Hibaszámítás II. – 3. fejezet
/Képletgyűjtemény/

1. Várható érték számítása (folytonos eloszlás esetén):
$$\mu = E\{x\} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) \cdot dx$$
2. Várható érték becslése N darab minta alapján:
$$\hat{\mu} = E\{x\} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i$$
3. Második momentum:
$$E\{x^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) \cdot dx$$
4. Szórásnégyzet (más néven variancia) kiszámítása Steiner-tétel alapján:
$$\sigma^2 = E\{x^2\} - E^2\{x\}$$
5. Szórás:
$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$
6. A szórás becslése minták alapján:
$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu)^2}$$
7. Tapasztalati szórás számítása minták alapján:
$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu)^2}$$
8. Független azonos eloszlású valószínűségi változók (ismert a várható érték és a szórás) összegzésével nyert valószínűségi változó, S várható értéke és szórása:
$$\mu_S = N \cdot \mu_1$$
$$\sigma_S^2 = N \cdot \sigma_1^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma_S = \sqrt{N} \cdot \sigma_1$$
9. Független azonos eloszlású valószínűségi változók (ismert a várható érték és a szórás) átlagolásával a várható érték és a szórás:
$$\overline{\mu} = \mu_1$$
$$\overline{\sigma}^2 = \frac{\sigma_1^2}{N} \quad \Rightarrow \quad \overline{\sigma} = \frac{\sigma_1}{\sqrt{N}}$$
10. GUM (Guide to the expression of uncertainly in measurement):
    1) $y = f(\underline{x})$
    2) $c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$
    3) A típusú bizonytalanság meghatározása
    4) B típusú bizonytalanság meghatározása
    5) Együttes bizonytalanság: $u(x_i) = \sqrt{u_A^2(x_i) + u_B^2(x_i)}$
    6) Eredő bizonytalanság: $u(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} c_i^2 \cdot u^2(x_i)}$
    7) Bizonytalanság kiterjesztése: $\Delta y = k \cdot u(y)$
    8) Mérési eredmény megadása

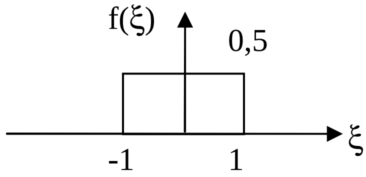
Példák
/3. gyakorlat, 4. gyakorlat, és 5. gyakorlat/

3.1. feladat – 3. gyakorlat

ξ egyenletes eloszlású valószínűségi változó a [-1; 1] intervallumban. Rajzoljuk fel sűrűségfüggvényét, számítsuk ki várható értékét és szórását!

Megoldás:

1) [-1;1] intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:



2) A várható érték számítása definíció szerint:

$$E\{\xi\} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) \cdot dx = \int_{-1}^{1} x \cdot \frac{1}{2} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^{1} x \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{0 = E\{\xi\}}}$$

3) A szórás kiszámítása:

- Szórásnégyzet meghatározása a második momentum és az első momentum segítségével:

$$\sigma^2 = E\{\xi^2\} - E^2\{\xi\} \xrightarrow[E\{\xi\}=0]{} \sigma^2 = E\{\xi^2\}$$

$$\sigma^2 = E\{\xi^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{x^3}{2}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3}$$

- Szórás:

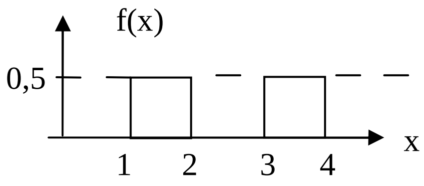
$$\underline{\underline{\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{1}{3}}}}$$

3.2. feladat – 3. gyakorlat

Egy mérendő mennyiségről azt tudjuk, hogy olyan valószínűségi változóval modellezhető, amelynek valószínűség-sűrűségfüggvénye az [1; 2] és a [3; 4] intervallumban konstans értékű, másutt zérus. Határozzuk meg a mérendő mennyiség várható értékét és szórását! Adjuk meg annak az intervallumnak a szélességét, amelybe a mérési eredmények 90%-os valószínűséggel beleesnek! Hol helyezkedik el ez az intervallum?

Megoldás:

1) A valószínűségi változós modell sűrűségfüggvénye:



2) Várható érték kiszámítása

$$E\{\xi\} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \left[\int_{1}^{2} x \cdot dx + \int_{3}^{4} x \cdot dx\right] = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_{1}^{2} + \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_{3}^{4} =$$

$$E\{\xi\} = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2} + \frac{16}{2} - \frac{9}{2}\right) = \frac{10}{4} = \underline{\underline{2.5 = E\{\xi\}}}$$

3) Szórás meghatározása (hasonlóan a 3.1 feladathoz):

$$E\{\xi^2\} = \frac{1}{2} \cdot \left[\int_1^2 x^2 dx + \int_3^4 x^2 dx\right] = \frac{8}{6} - \frac{1}{6} + \frac{64}{6} - \frac{27}{6} = \frac{44}{6}$$

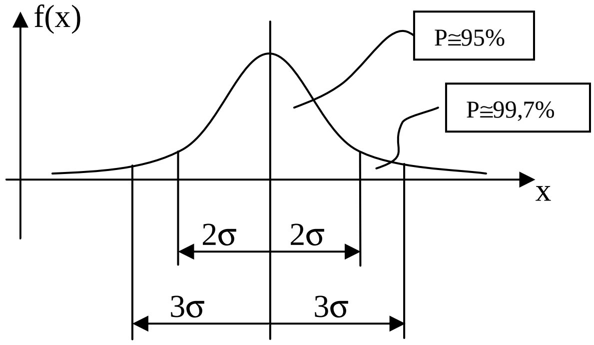
$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{E\{\xi^2\} - E^2\{\xi\}} = \sqrt{\frac{44}{6} - \frac{100}{16}} = \sqrt{\frac{44}{6} - \frac{25}{4}} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{26}{24}} = \sigma \cong 1.04}}$$

3.3. feladat – 3. gyakorlat

Egy normális eloszlású x mennyiségről azt tudjuk, hogy 1 és 2 közötti értéket vesz fel 99.7%-os konfidenciaszint mellett. Becsüljük meg x szórását!

Megoldás:

Normális eloszlás sűrűségfüggvénye és tulajdonságai:



A fenti becslések alapján jól látható, hogy normális eloszlás esetén P≅99.7%-os valószínűséggel a 6σ hosszú intervallumon belül vagyunk, így az [1,2] intervallum 6σ hosszú intervallumnak felel, amiből a szórás becslője:

$$2 - 1 = 6\sigma \Rightarrow \underline{\underline{\sigma = \frac{1}{6}}}$$

3.10. feladat – 3. gyakorlat: Standardizálás

Standard normális eloszlású mintákat szeretnénk generálni. Rendelkezésünkre áll egy program, amely a [0; 5] intervallumban egyenletes eloszlású mintákat generál. Normális eloszláshoz úgy jutunk, hogy ezzel a programmal 48 mintát generálunk és ezeket összeadjuk. Milyen transzformációt kell végezni az összegzés eredményeként kapott mintákon, hogy eloszlásuk standard normális eloszlású legyen?

Megoldás:

Az egyenletes eloszlású minta várható értéke:

$$\mu_1 = \frac{5-0}{2} = 2.5$$

Az egyenletes eloszlás szórása:

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{(5-0)^2}{12}} = \frac{5}{\sqrt{12}}$$

N=48 darab egyenletes leoszlású minta összegének várható értéke:

$$\hat{\mu} = N \cdot \mu_1 = 48 \cdot 2.5 = 120$$

N=48 darab egyenletes leoszlású minta összegének várható értéke:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{N} \cdot \sigma_1 = \sqrt{48} \cdot \frac{5}{\sqrt{12}} = 10$$

Tehát ahhoz, hogy standard normális eloszlást kapjunk az alábbi transzformációt kell elvégeznünk:

$$z_i = \frac{S_i - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} = \frac{S_i - 120}{10}$$

Ahol S_i a 48 darab egyenletes eloszlás összegéből nyert közelítőleg normális eloszlású valószínűségi változó.

3.9. feladat – 4. gyakorlat

Aprajafalva be akar lépni a Bergengóc Unióba. Ehhez szabványosítani kell fő exportcikküket, az áfonyakonzervet. Ügyi szerkesztett egy áfonyaszámláló berendezést, így a konzervbe mindig pontosan 120 darab áfonya kerül. Egy áfonya tömege 4.5 g és 5.5g között lehet egyenletes eloszlással. Adjuk meg az Aprajafalván gyártott konzerv nettó tömegére vonatkozó 98%-os konfidenciaintervallumot.

Megoldás:

Egy áfonya tömegének várható értéke:

$$m_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) \cdot dx = \frac{4.5g + 5.5g}{2} = 5g$$

Egy áfonyának tömegének a szórása:

$$\sigma_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) \cdot dx - m_1^2 = \sqrt{\frac{(5.5 - 4.5)^2}{12}} g = \frac{\sqrt{3}}{6} g \cong 0.289g$$

Egy áfonyakonzerv tömegének várható értéke:

$$\hat{m} = N \cdot m_1 = 120 \cdot 5g = 600g$$

Egy áfonyakonzerv tömegének szórása:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{N} \cdot \sigma_1 = \sqrt{\frac{120 \cdot 3}{36}} g = \sqrt{10} g \cong 3.16g$$

A 98%-os konfidenciaszint azt jelenti, hogy 1% a valószínűsége annak, hogy a konzerv tömege nagyobb értéket vesz fel, mint a kívánt érték, illetve 1% annak a valószínűsége, hogy a kívánt értéknél kisebb értéket vesz fel. Ezek alapján az alábbi összefüggést írhatjuk fel:

$$P\left(\hat{m} - \hat{\sigma} \cdot z_{0.01} < m < \hat{m} + \hat{\sigma} \cdot z_{0.01}\right) = 0.98$$

A standard normális eloszlás táblázata alapján:

$$z_{0,01} \cong 2.33$$

A fentiek alapján a konfidencia intervallum:

$$(\hat{m} - \hat{\sigma} \cdot z_{0,01}; \hat{m} + \hat{\sigma} \cdot z_{0,01}) = \left(600g - 3.16g \cdot 2.33; 600g + 3.16g \cdot 2.33\right) = (592.637; 607.363)$$

$$\underline{\underline{P\left(592.637 < m < 607.363\right) = 0.98}}$$

Tehát a konzerv tömege 592.637g és 607.363g között lesz 98%-os konfidenciaszinten

3.19. feladat – 5. gyakorlat

Egy ellenállás értékét akarjuk megmérni a rajta átfolyó áram és a rajta eső feszültség megmérésével. A mérés során két különböző műszert használunk. Mekkora a mért ellenállás értéke és standard bizonytalansága, ha a feszültségmérés eredménye 1V, szórása 0.01V, az áram mérés eredménye 1mA, szórása 10μA.

Megoldás:

A mért feszültség és áram standard bizonytalansága egyenlő a szórással.

Az ellenállás az alábbi módon fejezhető ki:

$$R = \frac{U}{I} = 1k\Omega$$

Ez alapján a feszültség és az áram érzékenysége:

$$c_I = \frac{\partial R}{\partial I} = -\frac{U}{I^2} \qquad c_U = \frac{\partial R}{\partial U} = \frac{1}{I}$$

Az ellenállás bizonytalansága:

$$u(R) = \sqrt{c_I^2 \cdot u^2(I) + c_U^2 \cdot u^2(U)} = 14.1\Omega = 0.0141k\Omega$$