük.

E $P(2 \text{ nap múlva esik} \mid \text{ma esett}) = \underline{0,64}$ ez lesz.

$$\begin{bmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$$

E7: $\begin{bmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 0,64 & 0,36 \\ & \end{bmatrix}}_{P^2} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 0,658 & \\ & \end{bmatrix}}_{P^3}$

3 nap múlva fog esni: P^3 kell.

$P(3 \text{ nap múlva esik} \mid \text{ma esett})$

$420 + 28 + 180 + 30 =$

$= 448 + 210 = 658$

(2.) 6 oldala lehet felül

→ 6x6-os mátrix lesz

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \boxed{\begin{array}{cccccc} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{array}} \end{array}$$

az átmenetmátrix

$$P^T = P \text{ mert, így } P^T - I = \begin{bmatrix} -1 & & \frac{1}{4} & & & 0 \\ & -1 & & & 0 & \\ \frac{1}{4} & & -1 & 0 & & \frac{1}{4} \\ & \cancel{\frac{1}{4}}\ 0 & 0 & -1 & & \\ & & & \frac{1}{4} & -1 & \\ 0 & & & \frac{1}{4} & & -1 \end{bmatrix}$$

Az egy egyenletrendszer

Ha vesszük a $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vektort, akkor azzal szorozva $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$-at ad.

Vagyis az $\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$ megoldása az egyenletrendszernek.

Most a sorösszeget kényszerítjük.

Mivel a sorösszeg 0, ezért a konstans megoldja az egyenletrendszert.

↓

$\pi = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$, vagyis a stacionárius eloszlás az egyenletes eloszlás.

ez akkor teljesül, ha T oszlopainak összege is 1 (ez egy spec. tulajdonság).

↓ akkor a transzponált sorainak összege 1 és így elegen.

Irreducibilitás: bármelyik állapotból egy másikba el kell tudni jutni 1 vagy több lépéssel.

"ténylegesen megengedettek-e a megfelelő átmenetek?"

1 lépéssel el tudok jutni 2, 3, 4, 5-be, és pozitív valószínűséggel eljuthatok 6-ba és 1-be is → így irreducibilis.

(4.)

$$T = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Markov-láncot alkotnak.

első állapotváltozó

a, $P(1.\text{ és } 2.\text{ évben } V1) = P(1.\text{ évben } V1) \cdot$

$\cdot P(2.\text{ évben } V1 \mid 1.\text{ évben } V1)$

ez egy feltételes valószínűség felírása

$P(1.\text{ évben } V1) = \frac{1}{3}$

$P(2.\text{ évben } V1 \mid 1.\text{ évben } V1) = \frac{2}{3} = P_{11}$

1. évből megyünk 2. évbe.

a mátrixból kiolvasva.

i-edik sor j-edik eleme: i-ben voltam valamilyen feltétel mellett, mi a valószínűsége, hogy 1 lépés után j-be jutok

Így $P(1.\text{ és } 2.\text{ évben } V1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$.

b, Itt 2 lépést kell megtenni a Markov-lánccal és közben nincs információ arról, hogy mi történik.

$P(3.\text{ évben } V1 \mid 1.\text{ évben } V1) = ?$

2 lépéses valség → a mátrix négyzete kell.

$[P]_{11}$, mert az 1. állapotváltozóról van szó.

$[P^2]_{11} = \frac{6}{9} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$

Ezt úgy lehetett, hogy V_1-ben maradt végig, vagy
$V_1 \to V_2 \to V_1$, vagy $V_1 \to V_3 \to V_1$

A valószínűséget szorzatként kell venni → a valószínűséget ~~össze~~ szorzatának összege lesz.

c) $P($~~1. évben V_i~~, 2. évben V_i, ..., (n+1). évben is V_i | 1. évben $V_i)$

ez egy feltételes valószínűség

A múlttól nem függ az, hogy mi van.

↓ P_{ii}-vel való szorozgatással.

$[P]_{ii}$ ... $[P]_{ii}$ a behelyettesítés után ... A Markov-tulajdonság miatt 2. lehet hiszi

$P($2. évben V_i | 1. évben $V_i) \cdot P($3. évben V_i | ~~1.~~ évben és 2. évben $V_i) \cdot \ldots \cdot P($n+1. évben V_i | ~~1~~, ~~2~~, ..., n évben $V_i) =$

Ez egy toronyszabály. $[P]_{ii}$

mivel ez egy Markov-lánc, ezért az, hogy a 3. évben mi lesz, nem függ attól, hogy 1.-ben mi volt.

$$= \underline{\underline{(P_{ii})^n}}$$

d) Hosszú távon milyen gyakorisággal választják ezt az 1. alternatívát.

$$P^T - I = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{12} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -9 & 4 \\ 0 & 1 & -8 \end{bmatrix}$$

ez már egyenletrendszer

Ebből $\pi = \begin{bmatrix} 17t \\ 8t \\ t \end{bmatrix}$

ez a stacionárius eloszlás. t-t úgy kell meghatározni, hogy az összeg 1 legyen:

$$\pi = \begin{bmatrix} \frac{17}{26} \\ \frac{8}{26} \\ \frac{1}{26} \end{bmatrix} \text{ legyen.}$$

e) Ezt a d) alapján meg lehet mondani:

$f(V_1) = 50$
$f(V_2) = 40$
$f(V_3) = 45$

ez állapottéren egy fgv az f.

változó értéke π értékével f-k

A várható értéke: $E_\pi(f) = \sum_{k \in \text{állapottér}} \pi_k \cdot f(k)$

a stacionárius súlyt a fgv. értékkel megszorozzuk.

Ez most: $\frac{17}{26} \cdot 50 + \frac{8}{26} \cdot 40 + \frac{1}{26} \cdot 45$

f) Az átmenetmátrix megfelelő elemét kell ide beírni:

$P(1000.$ és $1001.$ évben is $V1$ van$) =$

$= P(1001.$ évben $V1 \mid 1000.$ évben $V_1) \cdot \underbrace{P(1000.\text{ évben } V_1)}_{\pi_1} =$

Az 1000 sok -> itt már stacionaritás van.

$$P(1001. \text{ év } V1 \mid 1000. \text{ év } V1) = P_{11}$$

így

$$= \Pi_1 \cdot P_{11} \text{ -et kapunk.}$$

Ellen:

az előbbi valószínűséggel analógja

$$P(1000. \text{ és } 1001. \text{ évben ugyanazt választják}) =$$

$$= \Pi_1 P_{11} + \Pi_2 \cdot P_{22} + \Pi_3 \cdot P_{33}.$$

5. Ki

a kettő minimumát jelenti $\wedge$

$$X_{n+1} = (X_n + A_{n+1} - m)_+ \wedge C$$

pozitív rész.

$\wedge$ C fölé nőni sem engedjük.

(Ha negatív, akkor 0, ha +, akkor önmaga)

X_n: a tárolóban lévő anyag mennyisége a leürítés előtt.

A leürítés előtt nem érkezhet be semmi.

X_n Markov-láncként fejlődik: állapota csak attól függ, hogy az előző állapotban mi volt. A korábbi állapotoktól már nem függ.

Az X átmenet-mátrixát kell felírni:

tudjuk X_n értékét, s milyen valószínűséggel lép a többi lehetségesre.

legyen. $q_n = P(A_1 = n)$

$a_{\le n} = P(A_1 \le n)$

$a_{\ge n} = P(A_1 \ge n)$

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \\ \\ \\ c \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & \dots & & & c \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} a_{\le m} & q_{m+1} & q_{m+2} & \dots & & a_{\ge m+c} \\ a_{\le m-1} & q_m & q_{m+1} & \dots & & a_{\ge m+c-1} \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ a_{\le 0} & q_1 & q_2 & \dots & & a_{\ge c} \\ 0 & q_0 & q_1 & \dots & & \\ & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & & q_0 & a_{\ge m} \end{array}\right] \end{array}$$

lehetséges felvett értékek

$(c-m)$-edik hely

pl: 0-ba megy a kifejezés, ha $A_{n+1} - m$ 0-ba megy → $A_{n+1} \le m$.

Így

$P(A_1 \le m)$

0-ból 1-be megy: $A_{n+1} - m = 1$

$\Downarrow$

$A_{n+1} = m+1 \to q_{m+1}$

Ha c fölé növünk, akkor le van vágva.

Ez akkor van, ha $a_{\ge m+c}$

Következő sor (1) → $X_n = 1$

0-ba jutás: $1 + A_{n+1} - m \le 0$

$\Downarrow$

$A_{n+1} \le m-1$

$(m+1)$. sor: ennen indulva és beérkezve: 0.

(6.) Az 5. feladat egy spec. esete

~~$P(A_1)$ -~~

$$P(A_1 = m-1) = q$$

$$P(A_1 = m) = r$$

$$P(A_1 = m+1) = p$$

$$\begin{bmatrix} q+r & p & & & \\ q & r & p & & \emptyset \\ & q & r & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & \emptyset & & r & p \\ & & & q & r+p \end{bmatrix}$$

Be kell látni, hogy a stacionárius ~~fe~~ eloszlás jó

↓

$$\pi_j = \text{konst.} \left(\frac{p}{q}\right)^j \qquad j = 0, 1, \dots, c$$

Ezt kell ellenőrizni

↓ valóban stacionárius-e?
(ha kiindulok a stac. állapotból, akkor visszakapjuk-e a stac. állapotot?)

✓

$$\pi_{j+1} \cdot q + \pi_j \cdot r + \pi_{j-1} \cdot p = \pi_j$$

(j+1)-a volt a sorba, akkor q valószínűséggel fog ez csökkeni.

Kell: $\text{konst.}\left(\frac{p}{q}\right)^{j+1} \cdot q + \text{konst.}\left(\frac{p}{q}\right)^{j} \cdot r + \text{konst.}\left(\frac{p}{q}\right)^{j-1} \cdot p \stackrel{?}{=} \text{konst.}\left(\frac{p}{q}\right)^{j}$

osztunk $\left(\text{konst.}\left(\frac{p}{q}\right)^{j}\right)$-vel

$$\frac{p}{q}\cdot q + r + \frac{r}{p}\cdot p = 1$$

$$p + r + q = 1$$ ez pedig igaz a feladat szerint.

(7.) A Markov-láncnak vannak tranziens állapotai → kilép belőle a Markov-lánc, de ide már nem tud visszamenni.

T, T^C = komplementer

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \overbrace{\quad}^{T} & \overbrace{\quad}^{T^C} \end{array} \\ P = \begin{array}{c} T \\ T^C \end{array} & \left[\begin{array}{c|c} Q & R \\ \hline \emptyset & P_2 \end{array}\right] \end{array}$$

Van állapotoknak olyan halmaza, hogy ha ~~kilép~~ ~~[illegible]~~ T^C-ben vagyunk, akkor $\emptyset$ a valószínűsége, hogy T-be jussunk vissza.

Irreducibilis Markov-láncnak nincsenek tranziensei.

T: tranziens állapotok

T^C: visszatérő állapotok

Ha α az első T^C-beli lépés időpontja, akkor egy T-beli állapotból kiindulva véletlen, hogy melyik T^C-be érünk.

Legyen $i \in T$ és $j \in T^C$ (T-ben vagyok és T^C-be akarok menni.)

kezdőállapot

$$u_{ij} = P(X_\alpha = j \mid X_0 = i)$$

feltéve, hogy ez volt

Amikor először ér el T^C-be, akkor melyikbe érnek el. (Kiindulok T-ből és nem T-be érnek el).

A rekurzió:

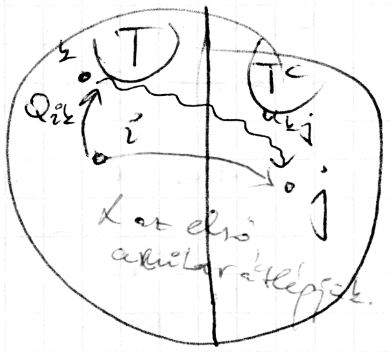
$$\cancel{u_{kj} = p_{ij} \sum_{k \in}}$$

$$u_{ij} = p_{ij} + \sum_{k \in T} Q_{ik} u_{kj}$$

↑ a feltételes esemény felírása aszerint, hogy mi történt.

~~Ha~~ .

de lehet egy is



Ekkor ez p_{ij} és ezzel kész is.

Mátrixokat csinálunk belőlük:

$$U = R + Q \cdot U$$

↑ részmátrix

$$U = (I - Q)^{-1} \cdot R$$

8. 3-as feladathoz

Módosítsuk a 3. feladat Markov-láncát:

1) csináljunk egy megállított Markov-láncot, aminek az átmenet-mátrixa:

$$P = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 3 & 0 & 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad R$$

Az 1. vagy 4.-es állapot abszorbeáló → ezt elnyelőnek nevezhetjük el.

Ez egy spec. alakú Markov-lánc.

Tranziens áll. $T = \{2,3\}$

$T^c = \{1,4\}$

ill, mert ennek kell teljesülnie, hogy a T^c-hez tartozó sorok és a T-hez tartozó oszlopok metszeteiben 0 legyen

↓ hogy ne tudjunk visszalépni. Pont ez a megállítottság.

Kell: $U_{2,1} = ?$

↑

2-ből indulva az 1-et ~~előbb~~ éri el.

(1-et előbb éri el, mint a 4-et).

Határozzuk $U = (I-Q)^{-1} \cdot R$-et.

az eredeti állapot ~~álla~~ indexeket meg kell tartani!

$$Q: \begin{array}{c|cc} & 2 & 3 \\ \hline 2 & 0{,}6 & 0{,}1 \\ 3 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{array}$$

benne van.
~~bene~~

$$R: \begin{array}{c|cc} & 1 & 4 \\ \hline 2 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 3 & 0 & 0{,}3 \end{array}$$

$$I - Q = \begin{bmatrix} 0{,}4 & -0{,}1 \\ -0{,}3 & 0{,}6 \end{bmatrix} \qquad det = 0{,}21$$

$\frac{1}{det} \cdot adj$

ennek inverze: $$(I-Q)^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}4 \end{bmatrix} \cdot \frac{100}{21}$$

így $$(I-Q)^{-1} \cdot R = \frac{100}{21} \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}3 \end{bmatrix} =$$

index öröklődik

$$= \frac{100}{21} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}12 & 0{,}09 \\ 0{,}06 & \end{bmatrix} = \begin{array}{c|cc} & 1 & 4 \\ \hline 2 & \frac{12}{21} & \frac{9}{21} \\ 3 & \dots & \dots \end{array}$$

u_{21} megjelenik.

$\frac{12}{21} + \frac{9}{21} = 1$, így jól néztük

$$U = \begin{array}{c|cc} & 1 & 4 \\ \hline 2 & & \\ 3 & & \end{array}$$

2. sorból érdekel, milyen valószínűséggel jutunk 1-be és 4-be.

(10.)

0,5-tel elromlik → A típusú : 1 hónap 16 mFt

0,6-tel elromlik → B típusú : 2 hónap 3 mFt

~~Az állapotok az egyes hónapok~~ Ha A-t rendelünk e-hónapba