# Villamosmérnök A2 (2019 tavasz) 2. ZH

Minden feladat 10 pontos, tehát összesen 60 pontot lehet összegyűjteni. Minden feladat esetében szükséges a világos indoklás, nem elég a végeredmény és/vagy a válasz.

**1.** Van-e olyan, $\mathbb{R}^2$-en folytonos $f$ függvény, amelyre $f(x,y) = \frac{xy^4}{(x^2+y^2)^2}$ ha $(x,y) \neq (0,0)$?

**Megoldásvázlat.** Igen, a $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^4}{(x^2+y^2)^2} & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ mert $0 \leq \left|\frac{xy^4}{(x^2+y^2)^2}\right| \leq \left|\frac{xy^4}{y^4}\right| = |x| \to 0$ ha $x \to 0$ miatt $\lim_{(0,0)} \frac{xy^4}{(x^2+y^2)^2} = 0$. f folyt.

**2.** Deriválható-e az origoban az $f(0,0) = 0$, $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ (ha $(x,y) \neq (0,0)$) függvény?

**Megoldásvázlat.** $f$ origobeli parciális deriváltjai 0-k, mert $f(x,0) = 0 = f(0,y)$ (lényeg: konstans). Tehát $f$ pontosan akkor deriválható, ha

$$0 = \lim_{(0,0)} \frac{\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(0,0)} \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}},$$

és ez igaz, mert (polárkoordinátás helyettesítéssel) $\lim_{r\to 0} \frac{r^4 \cos^2\varphi \sin^2\varphi}{r^3} = \lim_{r\to 0} r\cos^2\varphi\sin^2\varphi = 0$.

**3.** Létezik-e $\frac{1}{3}(1, 2\sqrt{2})$ irányú iránymenti deriváltja az $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ (ha $(x,y) \neq (0,0)$) függvénynek a $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ pontban?

**Megoldásvázlat.**

$$f_x(x,y) = \frac{2xy^2(x^2+y^2) - 2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

és a szimmetria miatt $\frac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2}$; tehát $\nabla f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,1)$.

$f$ deriválható $P = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$-ben, mert ilyenek hányadosa és $P$ a nevezőnek nem 0-helye (vagy mert folytonosan deriválható $P$-ben, mert a parciális deriváltfüggvények folytonosak ott). Következésképp $f$ $P$-beli $\frac{1}{3}(1, 2\sqrt{2})$ irányú iránymenti deriváltja $\frac{1}{3}(1, 2\sqrt{2})\nabla f(P) = \frac{4+\sqrt{2}}{6}$.

**4.** Hol és milyen lokális szélsőértékhelyei vannak az $f(x,y) = x^3 - y^3 + 12xy$ függvénynek?

**Megoldásvázlat.** $f_x(x,y) = 3x^2 + 12y$, $f_y(x,y) = -3y^2 + 12x$, tehát a gradiens $(0,0)$-ban és $(-4,4)$-ben 0, vagyis ezek lehetnek lokális szélsőértékhelyek. A másodrendű parciális deriváltak: $f_{xx}(x,y) = 6x$, $f_{yy}(x,y) = -6y$, $f_{xy}(x,y) = 12 = f_{yx}(x,y)$ mindenütt folytonosak, és $D(0,0) = 0 - 12^2 < 0$, tehát $(0,0)$ nyeregpontja, $D(-4,4) = (-24)^2 - 12^2 > 0$ és $f_{xx}(-4,4) = -24 < 0$, tehát $(-4,4)$ lokális ~~maximum~~helye $f$-nek. 2× folyt. dif. minimum.

**5.** Számítsa ki az $f(x,y) = e^{-x^2}$ függvény integrálját az $\{(x,y) : x \in [0,2], y \in [0,2x]\}$ normáltartományon.

**Megoldásvázlat.** $\int_0^2\int_0^{2x} e^{-x^2}\,dy\,dx = \int_0^2 2xe^{-x^2}\,dx = -e^{-x^2}\Big|_0^2 = -e^{-4} + 1$.

**6.** (a) Mikor mondjuk, hogy $a$ belső pontja a $H$ halmaznak?

Igazak-e az alábbi állítások?

(b1) Ha egy pont torlódási pontja egy halmaznak, akkor eleme is.

(b2) Ha egy pont eleme egy halmaznak, akkor torlódási pontja is.

(b3) Minden monoton, korlátos $\mathbb{R}^2$-beli sorozat konvergens.

(b4) Ha $f$ folytonos a $H \subseteq \mathbb{R}^2$ korlátos halmazon, akkor $f$ integrálható $H$-n.

**Megoldásvázlat.** (a) Ha $a$-nak van olyan környezete, ami része $H$-nak.
(b1) Nem, pl. $\mathbb{R}$-ben 0 a $(0,1)$ halmaznak.
(b2) Nem, pl. $\mathbb{R}$-ben 0 a $\{0\}$ halmaznak.
(b3) Ennek nincs is értelme, mert $\mathbb{R}^2$-en nincs rendezés.
(b4) Nem, pl. a konstans 1 függvény nem integrálható $([0,1] \cap \mathbb{Q})^2$-en.

**IMSc-feladat.** Van-e olyan távolság $\mathbb{R}^2$-en ami szerint valamely $X \subseteq \mathbb{R}^2$-nek nem minden belső pontja torlódási pontja?

**Megoldásvázlat.** A $d(x,x) = 0$ és $x \neq y$-ra $d(x,y) = 1$ távolság ilyen, mert $\mathbb{R}^2$ nyílt (hiszen minden pont minden környezete része) és így minden pontja belső pontja, de nincs torlódási pontja, mert minden 1/2 sugarú lukas környezet üres.