Fizika 1X, pót**zh (2010/11 őszi félév)**

Teszt

1	A sebesség abszolút értékének időszerinti integrálja megadja az elmozdulást.	**H**
2	Az átlaggyorsulás a sebességváltozás és az eltelt idő hányadosa.	**I**
3	A harmonikus rezgő mozgást végző tömegpont gyorsulása az egyensúlyi helyzeten való áthaladáskor maximális.	**H**
4	A tapadási súrlódási erő általában nagyobb, mint a mozgási.	**I**
5	A rakéta mozgását inercia-rendszerben vizsgálva, a fúvóka impulzusa nem változik.	
6	Tökéletesen rugalmatlan centrális ütközés után a két tömegpont relatív sebessége nulla.	
7	A tömegközéppont koordinátái mindig pozitív számok.	**H**
8	Az ugyanakkora tömegű gömb héj és tömör gömb közül a tömörnek nagyobb a tehetetlenségi nyomatéka.	**H**
9	A perdület értéke függ a vonatkoztatási pont megválasztásától.	
10	Tömegpontrendszer impulzusának időbeli megváltozása függ a tömegpontok között fellépő erőhatástól.	

Feladatok

1. Tömegpont helyvektora **r** = $t^3/6$ **i** + 54/t **j** - $3t^2$ **k** [m], ha az időt s-ban írjuk le. Mekkora gyorsulásának nagysága t = 3 s pillanatban?

MEGOLDÁS:

A sebesség az elmozdulás időszerinti első deriváltja, a gyorsulás az elmozdulás időszerinti második deriváltja:

$$\underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt} = \frac{t^2}{2}\underline{i} - \frac{54}{t^2}\underline{j} - 6t\,\underline{k}$$

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} = t\,\underline{i} + \frac{108}{t^3}\underline{j} - 6\underline{k}$$

Ha behelyettesítjük a gyorsulásra kapott egyenletbe a t = 3s-t, akkor a gyorsulásvektorra a következőt kapjuk:

$$\underline{a} = 3\underline{i} + \frac{108}{27}\underline{j} - 6\underline{k} = 3\underline{i} + 4\underline{j} - 6\underline{k}$$

A gyorsulás nagysága (a gyorsulásvektor hossza) a kérdés, amit úgy kapunk meg, hogy gyököt vonunk a gyorsulásvektor koordinátáinak négyzetösszegéből, azaz:

$$a = |\underline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-6)^2} = \sqrt{9+16+36} = \sqrt{61} \approx 7{,}81\frac{m}{s^2}$$

2. 2 kg tömegű test 100 méterrel a Föld felszíne felett 30 m/s sebességgel közeledik a talajhoz. Földet éréskor sebessége 50 m/s. Mekkora a közegellenállás munkavégzése?

MEGOLDÁS:

A gravitációs erőtérben a test mozgási és helyzeti energiájának összege (azaz a test mechanikai energiája) állandó, ha nincs közegellenállás. Ebben a feladatban először ki kell számolni, hogy a testnek a kezdő pozícióban mennyi mechanikai energiája volt. A kiindulási helyzetben a testnek volt mozgási energiája, mivel 30 m/s nagyságú sebessége volt, és volt helyzeti energiája is, mivel 100 m magasan volt. Ez alapján a test fenti összes energiája:

$$E_1 = E_{m,1} + E_{h,1} = \frac{1}{2}m \cdot v_1^2 + m \cdot g \cdot h_1 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 900 + 2 \cdot 10 \cdot 100 = 900 + 2000 = 2900\,J$$

Most megvizsgáljuk a test energiáját a földet éréskor. Ekkor a test helyzeti energiája már nulla (hiszen a test 0 magasságban van), mozgási energiája viszont van az 50 m/s nagyságú sebessége miatt. Ezek alapján az energia:

$$E_2 = E_{m,2} + E_{h,2} = \frac{1}{2}m \cdot v_2^2 + m \cdot g \cdot h_2 = \frac{1}{2}2 \cdot 2500 + 2 \cdot 10 \cdot 0 = 2500 + 0 = 2500\,J$$

A hiányzó energia lesz a közegellenállás munkavégzése (hiszen energia nem vész el):

$$W_{közegell} = E_1 - E_2 = 2900 - 2500 = 400\,J$$

$\boxed{3.}$ Mekkora az **F** = -7**i** + 3**j** (N) erő forgatónyomatéka az **r** = 2**i** + 4**j** (m) helyvektorral kijelölt pontra vonatkozóan?

MEGOLDÁS:

Ehhez a feladathoz tulajdonképpen csak egy vektoriális szorzást kell elvégezni. A forgatónyomaték:

$$\underline{M} = \underline{r} \times \underline{F} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & 4 & 0 \\ -7 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \underline{i} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - \underline{j} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -7 & 0 \end{vmatrix} + \underline{k} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} = \underline{i} \cdot 0 - \underline{j} \cdot 0 + \underline{k} \cdot (6+28) = 34\underline{k}\,(\mathrm{Nm})$$

$\boxed{4.}$ Súlytalan, 1 m hosszú merev rúd végein 2 kg, illetve 3 kg tömegű pontszerű testek vannak. A rúd a nagyobb tömegtől 0,2 m távolságban lévő, a rúdra merőleges tengely körül foroghat. Mekkora a rendszer tehetetlenségi nyomatéka erre a tengelyre vonatkoztatva?

MEGOLDÁS:

A 2 kg tömegű test távolsága a tengelytől: r_1 = 0,8 m. A 3 kg tömegű test távolsága: r_2 = 0,2 m. Az első test tehetetlenségi nyomatéka:

$$\Theta_1 = m_1 \cdot r_1^2 = 2 \cdot (0,8)^2 = 2 \cdot 0,64 = 1,28\,\mathrm{kgm^2}$$

A második test tehetetlenségi nyomatéka:

$$\Theta_2 = m_2 \cdot r_2^2 = 3 \cdot (0,2)^2 = 3 \cdot 0,04 = 0,12\,\mathrm{kgm^2}$$

A rendszer tehetetlenségi nyomatéka megegyezik a két tehetetlenségi nyomaték összegével:

$$\Theta = \Theta_1 + \Theta_2 = 1,28\,\mathrm{kgm^2} + 0,12\,\mathrm{kgm^2} = 1,4\,\mathrm{kgm^2}$$

$\boxed{\textbf{5.}}$ Egy állandó vastagságú lemez síkjára merőleges két különböző tengelyére mérésekből ismerjük a tehetetlenségi nyomatékát (Θ_1 = 1 kgcm^2, Θ_2 = 2 kgcm^2), valamint a tömegközépponttól mért távolságát (d_1 = 1 cm, d_2 = 3 cm). Határozza meg a mérési eredmények birtokában a lemez tehetetlenségi nyomatékát a tömegközépponton átmenő és a lemez síkjára merőleges tengelyre!

MEGOLDÁS:

Ahhoz, hogy megoldjuk ezt a feladatot, csak használnunk kell a Steiner-tételt. Ez azt mondja ki, hogy ha van egy merev testünk, és van két párhuzamos tengelyünk, amik átmennek a testen; az egyik tengely átmegy a tömegközépponton (a merev test tehetetlenségi nyomatéka erre a tengelyre Θ_{tkp}), a másik pedig ettől az első tengelytől *d* távolságra van, akkor a merev test tehetetlenségi nyomatéka erre a másik tengelyre így számolható:

$\Theta_d = \Theta_{tkp} + m \cdot d^2$, ahol *m* a merev test tömege.

A feladatban megadott két tengelyre felírjuk a Steiner-tételt, ki tudjuk számolni Θ_{tkp}–t. A két egyenlet:

$$(1) \qquad \Theta_1 = \Theta_{tkp} + m \cdot d_1^2$$

$$(2) \qquad \Theta_2 = \Theta_{tkp} + m \cdot d_2^2$$

Mivel a távolságok cm-ben vannak megadva, a tehetetlenségi nyomatékok pedig kgcm^2–ben, ezért a számokat simán beírhatjuk az egyenletekbe (nem kell átváltanunk semmit). A két egyenlet tehát:

$$(1) \qquad 1 = \Theta_{tkp} + m \cdot 1^2$$

$$(2) \qquad 2 = \Theta_{tkp} + m \cdot 3^2$$

Az első egyenletből *m* könnyen kifejezhető: $m = 1-\Theta_{tkp}$. Ezt beírva a második egyenletbe azonnal megkapjuk a megoldást:

$$2 = \Theta_{tkp} + \left(1-\Theta_{tkp}\right) \cdot 3^2 = \Theta_{tkp} + 9 - 9\Theta_{tkp} = 9 - 8\Theta_{tkp} \;\Rightarrow\; 8\Theta_{tkp} = 7 \;\Rightarrow\; \Theta_{tkp} = \frac{7}{8} = 0{,}875\,\text{kgcm}^2$$

$\boxed{6.}$ Az asztalon L hosszúságú hajlékony kötél fekszik. A végét egy kicsit meghúzva, a kötél súrlódás nélkül lecsúszik az asztalról. Mennyi a sebessége, amikor a felső vége éppen elhagyja az asztalt?

MEGOLDÁS:

Hasonlóképpen gondolkodhatunk, mint a 2. feladatban. Azaz gravitációs erőtérben egy test mozgási és helyzeti energiájának összege állandó. A helyzeti energia nulla szintjének vegyük azt az állapotot, amikor a kötél felső vége éppen elhagyja az asztalt (azaz a végállapotot). Ilyenkor a kötél a kiindulási állapotban (az asztalon) a viszonyítási szintünkhöz képest L/2 magasságban van. Azért csak L/2 magasságban, mert a kötél tömegközéppontja a kötél közepében van (azaz a felénél). Tehát amikor a kötél a kiindulási ponttól (asztal) a végállapotig eljut (a felső része még éri az asztalt), akkor a tömegközéppontja csak L/2 magasságot csökkent. Ezek alapján a kötél energiája, mikor az asztalon fekszik (helyzeti energiája van, mozgási nincs):

$$E_1 = E_{m,1} + E_{h,1} = \frac{1}{2} m \cdot v_1^2 + m \cdot g \cdot h_1 = \frac{1}{2} m \cdot 0^2 + m \cdot g \cdot \frac{L}{2} = m \cdot g \cdot \frac{L}{2}$$

A kötél energiája, amikor a felső része még épp hozzáér az asztalhoz (helyzeti energia nincs, mozgási energia van):

$$E_2 = E_{m,2} + E_{h,2} = \frac{1}{2} m \cdot v_2^2 + m \cdot g \cdot h_2 = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + m \cdot g \cdot 0 = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

A két energiának az energia megmaradás miatt nyilván meg kell egyeznie:

$$E_1 = \quad \cancel{m} \cdot g \cdot \frac{L}{2} = \frac{1}{2} \cancel{m} \cdot v^2 \quad = E_2$$

$$g \cdot \frac{L}{2} = \frac{v^2}{2}$$

$$g \cdot L = v^2$$

$$\sqrt{g \cdot L} = v$$

$\boxed{7.}$ M=0.2 Nm forgatónyomatékkal a tengelysúrlódást legyőzve egyenletesen forgatunk egy testet. Mekkora munkát végzünk, mialatt a szögelfordulás 430°?

MEGOLDÁS:

Először a szögelfordulást át kell váltani radiánba:

$$\frac{430°}{360°} = \frac{\varphi}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{430° \cdot 2\pi}{360°} \approx 7,5$$

A munka ezután már könnyen számolható:

$$W = M \cdot \varphi \approx 0,2 \cdot 7,5 = 1,5\,J$$

8. A kezdősebesség nélkül szabadon eső test utolsó két másodpercbeli átlagsebessége háromszorosa az első két másodpercbeli átlagsebességének. Mekkora a test végsebessége?

MEGOLDÁS:

A kezdő pillanathoz képest t idő múlva a test elmozdulása a kiindulási ponthoz képest:

$$s = \frac{g}{2} t^2$$

Ezt fogjuk kihasználni. Először számoljuk ki az első két másodpercbeli átlagsebességet! Ehhez tudnunk kell az első 2 másodpercben megtett utat. Ezt könnyű kiszámolni, hiszen ez megegyezik a 2 sec alatt történő elmozdulással:

$$s_{0\sec\to 2\sec} = \frac{g}{2} 2^2 = 2g$$

Így már ki tudjuk számolni az átlagsebességet. Tudjuk, hogy a test ezt az utat 2 sec alatt tette meg. Ez alapján az átlagsebesség:

$$\overline{v}_{0\sec\to 2\sec} = \frac{s_{0\sec\to 2\sec}}{2\sec} = \frac{2g}{2} = g$$

Most jön az utolsó két másodperbeli átlagsebesség kiszámítása. Nem tudjuk, hogy a test mennyi ideig esett, legyen ez az idő *t*. Az utolsó két másodpercben megtett utat úgy kapjuk meg, hogy a *t* ideig megtörtént elmozdulásból kivonjuk a *t-2* ideig történt elmozdulást. Az utolsó két másodpercben megtett út tehát:

$$s_{(t-2)\sec\to t\sec} = \frac{g}{2} t^2 - \frac{g}{2}\left(t-2\right)^2 = \frac{g}{2}\left(t^2 - t^2 + 4t - 4\right) = \frac{g}{2}\left(4t-4\right) = 2\ \left(gt-1\right)$$

Ez alapján ki tudjuk számolni az utolsó két másodpercbeli átlagsebességet:

$$\overline{v}_{(t-2)\sec\to t\sec} = \frac{s_{(t-2)\sec\to t\sec}}{2\sec} = \frac{2g\left(t-1\right)}{2} = g\left(t-1\right)$$

Tudjuk, hogy ez háromszorosa az elsőre kiszámolt átlagsebességnek, ez alapján ki tudjuk számolni, mennyi ideig esett a test:

$$3 \cdot \overline{v}_{0\sec\to 2\sec} = \quad 3g = g\left(t-1\right) \quad = \overline{v}_{(t-2)\sec\to t\sec}$$

$$3 = t - 1$$

$$4 = t$$

Tehát a test 4 másodpercen keresztül esett. Ebből már ki tudjuk számolni a végsebességét:

$$v_t = v_{4\sec} = v_0 + gt = 0 + g \cdot 4 = 40 \frac{m}{s}$$

$\boxed{9.}$ Egyenletesen gyorsuló mozgást végző jármű útjának 90 méteres darabján három másodperc alatt megkétszerezte sebességét. Mennyi volt a sebessége a 90 méteres szakasz elején?

<u>MEGOLDÁS:</u>

Állandó gyorsulásnál, ha ismerjük a test két időpillanatbeli sebességét (t_1 és t_2 a két időpillanat), akkor a két időpillanat között megtett út számolható így:

$$s=\frac{v_{t_1}+v_{t_2}}{2}\left(t_2-t_1\right)$$

Az utat és a két idő különbségét (3s) tudjuk. Ebben az egyenletben csak a sebességek ismeretlenek, de ki tudjuk őket számolni, hiszen tudjuk, hogy a második sebesség az elsőnek a kétszerese. Ez alapján az egyenlet:

$$90=\frac{v_{t_1}+2v_{t_1}}{2}\cdot 3=\frac{3v_{t_1}}{2}\cdot 3=\frac{9v_{t_1}}{2} \quad \Rightarrow \quad v_{t_1}=\frac{90\cdot 2}{9}=\frac{180}{9}=20\frac{m}{s}.$$

$\boxed{10.}$ Milyen irányban dobtuk el azt a testet, amely 4s múlva 80 m távolságban esik a földre ($g=10\ m/s^2$, a légellenállást elhanyagoljuk)?

<u>MEGOLDÁS:</u>

A test kezdősebességének nagysága legyen *v*, a vízszintessel bezárt szög legyenα. Ilyenkor a sebesség függőleges komponensének nagysága $v\cdot\cos\alpha$, a vízszintes komponensé $v\cdot\sin\alpha$. A ferde hajítás olyan, mintha két mozgás együttese lenne: egy függőleges felfelé hajításé, és egy vízszintes egyenes vonalú egyenletes mozgásé. Amikor a test földet ér (a dobás pillanatától számított 4 másodperccel később), a függőleges irányban történt elmozdulása 0 kell, hogy legyen:

$$s_y=v_y\cdot t-\frac{g}{2}t^2=v\cdot\sin\alpha\cdot t-\frac{g}{2}t^2=0$$

$$v\cdot\sin\alpha\cdot 4-5\cdot 4^2=0 \quad \Rightarrow \quad v\cdot\sin\alpha=\frac{5\cdot 16}{4}=5\cdot 4=2\ ($$

A vízszintes elmozdulásnak ugyanebben a pillanatban 80 méternek kell lennie. Mivel a test vízszintes mozgása egyenletes, ezt az egyenletet kapjuk:

$$s_x=v_x\cdot t=v\cdot\cos\alpha\cdot t=80$$

$$v\cdot\cos\alpha\cdot 4=80 \quad \Rightarrow \quad v\cdot\cos\alpha=\frac{80}{4}=20$$

A két egyenlet alapján kapunk egy újabb egyenletet:

$$20=v\cdot\sin\alpha=v\cdot\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha=\cos\alpha$$

Mivel $0°<\alpha<90°$, ezért ez csakis $\alpha=45°$-ra teljesül. Tehát a testet 45°-os szögben dobtuk el.