ANALÍZIS(1)
Mérnök Informatikus szak

VIZSGADOLGOZAT

2010. máj. 25.
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (7 pont)

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{n^7+3}{n+5}} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = ?$$

Megoldás:

$$b_n = \sqrt[n]{\frac{3}{6}}\,\frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \sqrt[n]{\frac{3}{n+5n}} < a_n < \sqrt[n]{\frac{n^7+3n^7}{5}} = \sqrt[n]{\frac{4}{5}}\,\left(\sqrt[n]{n}\right)^7 = c_n$$

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ és $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1$ $(p>0)$, ezért $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$ és $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 1$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 1\,.$$

2. feladat (7+6=13 pont)

a) Adjon szükséges feltételt numerikus sor konvergenciájára! Állítását bizonyítsa be!

b) Konvergens-e az alábbi sor?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+3}{2n^2-5}\right)^{n^2}$$

Megoldás:

a.) (T) Ha $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergens, akkor $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$. (2)

(B) A Cauchy kritériumból $k=1$ választásnál:

$|s_{n+1} - s_n| = |a_{n+1}| < \varepsilon$, ha $n > N(\varepsilon)$ teljesül

a sor konvergenciája miatt.

Ebből már következik, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (5)

b.) $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{3/2}{n^2}\right)^{n^2}}{\left(1+\frac{-5/2}{n^2}\right)^{n^2}} = \frac{e^{3/2}}{e^{-5/2}} = e^4 \neq 0$$

$\Rightarrow \sum\limits^{\infty} a_n$ divergens, mert nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele

anlv-100525/1.

3. feladat (12 pont)

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = ?$ (Nem használhat L'Hospital szabályt!)

b) Bizonyítsa be, hogy a $\cos x$ deriváltja $(-\sin x)$!
A felhasznált nevezetes limeszt nem kell bizonyítania!

Megoldás:

a.) $\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$ azonosság felhasználásával:

$\boxed{4}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x} = \lim_{x\to 0} -\underbrace{\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}}_{\to 1}\,\underbrace{\sin\frac{x}{2}}_{\to 0} = 0$$

b.) $f(x) := \cos x$

$\boxed{8}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \cos x \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{\to 0 \text{ (l. a.) feladat)}} - \sin x \cdot \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\to 1} = -\sin x, \quad x\in\mathbb{R}$$

4. feladat (18 pont)

$$f(x) = \begin{cases} x\, e^{\frac{1}{2-x}}, & \text{ha } x \neq 2 \\ 0, & \text{ha } x = 2 \end{cases}$$

a) $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x) = ?$, $\quad \lim\limits_{x\to 2-0} f(x) = ?$
Hol és milyen típusú szakadása van az f függvénynek?

b) Írja fel $f'(x)$ értékét, ahol az létezik!

c) Írja le Weierstrass I. és II. tételét!
Van-e minimuma, illetve maximuma f-nek a $[2,3]$ intervallumon? (Nem kell az értéke!)

Megoldás:

a.) $\lim\limits_{x\to 2+0} \underbrace{x}_{\to 2}\, \underbrace{e^{\overbrace{\frac{1}{2-x}}^{\to -\infty\ \left(\frac{1}{-0} \text{ alakú}\right)}}}_{\to 0} = 0$ (2)

$\boxed{6}$

$\lim\limits_{x\to 2-0} \underbrace{x}_{\to 2}\, \underbrace{e^{\overbrace{\frac{1}{2-x}}^{\to +\infty\ \left(\frac{1}{+0} \text{ alakú}\right)}}}_{\to \infty} = \infty$ (2)

$x=2$-ben másodfajú szakadása van, (1)
egyébként a függvény folytonos (1)

an1v-100525/2.

b.) $\boxed{5}$ $f'(2) \nexists$, mert f nem folytonos $x=2$-ben (1)

Ha $x \neq 2$:

$$f'(x) = 1 \cdot e^{\frac{1}{2-x}} + x\, e^{\frac{1}{2-x}} \frac{-1}{(2-x)^2} (-1) \quad (4)$$

c.) $\boxed{7}$ Weierstrass I. tétele:

(T) Ha f folytonos $[a,b]$-n, akkor ott f korlátos. (2)

(T) Weierstrass II. tétele:

Ha f folytonos $[a,b]$-n, akkor ott felveszi az infimumát ill. szuprémumát, tehát van minimuma és maximuma (2)

$f(2+0) = f(2) (=0)$ (1) miatt f folytonos $[2,3]$-on (1)

$\Longrightarrow$ $\exists$ minimuma és maximuma $[2,3]$-on (1)

Weierstrass II. t.

5. feladat (8 pont)

A határozott integrál definíciójával állapítsa meg az

$$\int_a^b 8 \, dx \qquad (a, b \in \mathbb{R},\ a < b)$$

integrál értékét!

Megoldás:

Tetszőleges F felosztásra:

$$s_F = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} 8 \cdot \Delta x_k = 8 \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = 8(b-a)$$

$$\Rightarrow h = \sup\{s_F\} = 8(b-a)$$

$$S_F = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} 8 \cdot \Delta x_k = 8 \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = 8(b-a)$$

$$\Rightarrow H = \inf\{S_F\} = 8(b-a)$$

Mivel $h = H$ $\Longrightarrow$ az integrál létezik és

$$\int_a^b 8\, dx = 8(b-a)$$

6. feladat (8 pont)*

A kétszer differenciálható $y(x)$ függvény kielégíti az

$$(x+1)\,y^3 + \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{4} = 0$$

implicit függvénykapcsolatot és $y(-1) = 1$.
Van-e lokális szélsőértéke a függvénynek az $x_0 = -1$ pontban?
Írja fel a függvény $x_0 = -1$ pontbeli érintőegyenesének az egyenletét!

Megoldás:

Mindkét oldalt x szerint deriválva:

$1 \cdot y^3 + (x+1)\,3y^2y' + \frac{1}{4}\,4y^3y' - 0 = 0$ (3)

$x=-1,\ y=1$:

$1 + 0 + y'(-1) = 0 \Rightarrow y'(-1) = -1$

$y'(-1) \neq 0 \Rightarrow$ nincs lok. szé. $x_0 = -1$-ben (a szükséges feltétel nem teljesül.) (2)

$y_é = y(-1) + y'(-1)\,(x-(-1)) = 1 - (x+1)$ (3)

7. feladat (22 pont)*

a) $\displaystyle\int 3x^2 \ln x \,\mathrm{d}x = ?$

b) $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x}\ln^2 x \,\mathrm{d}x = ?$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}\,\mathrm{d}x = ?$

d) $\displaystyle\int_3^{10} \frac{x}{\sqrt[3]{x-2}}\,\mathrm{d}x = ?$

Szükség esetén alkalmazza a $\sqrt[3]{x-2} = t$ helyettesítést!

Megoldás:

a.) $\boxed{7}$ $\int 3x^2 \ln x \,dx = x^3 \ln x - \int x^2\,dx = x^3 \ln x - \frac{x^3}{3} + C$ (2) (1) (1)

$u' = 3x^2 \quad v = \ln x$ (3)

$u = x^3 \quad v' = \frac{1}{x}$

b.) $\boxed{4}$ $\int_1^e \underbrace{\frac{1}{x}}_{f'} \underbrace{\ln^2 x}_{f^2}\,dx = \left.\frac{\ln^3 x}{3}\right|_1^e = \frac{1}{3}\left(\ln^3 e - \ln^3 1\right) = \frac{1}{3}$

c.) $\boxed{3}$ $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}\,dx = \int \underbrace{1 \cdot (x-2)^{-\frac{1}{3}}}_{f' f^{-\frac{1}{3}}}\,dx = \frac{(x-2)^{2/3}}{\frac{2}{3}} + C$

d.) $\boxed{8}$ $\sqrt[3]{x-2} = t \Rightarrow x = 2+t^3 \Rightarrow dx = 3t^2\,dt$ (2)

$$\int_1^2 \frac{2+t^3}{t}\,3t^2\,dt \;(3)\; = \int_1^2 (6t+3t^4)\,dt = 3t^2 + \frac{3}{5}t^5\Big|_1^2 \;(2)\; =$$

$$= 12 + \frac{3}{5}\cdot 32 - \left(3+\frac{3}{5}\right) \;(1)$$

8. feladat (12 pont)*

a) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-2)\,(x+3)}\,\mathrm{d}x = ?$

b) $\displaystyle\int_3^\infty \frac{1}{(x-2)\,(x+3)}\,\mathrm{d}x = ?$

Megoldás:

a.) $\boxed{7}$ $\dfrac{1}{(x-2)\,(x+3)} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{x+3}$

$1 = A(x+3) + B(x-2)$ $\quad x=2:\; 1 = 5A \Rightarrow A = \frac{1}{5}$

$\quad x=-3:\; 1 = -5B \Rightarrow B = -\frac{1}{5}$

$$\frac{1}{5}\int\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+3}\right)dx = \frac{1}{5}\left(\ln|x-2| - \ln|x+3|\right) + C$$

b.) $\boxed{5}$ a.) felhasználásával:

$$\int_3^\infty \frac{1}{(x-2)(x+3)}\,dx = \lim_{\omega\to\infty}\int_3^\omega \frac{1}{(x-2)(x+3)}\,dx = \lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{5}\left(\ln|x-2| - \ln|x+3|\right)\Big|_3^\omega$$

$$= \frac{1}{5}\lim_{\omega\to\infty}\Big(\underbrace{\ln(\omega-2) - \ln(\omega+3)}_{= \ln\frac{\omega-2}{\omega+3} = \ln\frac{1-\frac{2}{\omega}}{1+\frac{3}{\omega}} \to \ln 1 = 0} - (\underbrace{\ln 1}_{=0} - \ln 6)\Big) = \frac{1}{5}\ln 6$$

A *-gal jelölt feladatokból legalább 15 pontot el kell érni!

Pótfeladatok (csak az elégséges és közepes vizsgajegy eléréséhez javítjuk ki):

9. feladat (10 pont)

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x^2}-1}{\ln(1+2x^2)} = ?$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{(x^2-1)\ (x^2+1)} = ?$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\sin(1-x)}{(x-2)^2} = ?$

Megoldás:

a.) $\boxed{4}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x^2}-1}{\ln(1+2x^2)} \quad \frac{0}{0} \quad \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^{3x^2}\cdot 6x}{\frac{1}{1+2x^2}\cdot 4x} = \frac{3}{2}$$

$e^{3x^2} \to 1$, $\frac{1}{1+2x^2} \to 1$, $\frac{6x}{4x} = \frac{3}{2}$

b.) $\boxed{3}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1} \cdot \frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{4}$$

$\frac{\sin(x-1)}{x-1} \to 1$, $\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} \to \frac{1}{4}$

c.) $\boxed{3}$

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sin(1-x)}{(x-2)^2} = -\infty$$

$\sin(1-x) \to \sin(-1) < 0$, $(x-2)^2 \to +0$

10. feladat (10 pont)

Határozza meg az

$$f(x) = e^{-x^2}$$

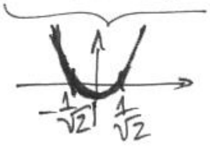
függvény inflexiós pontjait!

Megoldás:

$f'(x) = -2x\, e^{-x^2}$

$f''(x) = -2\, e^{-x^2} - 2x(-2x)\, e^{-x^2} = \underbrace{2\, e^{-x^2}}_{>0} \underbrace{(-1+2x^2)}_{} = 0$

$-1+2x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$



	$(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}})$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty)$
f''	+	0	−	0	+
f	∪	infl. p.	∩	infl. p.	∪

an1v100525/6.