1, i, $\boxed{12}$

$$I=\int \cos(\sqrt{x})\,dx \Longrightarrow \int \cos u \cdot 2u\,du \;(3) = 2\int \underset{f}{u}\,\underset{g'}{\cos u}\,du =$$

$$u=\sqrt{x} \qquad x=u^2;\ dx=2u\,du \qquad f'=1 \quad g=\sin u$$

$$= 2u\sin u - 2\int 1\cdot \sin u\,du \;(3) = 2u\sin u + 2\cos u + C \;(3)$$

Tehát $\underline{\underline{I = 2\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + 2\cos\sqrt{x} + C}}$ (3)

ii, $\boxed{13}$

$$\frac{x^2+1}{x^2-9} = 1 + \frac{10}{(x+3)(x-3)} \;(2) = 1 + \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-3} \;(3)$$

$$10 = A(x-3) + B(x+3); \qquad \left.\begin{array}{l} x=-3:\ 10=-6A;\ A=-\frac{5}{3} \\ x=+3:\ 10=6B;\ B=\frac{5}{3} \end{array}\right\} (4)$$

$$\int \frac{x^2+1}{x^2-9}\,dx = \int 1\,dx - \frac{5}{3}\int\frac{dx}{x+3} + \frac{5}{3}\int\frac{dx}{x-3} = \underline{\underline{x - \frac{5}{3}\ln|x+3| + \frac{5}{3}\ln|x-3| + C}} \;(4)$$

2, $\boxed{10}$ Az f függvény integrálfüggvénye: $F(x) = \int_{t=x_0}^{x} f(t)\,dt$. (2)

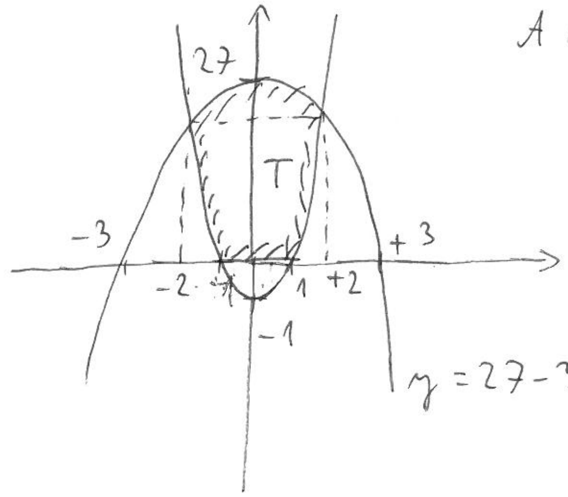
Legyen $f(t)=e^{t^2}$, és $F(x)=\int_{t=0}^{x} e^{t^2}\,dt$. Ekkor, az integrálszámítás II. alaptétele szerint, mivel f folytonos, $F'(x)=f(x)$. Ugyanakkor

$$g(x) = \int_{t=0}^{\sqrt{\ln(x)}} e^{t^2}\,dt = F(\sqrt{\ln(x)}), \;(3)$$ így

$$g'(x) = F'(\sqrt{\ln(x)})\cdot(\sqrt{\ln(x)})' \;(1) = f(\sqrt{\ln x})\cdot\frac{1/x}{2\sqrt{\ln x}} \;(2) =$$

$$= \underbrace{e^{(\sqrt{\ln x})^2}}_{x}\cdot\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}} = \underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{\ln x}}}} \;(2)$$

3, Az $y=27-3x^2$ görbe lefelé nyíló parabola, az $y=x^4-1$ felfelé nyíló negyedfokú görbe. Mindkét görbe páros.
[15]



$y=27-3x^2$

A két görbe metszete:

$$27-3x^2 = x^4-1 \quad (2)$$

$$x^4+3x^2-28=0 \; ; \quad z=x^2 \geq 0$$

$$z^2+3z-28=0$$

$$z_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+4\cdot 28}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{121}}{2}=\frac{-3\pm 11}{2}$$

$$z_1=-7<0 \;\lightning\; ; \quad z_2=x^2=\frac{8}{2}=4 \; ; \quad \underline{\underline{x=\pm 2}} \qquad (6)$$

A keresett terület:

$$T=2\cdot\left(\underbrace{\int_0^1 (27-3x^2)\,dx}_{y\geq 0} + \int_1^2 \big(\underbrace{27-3x^2-(x^4-1)}_{28-3x^2-x^4}\big)\,dx\right)= \quad (2) \; (2)$$

páros fgv.

$$=2\left(\left[27x-x^3\right]_0^1+\left[28x-x^3-\frac{x^5}{5}\right]_1^2\right) \overset{(2)}{=} 2\left(27-1+28-7-\frac{31}{5}\right) \overset{(1)}{=}$$

$$=\frac{2\cdot 47\cdot 5-62}{5}=\frac{408}{5}=81.6$$

— ∘ —

4, Több alakot is elfogadunk:

i, a, Minden legalább elsőfokú komplex polinomnak van legalább egy gyöke a komplex számok körében.

(3) b, Minden komplex polinom (lényegében egyértelműen) felírható elsőfokú polinomok (gyöktényezők) szorzataként.

ii, $z^6=\underbrace{\overline{(1+i)}}_{1-i}z+3$ Az algebra alaptétele értelmében $\exists$ gyök, komplex polinomja z-nek. (6)

iii, $(\bar{z}z)^6=(1+i)(\bar{z}z+1)$ $\quad \bar{z}z+1$ valós, és ≥ 1, így a jobb oldal képzetes része nem nulla, míg a bal oldal tisztán valós. Tehát $\nexists$ gyök. (6)

5, $x \operatorname{arctg} y(x) - x = (x-2)^2 y(x)$; $x_0 = 2$-ben: $2 \operatorname{arctg} y_0 - 2 = 0$

$\operatorname{arctg} y_0 = 1, \quad y_0 = \operatorname{tg} 1$ (3)

$\frac{d}{dx}$

$$\operatorname{arctg} y(x) + \frac{x\, y'(x)}{1+y^2(x)} - 1 = 2(x-2)\,y(x) + (x-2)^2\, y'(x) \quad (4)$$

$x_0 = 2,\ y_0 = \operatorname{tg} 1$-ben: $1 + \frac{2\,y'(x_0)}{1+\operatorname{tg}^2 1} - 1 = 0 + 0 \Rightarrow \underline{y'(x_0) = 0}$ ✓ (3)

$\frac{d}{dx}$

$$\frac{y'}{1+y^2} + \frac{(y' + x y'')(1+y^2) - x y' \cdot 2 y y'}{(1+y^2)^2} = 2y + 2(x-2)y' + 2(x-2)y' + (x-2)^2 y''$$ (4)

$x_0 = 2,\ y_0 = \operatorname{tg} 1;\ y'(x_0) = 0$ esetén:

$$0 + \frac{\cancel{2}\, y''(2)\, \cancel{(1+\operatorname{tg}^2 1)}}{(1+\operatorname{tg}^2 1)^{\cancel{2}}} = \cancel{2}\operatorname{tg} 1 + 0 + 0 + 0 \quad (3)$$

$y''(2) = \operatorname{tg} 1 \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 1) > 0$, tehát f-nek x_0-ban <u>lokális minimuma van.</u> (3)

6, a, Ha f, g deriválható x_0-ban, akkor fg is deriválható x_0-ban, és (2)

$(fg)'(x_0) = f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0)$ (2) $\boxed{4}$

b,

$$(fg)'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{(fg)(x_0+h) - (fg)(x)}{h} \ (3) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)\,g(x_0+h) - f(x_0)\,g(x_0)}{h} =$$

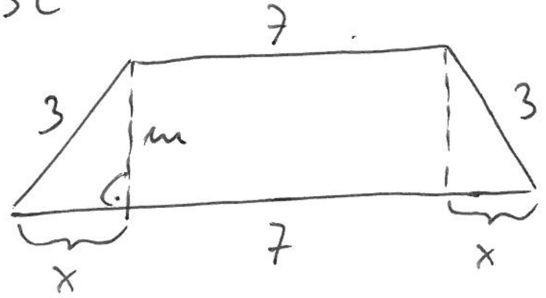
$$\boxed{11} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)\big(g(x_0+h) - g(x_0)\big) + \big(f(x_0+h) - f(x_0)\big)\,g(x_0)}{h} \ (3) =$$

$$= \lim_{h\to 0}\Bigg(\underset{\substack{\downarrow h\to 0\\ f(x_0)}}{f(x_0+h)}\ \underset{\substack{\downarrow h\to 0\\ g'(x_0)}}{\underbrace{\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}}} + \underset{\substack{\downarrow h\to 0\\ f'(x_0)}}{\underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}}\ g(x_0)\Bigg) \ (3) = f(x_0)\,g'(x_0) + f'(x_0)\,g(x_0)$$ ✓ (2)

mert f folytonos, mivel diff.-ható.

IMSC

16



A feladatot többféle módon paraméterezhetjük. A legegyszerűbb, ha az ismeretlen oldalt $7+2x$-el jelöljük. Látható, hogy $-3 \le x \le +3$

Ekkor a magasság: $m=\sqrt{9-x^2}$,

terület: $T(x)=\dfrac{7+7+2x}{2}\, m=(7+x)\sqrt{9-x^2}$

Ott van lokális szélsőérték, ahol $T'(x)=0$, tehát

$$T'(x)=\sqrt{9-x^2}+(7+x)\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{9-x^2}}=0 \implies \sqrt{9-x^2}=\frac{(7+x)x}{\sqrt{9-x^2}}$$

$$9-x^2=7x+x^2;\quad 2x^2+7x-9=0;$$

$$x_{1,2}=\frac{-7\pm\sqrt{49+72}}{4}=\frac{-7\pm 11}{4}=\begin{cases}-\frac{9}{2}<-3 \ ↯\\ 1 \ ✓\end{cases}$$

Ekkor a terület: $T(1)=(7+1)\sqrt{9-1}=8\sqrt{8}=\underline{\underline{16\sqrt{2}}}=\left(\sqrt{512}>\sqrt{441}=21\right)$

Ez a terület maximuma, hiszen $T(x)$ folytonos $[-3,+3]$-on, és

$T(-3)=T(+3)=0$ (és $T(0)=7\cdot 3=21$)

—∘—

Pontozás:
terület-fgv. felírása egy paraméterrel: 5
deriválás: 4
derivált $=0$ megoldása a paraméterre: 4
extremális terület meghatározása: 2
Ez maximum (indoklás): 1

A részpontszámok kiosztása és az indoklások az α variáns szerint megy. Itt csak az eredményeket soroltuk.

1, i, [12] $\int e^{\sqrt{x}}\,dx \Rightarrow \int e^{u}\,2u\,du \;③ = 2ue^{u} - 2\int e^{u}\,du \;③ = 2ue^{u} - 2e^{u} + C \;③$

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx = \underline{\underline{2(\sqrt{x}-1)\,e^{\sqrt{x}} + C}} \;③$$

parc. törtek → ③ + ④ ← $\pm\frac{3}{4}$

ii, [13] $\int \frac{x^2-1}{4-x^2}\,dx = \int\left(-1-\frac{3}{(x+2)(x-2)}\right)dx \;② = \int\left(-1+\frac{3/4}{x+2}+\frac{-3/4}{x-2}\right)dx =$

$$= \underline{\underline{-x+\frac{3}{4}\ln|x+2|-\frac{3}{4}\ln|x-2|+C}} \;④$$

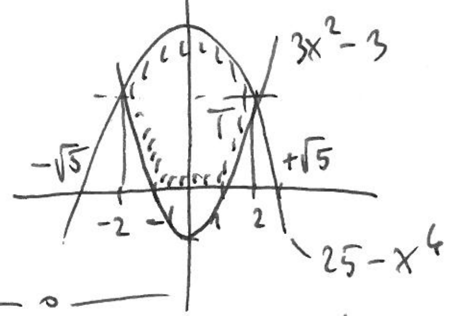
—— ∘ ——

Integrál fv. ②

2, [10] $g'(x) = \frac{d}{dx}\left(F(e^{\sqrt{x}})\right) \;④ = \underbrace{F'(e^{\sqrt{x}})}_{f(e^{\sqrt{x}})}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\,e^{\sqrt{x}} = \underbrace{\ln^2(e^{\sqrt{x}})}_{x}\,\frac{1}{2\sqrt{x}}\,e^{\sqrt{x}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{x}}{2}\,e^{\sqrt{x}}}} \;④$

—— ∘ ——

3, [15] $25-x^4 = 3x^2-3 \;② \underset{z=x^2}{\Rightarrow} z^2+3z-28=0 \Rightarrow z=4,\; x=\pm 2 \;⑥$



$$T = 2\left(\int_0^1 (25-x^4)\,dx \;② + \int_1^2 \left(25-x^4-(3x^2-3)\right)dx \;②\right) =$$

$$= 2\left(25-\frac{1}{5}+25-\frac{32-1}{5}-\cancel{3}\,\frac{8-1}{\cancel{3}}+3\right) \;③ =$$

$$= 92-\frac{64}{5} = \frac{396}{5} = 79{,}2$$

—— ∘ ——

4, [15] Algebra alaptétele (l. α) ③

$((\overline{1+i})+z)^6 + z^2 = 8$ Ez egy polinom, tehát $\exists$ gyök. ⑥

$(\bar{z}+z)^6 + 9 = 8$ $\quad \bar{z}+z \in \mathbb{R}$; $(\bar{z}+z)^6 \geq 0$ ↯ $\nexists$ gyök ⑥

$8-9=-1<0$

—— ∘ ——

5, $(x+2)^2 y = x\,\mathrm{arctg}\,y - x$; $\quad 0 = -2\,\mathrm{arctg}\,y_0 + 2 \Rightarrow y_0 = \mathrm{tg}\,1$ ③

$2(x+2)y + (x+2)^2 y' = \mathrm{arctg}\,y + \frac{xy'}{1+y^2} - 1 \;④ \Rightarrow 0+0 = \cancel{1} + \frac{-2y'(x_0)}{1+\mathrm{tg}^2 1} - \cancel{1} \Rightarrow \underline{y'(x_0)=0} \;③$

$2y + 2(x+2)y' + 2(x+2)y' + (x+2)^2 y'' = \frac{y'}{1+y^2} + \frac{(y'+xy'')(1+y^2) - xy'\cdot 2yy'}{(1+y^2)^2} \;④$

$\Rightarrow 2\cdot\mathrm{tg}\,1 + 0 + 0 + 0 = 0 + \frac{-2y''(x_0)}{1+\mathrm{tg}^2 1} \;③ \Rightarrow y''(x_0) = -\mathrm{tg}\,1\,(1+\mathrm{tg}^2 1) < 0 \Rightarrow$ lok. max. ③