A3 2. zh, 2012 ősz

1. Határozza meg a következő határértékeket! (a) $\lim_{n\to\infty} z_n$, ahol $z_n = 1 + i/2 + \ldots + i^n/2^n$; (b) $\lim_{z\to 0} \frac{\text{Im } z}{\text{Re } z}$!

2. Hol deriválható az $f(z) = (\text{Re } z)(\text{Im } z)$ komplex függvény, és ahol deriválható, ott mennyi a deriváltja?

3. Adja meg (ha létezik) az $u(x, y) = x^2 - y^2 - 2xy - 2x + 3y$ függvény egy harmonikus társát $\mathbb{C}$-n!

4. Számítsa ki az $f(z) = \frac{z^2}{z-3}$ függvény 100. deriváltját 0-ban!

5. Számítsa ki $\int \frac{e^{3z}}{z-\pi i}\, dz$-t az (a) $|z-1| = 3$ ill. (b) $|z-1| = 5$ pozitívan irányított körvonalon!

6. (a) Igazak-e az alábbi állítások? (f komplex függvény.) Válaszait indokolja!
(1) Ha z_n monoton, korlátos komplex sorozat, akkor konvergens.
(2) Ha f folytonos, akkor Re (f)Im (f) is az.
(3) Ha a Cauchy-Riemann egyenletek teljesülnek f-re a z_0 pontban, akkor f diff-ható z_0-ban.
(4) Ha f (komplex értelemben) deriválható a T tartományon, akkor Re f is deriválható T-n.
(b) Definiálja $\int_a^b f\, dx$-et ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ függvény és $a, b \in \mathbb{R}$!

1. Határozza meg a következő határértékeket! (a) $\lim_{n\to\infty} z_n$, ahol $z_n = 1 + i/2 + \ldots + i^n/2^n$; (b) $\lim_{z\to 0} \frac{\text{Im } z}{\text{Re } z}$!

MO. (a) Konvergens mértani sor: $\lim_{n\to\infty} z_n = \sum_0^\infty (i/2)^n = \frac{1}{1-i/2} = \frac{2}{5}(2+i)$ 5p

(b) Nem létezik, mert a valós tengely mentén a határérték 0, míg $\lim_{z\to 0} \frac{\text{Im }(x+ix)}{\text{Re }(x+ix)} = 1$. 5p

10p

2. Hol deriválható az $f(z) = (\text{Re } z)(\text{Im } z)$ komplex függvény, és ahol deriválható, ott mennyi a deriváltja?

MO. $f = u + iv$, ahol $u(x,y) = xy$ és $v(x,y) = 0$. 2p
$u_x = y$, $u_y = x$, $v_x = v_y = 0$, a Cauchy-Riemann egyenletek tehát csak az origóban teljesülnek, ezért az origón kívül nem deriválható. 4p
Az origóban deriválható, és $f'(0) = 0$, mert

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x+iy} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{1/y + i/x} = 0.$$

4p

10p

3. Adja meg (ha létezik) az $u(x,y) = x^2 - y^2 - 2xy - 2x + 3y$ függvény egy harmonikus társát $\mathbb{C}$-n!

MO.

$$u_x = 2x - 2y - 2 \qquad u_{xx} = 2$$
$$u_y = -2y - 2x + 3 \qquad u_{yy} = -2$$

tehát u harmonikus. 3p
Cauchy-Riemann miatt ha v harmonikus társa u-nak, akkor $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$, tehát

$$v = \int u_x \, dy = \int 2x - 2y - 2 \, dy = 2xy - y^2 - 2y + c(x)$$

$$\rightsquigarrow 2y + 2x - 3 = -u_y = v_x = 2y + c'(x) \rightsquigarrow c'(x) = 2x - 3 \rightsquigarrow c(x) = x^2 - 3x + c$$

vagyis $v(x,y) = 2xy - y^2 - 2y + x^2 - 3x$ jó lesz. 7p

10p

4. Számítsa ki az $f(z) = \frac{z^2}{z-3}$ függvény 100. deriváltját 0-ban!

MO. $\frac{z^2}{z-3} = -\frac{z^2}{3}\frac{1}{1-z/3} = -\frac{z^2}{3}\sum_0^\infty \left(\frac{z}{3}\right)^n = \sum_0^\infty -\frac{z^{n+2}}{3^{n+1}}$ 0 3-sugarú környezetében. 6p

Ugyanitt $f(z) = \sum_0^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$. 2p
Taylor-sor egyértelműsége miatt tehát $f^{(100)}(0) = \frac{-100!}{3^{99}}$. 2p

10p

5. Számítsa ki $\int \frac{e^{3z}}{z-\pi i}\, dz$-t az (a) $|z-1| = 3$ ill. (b) $|z-1| = 5$ pozitívan irányított körvonalon!

MO. (a) $\frac{e^{3z}}{z-\pi i}$ holomorf az 1 középpontú 3 sugarú körlapon (mert $\sqrt{3^2-1} < 3 < \pi$), tehát a Cauchy integrál-tétel miatt az integrál 0. 3p
(b) πi a körön belül van (mert $\sqrt{5^2-1} > 4 > \pi$), a Cauchy integrál-formula miatt tehát $\int \frac{e^{3z}}{z-\pi i}\, dz = 2\pi i e^{3\pi i} = -2\pi i$. 7p

10p

6. (a) Igazak-e az alábbi állítások? (f komplex függvény.) Válaszait indokolja!
(1) Ha z_n monoton, korlátos komplex sorozat, akkor konvergens.
(2) Ha f folytonos, akkor Re (f)Im (f) is az.
(3) Ha a Cauchy-Riemann egyenletek teljesülnek f-re a z_0 pontban, akkor f diffható z_0-ban.
(4) Ha f (komplex értelemben) deriválható a T tartományon, akkor Re f is deriválható T-n.
(b) Definiálja $\int_a^b f\, dx$-et ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ függvény és $a, b \in \mathbb{R}$!

MO. (1) Nem, az állításnak nincs értelme, mert $\mathbb{C}$ nem rendezett test.
(2) Igen, mert f pontosan akkor folytonos, ha Re (f) és Im (f) az, és utóbbiból következik, hogy Re (f)Im (f) is folytonos.
(3) Nem, pl. ha f 0 a tengelyeken és 1 máskor, akkor az origóban teljesülnek a Cauchy-Riemann egyenletek, de f ott még csak nem is folytonos.
(4) Nem, pl. ha f az exponenciális függvény, akkor Re f nem deriválható $\mathbb{C}$-n, mert valós értékű de nem konstans.
(b) $\int_a^b u(x) + iv(x)\, dx = \int_a^b u(x)\, dx + i \int_a^b v(x)\, dx$