ANALÍZIS(2)
Mérnök Informatikus szak

VIZSGADOLGOZAT β variáns

2007. jún. 14.
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

1. feladat (13 pont)

a) Írja fel az elsőrendű homogén lineáris differenciálegyenlet általános alakját és oldja meg!
b) A homogén vagy az inhomogén differenciálegyenlet megoldásai alkotnak lineáris teret? Hány dimenziós ez a lineáris tér?

a.) $y' + g(x) \cdot y = 0 \quad , \quad g \in C^0_I$ 2

b)

$$y' + g(x) \cdot y = 0 \qquad \text{(szeparábilis differenciálegyenlet)}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -g(x) \cdot y \qquad y \equiv 0 \text{ megoldás}$$

Ha $y \neq 0$:
$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Jelöljük g primitív függvényét G-vel! (G létezik g folytonossága miatt.) Ekkor

$$\ln|y| = -G(x) + C_1$$

$$|y| = \mathrm{e}^{C_1}\,\mathrm{e}^{-G(x)} = K\,\mathrm{e}^{-G(x)}\,, \quad K > 0$$

$$\left.\begin{array}{ll} y>0: & y = K\,\mathrm{e}^{-G(x)} \\ y<0: & y = -K\,\mathrm{e}^{-G(x)} \\ & (K>0) \\ \text{és} & y \equiv 0 \text{ is megoldás.} \end{array}\right\} \Longrightarrow y = C\,\mathrm{e}^{-G(x)}\,, \quad C \in \mathbb{R}$$ 8

az általános megoldás.
A megoldást azon az (α, β) intervallumon kaptuk meg, ahol g folytonos.

$\Big($Ha $y(x_0) = y_0 \implies y_0 = C\,\mathrm{e}^{-G(x_0)}$-ból C egyértelműen meghatározható.$\Big)$

b.) Az inhomogén de. megoldásai nem alkotnak lineáris teret.
$\boxed{3}$
A homogén de. megoldásai lineáris teret alkotnak. Az előző megoldásból látható, hogy a tér 1 dimenziós.

anv-070614/1 β

2. feladat (19 pont)

$$f(x,y) \;=\; \cos(\pi\, x^4 y^2)\quad , \qquad P = P(1\,,\, 1/2)$$

a) Totálisan differenciálható-e az f függvény az adott pontban? $\operatorname{grad} f(P) \;=\; ?$

b) Számolja ki az f függvénynek a $P(1\,,1/2)$ pontbeli $\underline{v} = (-2,-3)$ irányú iránymenti deriváltját!

c) Mennyi az f függvény $P(1,\,1/2)$ pontbeli legnagyobb, illetve a legkisebb iránymenti deriváltja?

$\boxed{9}$ a.) $f_x' = -\sin(\pi x^4 y^2)\cdot 4\pi x^3 y^2$ } K_P-ben léteznek és

5 $f_y' = -\sin(\pi x^4 y^2)\, 2\pi x^4 y$ } folytonosak $\Rightarrow \operatorname{grad} f(P)\ \exists$ 2

(Vagy: f_x', f_y' mindenütt $\exists$ és folytonos $\Rightarrow \operatorname{grad} f$ mindenütt $\exists$.)

$\operatorname{grad} f(P) = f_x'(1,\tfrac{1}{2})\underline{i} + f_y'(1,\tfrac{1}{2})\underline{j} = -\frac{\pi}{\sqrt{2}}\underline{i} - \frac{\pi}{\sqrt{2}}\underline{j}$ 2

b.) $\boxed{5}$ $\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_P = \operatorname{grad} f(P)\cdot \underline{e}$ 2

$|v| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \Rightarrow \underline{e} = \frac{v}{|v|} = \frac{-2}{\sqrt{13}}\underline{i} - \frac{3}{\sqrt{13}}\underline{j}$ 1

$\frac{df}{d\underline{e}} = \left(-\frac{\pi}{\sqrt{2}}\underline{i} - \frac{\pi}{\sqrt{2}}\underline{j}\right)\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}\underline{i} - \frac{3}{\sqrt{13}}\underline{j}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{26}} + \frac{3\pi}{\sqrt{26}} = \frac{5\pi}{\sqrt{26}}$ 2

c.) $\max \left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_P = |\operatorname{grad} f(P)| = \sqrt{\frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{2}} = \pi$ 3

$\min \left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_P = -|\operatorname{grad} f(P)| = -\pi$ 2

3. feladat (10 pont)

a) Írja le a numerikus sorokra vonatkozó hányadoskritérium limeszes alakját!

b) Konvergens-e az alábbi sor:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{(n+2)!}$$

a.) $a_n > 0$ és 1

$\exists \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = c < 1 \Longrightarrow \sum^{\infty} a_n$ konv. 1

$\exists \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = c > 1$ vagy $c = \infty \Longrightarrow \sum a_n$ div 1

anv-070614/2 3

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+3)!} \frac{(n+2)!}{(n+1)^n} = \underbrace{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n}_{\frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}} \underbrace{\frac{n+2}{n+3}}_{\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{3}{n}}} \to \frac{e^2}{e} \cdot \frac{1}{1}$$ (2) (4)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to e > 1 \implies \sum^{\infty} a_n \text{ divergens}$$ (1)

4. feladat (7 pont)

a) Mit nevezünk az f függvény x_0 bázispontú, n-edrendű Taylor polinomjának, illetve a hozzá tartozó Lagrange féle maradéktagjának?

b) Mondja ki a függvény és Taylor sorának megegyezésére tanult elégséges tételt!

a.) Taylor polinom: f legalább n-szer differenciálható x_0-ban:

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$ (3)

Lagrange-féle alakban felírt maradéktag

Ⓣ Ha f legalább $(n+1)$-szer differenciálható $K_{x_0,\delta}$- ban és $x \in K_{x_0,\delta}$, akkor $\exists\, \xi \in (x_0, x)$ (ill. $\xi \in (x, x_0)$), hogy

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-x_0)^{n+1}.$$ (2)

b.)

Elégséges tétel $f(x) = T(x)$ fennállására:

Ⓣ Ha f akárhányszor differenciálható $(-R, R)$-en és $f,\ f',\ f'', \dots, f^{(n)}, \dots$ deriváltfüggvények egyenletesen korlátosak itt, akkor

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,x^k \qquad x \in (-R, R)\text{-en.}$$ (2)

5. feladat (11 pont)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+4x^4}}$$

a) Határozza meg az f függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor sorát és annak konvergenciasugarát! Írja fel az első négy nem nulla tagot elemi műveletekkel!

b) $f^{(12)}(0) = ?$

anv-070614/B (B)

a.) $f(x) = \left(1+4x^4\right)^{-1/3} = \sum_0^{\infty} \binom{-1/3}{n} \left(4x^4\right)^n = \sum_0^{\infty} \binom{-1/3}{n} 4^n x^{4n} =$

$= 1 + \frac{-1/3}{1} 4x^4 + \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)}{1\cdot 2} 4^2 x^8 + \underbrace{\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{7}{3}\right)}{1\cdot 2\cdot 3} 4^3}_{a_{12}} x^{12} + \dots$ 6

$\left|4x^4\right| = 4\left|x^4\right| < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt[4]{4}} \Rightarrow R = \frac{1}{\sqrt[4]{4}}$ 2

b.) $f(x) = \sum_0^{\infty} a_n x^n \quad : \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

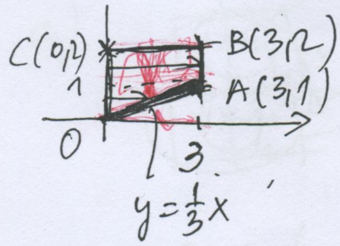
$\Rightarrow f^{(12)}(0) = 12!\, a_{12} = 12!\, \frac{-14}{3^4} 4^3$ 3

6. feladat (15 pont)*

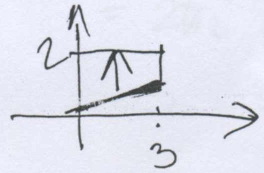
Alakítsa kétféleképpen kétszeres integrállá az alábbi kettősintegrált majd az egyik módon számolja ki:

$$\iint_T \left(18x^2y - 9x\right)\, dT\ ,$$

ahol T az $O(0,0)$, $A(3,1)$, $B(3,2)$ és a $C(0,2)$ pontok által meghatározott trapéz.



$\int_0^1 \int_{x=0}^{\frac{1}{3}x} f(x,y)\, dx\, dy + \int_1^2 \int_0^3 f(x,y)\, dx\, dy$ 5



$\int_0^3 \int_{y=\frac{x}{3}}^{2} f(x,y)\, dy\, dx$ 3

$\Rightarrow$ 2. kétszeres integrállal érdemes dolgozni.

7

$\int_0^3 \int_{y=\frac{x}{3}}^{2} \left(18x^2y - 9x\right) dy\, dx = \int_0^3 9x^2y^2 - 9xy \Big|_{y=\frac{x}{3}}^{2} dx =$

$= \int_0^3 \underbrace{\left(36x^2 - 18x - x^4 + 3x^2\right)}_{39x^2 - 18x - x^4} dy = 13x^3 - 9x^2 - \frac{x^5}{5}\Big|_0^3 = 13\cdot 3^3 - 81 - \frac{3^5}{5}$

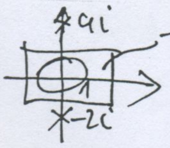
aav-070614/4 13

7. feladat (16 pont)*

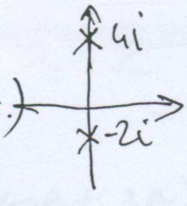
a)
$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{z}{(z+2i)(z-4i)}\,\mathrm{d}z = ?$$

b)
$$\oint\limits_{|z|=3} \frac{z}{(z+2i)(z-4i)}\,\mathrm{d}z = ?$$

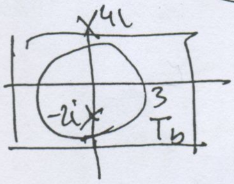
c)
$$\oint\limits_{|z|=5} \frac{z}{(z+2i)(z-4i)}\,\mathrm{d}z = ?$$

a.) 

$$\oint \frac{z}{(z+2i)(z-4i)}\,dz = 0 \text{ (Cauchy-féle át.)}$$
reg T-n ③

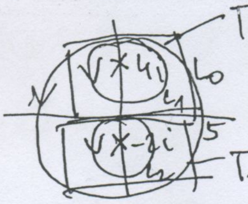


Az integrandus szingularitásai ②

b.) 

reg az e.ö.f. T_b-n

$$\oint \frac{\frac{z}{z-4i}}{z+2i}\,dz = 2\pi i \underbrace{\left.\frac{z}{z+4i}\right|_{z=-2i}}_{=-1} = -2\pi i$$
③ ②

c.) 

reg T_1-en reg T_2-

$$\oint\limits_{L_0} \frac{z}{(z+2i)(z-4i)}\,dz = \oint\limits_{L_1} \frac{\frac{z}{z+2i}}{z-4i}\,dz + \oint\limits_{L_2} \frac{\frac{z}{z-4i}}{z+2i}\,dz =$$
④

$$= 2\pi i \left(\underbrace{\left.\frac{z}{z+2i}\right|_{z=4i}}_{\frac{2}{3}} + \underbrace{\left.\frac{z}{z-4i}\right|_{z=-2i}}_{1/3} \right) = 2\pi i \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) = 2\pi i$$
②

8. feladat (9 pont)*

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

a) Írja le a Cauchy-Riemann parciális differenciálegyenleteket!

b) $f'(z) = ?$ Adjon két különböző képletet a parciális deriváltakkal!
Tudjuk, hogy a $v(x,y) = 3x^2y - y^3 - 3x$ egy reguláris f függvény imaginárius része.
$f'(-2+i) = ?$

a.) u és v totálisan deriválható és
$u'_x = v'_y$ és $u'_y = -v'_x$ ③

b.) $f'(z) = u'_x(x,y) + i\,v(x,y) = v'_y + i v'_x = \dots$ ②

$v'_x = 6xy - 3$ $\quad v'_x(-2,1) = -15$

$v'_y = 3x^2 - 3y^2$ $\quad v'_y(-2,1) = 9$

$f'(-2+i) = v'_y(-2,1) + i\,v'_x(-2,1) = 9 - i \cdot 15$ ④

aw 070607/5 13

Pótfeladatok. Csak az elégséges és a közepes vizsgajegy eléréséhez javítjuk ki.

9. feladat (10 pont)

Adja meg az

$$y'' + 3y' - 10y = -5x$$

differenciálegyenlet összes megoldását!

$y_{ia} = y_H + y_{ip}$ 1

$H: \lambda^2 + 3\lambda - 10 = 0$ 2 $\ldots \Rightarrow \lambda_1 = -5,\ \lambda_2 = 2$

$y_H = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{2x}$ 3

$-10 \cdot \quad y_{ip} = Ax + B$ 1

$3 \cdot \quad y_{ip}' = A$

$\quad y_{ip}'' = 0$

$\underbrace{-10A}_{=-5} x + \underbrace{(-10B + 3A)}_{=0} = -5x$

$\Downarrow \quad A = \frac{1}{2} \qquad \Downarrow \quad B = \frac{3}{10} A = \frac{3}{20}$

$y_{ip} = \frac{1}{2} x + \frac{3}{20}$ 3

$y_{ia} = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2} x + \frac{3}{20}$

10. feladat (10 pont)

$$f(x) = \frac{1}{x - 6}$$

Írja fel az f függvény origó körüli, valamint $x_0 = 3$ körüli Taylor sorait és azok konvergenciasugarait!

$x_0 = 0$

$f(x) = -\frac{1}{6} \frac{1}{1 - \frac{x}{6}} = -\frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{6}\right)^n = -\frac{1}{6} \left(1 + \frac{x}{6} + \left(\frac{x}{6}\right)^2 + \ldots\right)$ 3

K. T. : $\left|\frac{x}{6}\right| = \frac{|x|}{6} < 1 \Rightarrow |x| < 6 \Rightarrow R_1 = 6$ 2

$x_0 = 3$

$f(x) = \frac{1}{(x-3) - 3} = -\frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{x-3}{3}} = -\frac{1}{3} \sum_{0}^{\infty} \left(\frac{x-3}{3}\right)^n = \ldots$ 3

K. T. : $\left|\frac{x-3}{3}\right| = \frac{|x-3|}{3} < 1 \Rightarrow |x-3| < 3 \Rightarrow R_2 = 3$ 2

ano-070614/6. B