

ANALÍZIS(1)
II. ZÁRTHELYI
(C csoport)

2000. november 9.

1. feladat (18 pont)

Konvergensek-e az alábbi sorok?

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 2^n}{n + 3^n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!}$

c) Az a)-beli sort a 19. részletösszegével közelítjük. Becsülje meg a hibát!

2. feladat (13 pont)

a) Mutassa meg, hogy a $\lim_{x \rightarrow \infty} x$ határérték nem létezik! A felhasznált tételt írja le!

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \{x\}}{2 + [X]} = ?$

3. feladat (18 pont)

$$f(x) = 3 + \frac{\sin \sqrt{x^3}}{\operatorname{tg} \sqrt{x}} - \frac{1}{(1-x)^3} \quad x \in (0, 1)$$

a) $\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = ?$ $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = ?$

(Ne használjon L'Hospital szabályt!)

b) Van-e megoldása az $f(x) = 0$ egyenletnek a $(0, 1)$ intervallumon?
Állítását bizonyítsa be! A felhasznált tételt írja le!

4. feladat (19 pont)

$$g(x) = x \sqrt[3]{(x-1)^4}$$

$$h(x) = 1 + \sin 2x^2$$

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{ha } x \geq 0 \\ h(x), & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

a) $f'(1) = ?$ (A definícióval dolgozzon!)

b) Írja fel $f'(x)$ értékét, ahol az létezik!

c) Írja fel az f függvény $x_0 = 2$ ponthoz tartozó érintőjének egyenletét!

5. feladat (20 pont)

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{4}{x-2}$$

- a) Hol és milyen típusú szakadása van f -nek ?
- b) $f'(x)=?$
- c) Adjon meg egy olyan intervallumot, amelyen f invertálható és írja fel az inverzfüggvényt!
 $D_{f^{-1}}=?$ $R_{f^{-1}}=?$
- d) Adjon meg egy olyan intervallumot, amelyen a

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \in \mathbf{Q} \\ 8+x, & \text{ha } x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$$

függvénynek van inverze!

6. feladat (15 pont)

$$f(x) = \frac{x+1}{(x-2)^2}$$

- a) Adja meg azokat a kegyővebb intervallumokat, amelyeken f szigorúan monoton!
- b) Határozza meg az f függvény lokális maximum illetve lokális minimum helyeit! Állításait indokolja meg! (Pl. írja le a felhasznált tételt!)

Pótfeladat (csak az elégségeshez):

7. feladat (10 pont)

- a) A jobb és bal oldali határértékek kiszámításával állapítsa meg az alábbi függvény szakadásainak jellegét!

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin |1-x|}{1-x^2}, & \text{ha } x > 1 \\ \frac{x^3 - x^2}{(x^2 - 2x + 1)x}, & \text{ha } x < 1 \end{cases}$$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x^2}{x^2} = ?$