A Számítástudomány alapjai

1. pótZH javítókulcs (2015. 12. 07.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Az ébredő erő bemutatóját 7 mikulás nézi meg a krampuszával. Úgy szeretnének leülni egy 14 székből álló sorba, hogy ne üljön minden mikulás a saját krampusza mellett. Hányféleképp tehetik ezt meg? (A 7 mikulás és a 7 krampusz is egymástól jól megkülönböztető.)

   A 14 meselényt 14!-féleképp lehet a széksorba leültetni, (2 pont)
   és ebből a számból kell levonni azon ültetések számát, ahol minden mikulás a krampusza mellett ül. (2 pont)
   Rossz típusú ültetést úgy kapunk, hogy 7! féleképp sorba állítjuk a 7 mikulás-krampusz párt, (2 pont)
   majd minden párhoz kiválasztjuk a 2-féle sorrend valamelyikét, egymástól függetlenül, azaz 2^7-féleképp. (1 pont)
   Mivel a párok minden sorrendhez ugyanennyi pár-rendezés tartozik, ezért a rossz ülésrendek száma $7! \cdot 2^7$, (2 pont)
   a végső válasz tehát $14! - 7! \cdot 2^7$. (1 pont)

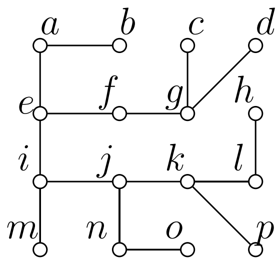
2. Igazoljuk, hogy ha v egy véges G gráf páratlan fokú csúcsa, akkor G-ben van olyan út, amely v-t a G egy másik páratlan fokú csúcsával köti össze.

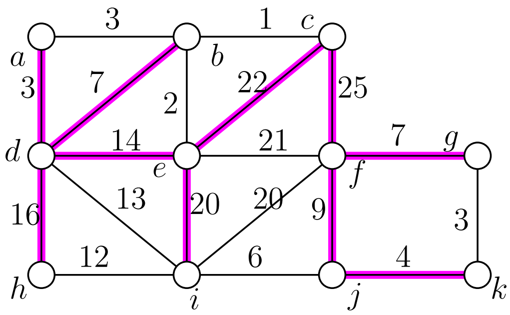
   Legyen K a G gráfnak az a komponense, amely v-t tartalmazza. Az órán tanultak szerint a K gráfban a fokszámok összege megegyezik K élei számának kétszeresével, ezért K-ban a páratlan fokú csúcsok száma páros. (3 pont)
   Mivel v a K egy páratlan fokú pontja, ezért K-nak kell lennie v-n kívül még legalább egy másik páratlan fokú pontjának; legyen mondjuk u egy ilyen pont. (4 pont)
   Miután a v és u pontokat tartalmazó K gráf összefüggő (hisz a G egy komponense), ezért van K-ban (és így G-ben is) v-ből u-ba vezető út. Nekünk pedig pontosan egy ilyen út létezését kellett igazolnunk. (3 pont)

3. Tegyük fel, hogy a K_{2015} teljes gráf minden egyes élét kiszíneztük 1008 lehetséges szín valamelyikére. Bizonyítsuk be, hogy található a gráfnak egy u és egy v pontja valamint egy c szín úgy, hogy ne vezessen u-ból v-be olyan út amelynek minden éle c színű.

   Elegendő azt igazolni, hogy van olyan c szín, amelyre a c színű élek nem alkotnak összefüggő gráfot a K_{2015} csúcsain. (3 pont)
   A K_{2015} éleinek száma $\binom{2015}{2} = \frac{2015 \cdot 2014}{2}$, (1 pont)
   tehát az 1008 felhasznált szín között van olyan c szín, amelyet legfeljebb $\frac{2015 \cdot 2014}{1008 \cdot 2} = \frac{2015 \cdot 2014}{2016} < 2014$-szer használtunk fel. (2 pont)
   Márpedig ha egy bizonyos színű élek összefüggő gráfot alkotnak, akkor annak a gráfnak van feszítőfája is, (2 pont)
   és ennek a feszítőfának a tanultak szerint éppen $2015 - 1 = 2014$ éle van. (1 pont)
   Mivel az általunk választott c színnel 2014-nél kevesebb élt színeztünk meg, ezért a c színű élek alkotta gráf nem összefüggő, legalább két komponense van, és különböző komponensből választott csúcsok között nem vezethet út csupa c színű élen. Ezzel igazoltuk a feladat állítását. (1 pont)

4. A bal oldali ábrán látható az egyszerű, irányítatlan G gráf i gyökérből indított szélességi bejárása után kapott F feszítőfa. Tudjuk, hogy az e csúcs G-beli fokszáma 7. Határozzuk meg a G gráf e-ből induló éleit.





Azt tanították az órán, hogy a szélességi fa egyúttal a gyökeréből minden más csúcsba a bejárt gráf egy legrövidebb útját tartalmazza. Ez azt jelenti, hogy ha egy v csúcs a gyökértől k távolságban van a szélességi fán, akkor v csak a gyökértől $k-1$, k ill. $k+1$ távolságban lévő csúcsokkal lehet összekötve. (Más szóval a szélességi bejárás után nincs előreél). (3 pont)

Konkrétan az e csúcs a fában (és így G-ben is) 1 távolságra van i-től, ezért a szomszédai i-től G-ben (így a fában is) csakis $0, 1$ vagy 2 távolságra lehetnek. (3 pont)

A szóbajövő szomszédok tehát i, j, m, a, f, k és n, (3 pont)

ami éppen 7 csúcs, tehát $d(e) = 7$ miatt pontosan ezek az e csúcs szomszédai. A keresett élek tehát ei, ej, em, ea, ef, ek és en. (1 pont)

5. A jobb oldali ábrán látható G gráf éleire írt számok az adott él szélességét jelentik. Ha van, találjuk meg G-nek egy olyan F feszítőfáját, amelyben az F-beli uv-út a G egy legszélesebb uv-útja a G tetszőleges u, v csúcsaira. Határozzuk meg f és h között a legszélesebb út szélességét.

   Az órán azt tanultuk, hogy minden élszélességekkel ellátott irányítatlan gráfhoz van legszélesebb utak fája, és ez a Kruskal algoritmussal megtalálható, amennyiben az élekről csökkenő szélesség szerint döntünk, azaz akkor vesszük be a soron következő élt a fába, ha nem alkot kört a korábban bevett élekkel. (3 pont)

   Ezt a módszert követve kaptuk az ábrán vastag lila élekkel megjelölt feszítőfát. (5 pont)

   Ebben a feszítőfában f és h között az $fcedh$ út vezet, melynek kérdezett szélessége ezen út minimális szélességű élének szélessége, azaz 14. Tehát a feladat második kérdésére 14 a válasz. (2 pont)

6. Van-e valamely $n \geq 2$ egész esetén olyan $2n$ pontú G gráf, hogy G-nek is és komplementerének, $\overline{G}$-nek is van Euler-sétája?

   Van ilyen gráf, például egy 4 pontú út. (5 pont)

   Ez egy út, tehát van Euler-sétája, és a komplementere is egy 4 pontú út, tehát annak is van. (5 pont)

   Annak a tételnek a felidézéséért, hogy ha egy véges, összefüggő gráfban legfeljebb két páratlan fokú csúcs van, akkor van a gráfnak Euler-sétája, 2 pont jár. Aki ebből még azt is levezeti, hogy $n \geq 3$ esetén ez nincs a feladatban leírt tulajdonságú gráf, kapjon még 2 pontot.