ANALÍZIS(1)
Mérnök Informatikus szak

I. ZÁRTHELYI pótlása, javítása

2010. április 1.
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (12 pont)

a) Adja meg a következő definíciókat:

$a1)\quad \lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $a2)\quad \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

b) A megfelelő definícióval igazolja, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2+2n+3}{2n+1} = \infty$$

a1) $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ $\quad (\varepsilon \in \mathbb{R})$:
$|a_n - A| < \varepsilon$, ha $n > N(\varepsilon)$ $\quad$ 3

a2) $\forall\, P > 0$-hoz $\exists\, N(P) \in \mathbb{N}$ $\quad (P \in \mathbb{R})$:
$a_n > P$, ha $n > N(P)$ $\quad$ 3

b) $$a_n = \frac{5n^2+2n+3}{2n+1} > \frac{5n^2+0+0}{2n+n} = \frac{5}{3}n > P$$
$$\Rightarrow n > \frac{3}{5}P \qquad N(P) = \left[\frac{3}{5}P\right]$$ 6

2. feladat (25 pont)

Határozza meg az alábbi sorozatok limeszét (ha létezik), valamint a limesz szuperiorját és a limesz inferiorját:

$$a_n = \sqrt{n^2+2n-5} - \sqrt{n^2-7n-1} \qquad b_n = \frac{2^{n+3} + (-1)^n\, 8^n}{1+8^{n+1}}$$

$$c_n = \frac{3^n + 3\cdot 2^n}{3^{n+3} + (-1)^n}$$

$$a_n = \left(\sqrt{n^2+2n-5} - \sqrt{n^2-7n-1}\right) \frac{\sqrt{n^2+2n-5} + \sqrt{n^2-7n-1}}{\sqrt{n^2+2n-5} + \sqrt{n^2-7n-1}} =$$

$$= \frac{n^2+2n-5-(n^2-7n-1)}{\sqrt{n^2+2n-5} + \sqrt{n^2-7n-1}} = \frac{9n-4}{\sqrt{n^2+2n-5} + \sqrt{n^2-7n-1}} =$$

$$= \underbrace{\frac{n}{\sqrt{n^2}}}_{=1} \frac{9-\frac{4}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}-\frac{5}{n^2}} + \sqrt{1-\frac{7}{n}-\frac{1}{n^2}}} \longrightarrow \frac{9}{1+1} = \frac{9}{2} = \lim_{n\to\infty} a_n$$ 7

an1z1p100401/1.

$$\underline{\lim}\, a_n = \overline{\lim}\, a_n = \frac{9}{2}$$ 2

$$b_n = \frac{8\cdot 2^n + (-1)^n 8^n}{1 + 8\cdot 8^n} = \frac{8\left(\frac{1}{4}\right)^n + (-1)^n}{\left(\frac{1}{8}\right)^n + 8}$$

n ps: $\quad b_n = \dfrac{8\left(\frac{1}{4}\right)^n + 1}{\left(\frac{1}{8}\right)^n + 8} \longrightarrow \dfrac{0+1}{0+8} = \dfrac{1}{8}$ $\quad$ 3

n ptl $\quad b_n = \dfrac{8\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1}{\left(\frac{1}{8}\right)^n + 8} \longrightarrow \dfrac{0-1}{0+8} = -\dfrac{1}{8}$ $\quad$ 3

$\overline{\lim}\, a_n = \frac{1}{8}$; $\underline{\lim}\, a_n = -\frac{1}{8}$; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \nexists$ (több torlódási pont
3

$$c_n = \frac{3^n + 3\cdot 2^n}{27\cdot 3^n + (-1)^n} = \frac{1 + 3\left(\frac{2}{3}\right)^n}{27 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n} \longrightarrow \frac{1}{27} \quad 5$$

$$\underline{\lim}\, a_n = \overline{\lim}\, a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{27} \quad 2$$

3. feladat (15 pont)

$$a_{n+1} = \sqrt{8a_n - 7}\,, \quad n = 1, 2, \cdots \quad \text{és} \quad a_1 = 4$$

$$(a_n) = (4\,,\, 5\,,\, 5.74\,, \cdots)$$

a) Bizonyítsa be, hogy $1 < a_n < 7$!
b) Igazolja, hogy a sorozat monoton!
c) Konvergens-e ez a sorozat? Ha igen, mi a határértéke?

a.) 1.) $1 < a_i < 7$ $\quad i = 1, 2, 3$ fennáll

$\boxed{5}$ 2.) Tegyük fel, hogy
$1 < a_n < 7$

3.) Igaz-e? $\quad 1 \overset{?}{<} a_{n+1} = \sqrt{8a_n - 7} \overset{?}{<} 7$

2.) miatt: $\quad 1 < a_n < 7 \quad |\cdot 8$
$8 < 8a_n < 56 \quad |-7$
$0 < 1 < 8a_n - 7 < 49$
$1 = \sqrt{1} < \sqrt{8a_n - 7} = a_{n+1} < \sqrt{49} = 7$

Az állítás igaz

b.) Sejtés: (a_n) monoton nő (sőt szigorúan monoton nő)

$\boxed{5}$ 1.) $a_1 < a_2 < a_3$

2.) Tegyük fel, hogy $a_{n-1} < a_n$

3.) Igaz-e? $\quad a_n = \sqrt{8a_{n-1} - 7} \overset{?}{<} \sqrt{8a_n - 7} = a_{n+1}$

2. miatt $a_{n-1} < a_n$ teljesül

$$\Rightarrow 8a_{n-1} < 8a_n$$

$$\Rightarrow \underbrace{1 < 8a_{n-1} - 7}_{a.)\ \text{miatt}} < 8a_n - 7$$

$$\Rightarrow \sqrt{8a_{n-1}-7} = a_n < \sqrt{8a_n - 7} = a_{n+1}$$

Tehát $(a_n) \nearrow$

c.) $(a_n) \nearrow$ és felülről korlátos $\Rightarrow$ (a_n) konvergens 2

$\boxed{5}$ A-ra teljesül:

$$A = \sqrt{8A-7} \Rightarrow A^2 - 8A + 7 = (A-1)(A-7) = 0$$

$\Rightarrow A = 1$ vagy $A = 7$.

$A = 1$ nem jöhet szóba, mert $a_1 = 4$ és $(a_n) \nearrow$.

Tehát $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 7$ 3

4. feladat (13 pont)

a) $$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{3}{2n^2}\right)^{6n^2} = ?$$

b) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+5}{2n^2+3}\right)^{n} = ?$$

a.) $\boxed{4}$ $$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1 + \frac{-3}{2n^2}\right)^{2n^2}\right)^3 = (e^{-3})^3 = e^{-9}$$

(Felhasználtuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$)

b.) $\boxed{9}$ $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\underbrace{\left(\frac{2n^2+5}{2n^2+3}\right)^{n^2}}_{:=\beta_n}} = \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}\beta_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{5/2}{n^2}\right)^{n^2}}{\left(1+\frac{3/2}{n^2}\right)^{n^2}} = \frac{e^{5/2}}{e^{3/2}} = e$$

$\Rightarrow$ $e - 1 < \beta_n < e + 1$, ha $n > N_1$ ($\exists$ ilyen N_1)

$$\Rightarrow \underbrace{\sqrt[n]{e-1}}_{\downarrow\ 1} < \sqrt[n]{\beta_n} < \underbrace{\sqrt[n]{e+1}}_{\to 1}$$

$$\Rightarrow b_n = \sqrt[n]{\beta_n} \to 1$$

5. feladat (10 pont)

a) Írja le a rendőrelvet!

b) $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{\dfrac{3n^5 + n^3 + 3}{3n^4 + 5n^2}} = ?$

a.) $\boxed{3}$ Ha $(a_n \le b_n \le c_n \quad \forall\, n\text{-re})$ és $(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A,\ \lim\limits_{n\to\infty} c_n = A)$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = A$$

b.) $\boxed{7}$

$$1 \leftarrow \underset{\substack{\downarrow\\1}}{\sqrt[n]{\frac{3}{8}}}\ \underset{\substack{\downarrow\\1}}{\frac{1}{(\sqrt[n]{n})^4}} = \sqrt[n]{\frac{3}{3n^4+5n^4}} \le \sqrt[n]{\frac{3n^5+n^3+3}{3n^4+5n^2}} \le \sqrt[n]{\frac{3n^5+n^5+3n^5}{3n^4}} = \underset{\substack{\downarrow\\1}}{\sqrt[n]{\frac{7}{3}}}\ \underset{\substack{\downarrow\\1}}{\sqrt[n]{n}} \to 1$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3n^5+n^3+3}{3n^4+5n^2}} = 1$$

6. feladat (25 pont)

Konvergensek-e az alábbi sorok?
Konvergencia esetén adjon becslést az $s \approx s_{100}$ közelítés hibájára!

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+3n}{3n^4+2n^3-n^2}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n}}{(2n+1)\,3^{2n}}$

c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{3}{2\cdot n\cdot 3^n + 2^n}$

a.) $\boxed{5}$ $a_n > \dfrac{n^3+0}{3n^4+2n^4-n^4} = \dfrac{1}{4n}$; $\dfrac{1}{4}\sum^{\infty}\dfrac{1}{n}$ div. (harm. sor)

$$\xRightarrow[\text{min. kr.}]{} \sum^{\infty} a_n \text{ div.}$$

b.) $\boxed{11}$ $b_n = \dfrac{8^n}{(2n+1)\,9^n} < \left(\dfrac{8}{9}\right)^n$

$\sum^{\infty}\left(\frac{8}{9}\right)^n$ konv. geom. sor $(0 < q = \frac{8}{9} < 1)$

$$\xRightarrow[\text{maj. kr.}]{} \sum^{\infty} b_n \text{ konv.} \qquad 5$$

$s \approx s_{100}$

$$0 < H = \sum_{n=101}^{\infty} \frac{8^n}{(2n+1)\,9^n} < \sum_{n=101}^{\infty}\left(\frac{8}{9}\right)^n = \frac{\left(\frac{8}{9}\right)^{101}}{1-\frac{8}{9}} \qquad 6$$

c.) A sor váltakozó előjelű és

$|c_n| = \frac{3}{2n3^n + 2^n} \searrow 0$ (monoton csökkenően tart

nullához), tehát Leibniz sor, így konvergens. 5

$s \approx s_{100}$: $|H| \le |c_{101}| = \frac{3}{2 \cdot 101 \cdot 3^{101} + 2^{101}}$ 4

Pótfeladatok (csak az elégséges eléréséhez javítjuk ki):

7. feladat (9 pont)

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{3}\right)^{2n-1} \cdot n^4} = ?$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^4 + n^2 - 3}{(2n^2+1)^2} = ?$

a.) $\boxed{5}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{9}\right)^n \cdot 3 \cdot n^4} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{9} \underbrace{\sqrt[n]{3}}_{\downarrow 1} \big(\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\downarrow 1}\big)^4 = \frac{1}{9}$

b.) $\boxed{4}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\frac{n^4}{n^4}}_{=1} \frac{3 + \frac{1}{n^2} - \frac{3}{n^4}}{(2 + \frac{1}{n^2})^2} = \frac{3+0-0}{(2+0)^2} = \frac{3}{4}$

an1z1p100401/5.

8. feladat (11 pont)

a) $a_n = \dfrac{2^n + 4^n}{8 + 7^{n+1}}$, $\quad b_n = \dfrac{2^n + 3^{2n}}{8 + 9^{n+1}}$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = ?$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = ?$

b) Konvergens-e a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ sor?

a) $a_n = \dfrac{2^n + 4^n}{8 + 7\cdot 7^n} = \underbrace{\dfrac{4^n}{7^n}}_{=\left(\frac{4}{7}\right)^n \to 0} \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1}{8\left(\frac{1}{7}\right)^n + 7} \to 0 \cdot \dfrac{0+1}{0+7} = 0$ (4)

$b_n = \dfrac{2^n + 9^n}{8 + 9\cdot 9^n} = \dfrac{\left(\frac{2}{9}\right)^n + 1}{8\left(\frac{1}{9}\right)^n + 9} \to \dfrac{0+1}{0+9} = \dfrac{1}{9}$ (4)

b) $b_n \to \frac{1}{9} \neq 0 \Rightarrow \sum\limits^{\infty} b_n$ divergens, mert nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele. (3)