2. Vizsgazárthelyi megoldásokkal

1997/98 tél I. évf. 13.-18.tk.

1. Bizonyítsa be a Pythagorász tételt vektoralgebrai eszközökkel!
MO. Ha a két befogó a és b az átfogó pedig c, akkor $(a,b)=0$ és $a+b=c$, tehát $|c|^2=c^2=(c,c)=(a+b,a+b)=a^2+2(a,b)+b^2=a^2+b^2=|a|^2+|b|^2$.

2. $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\dfrac{2n^4 2^n-4n^2 4^n}{n^4 2^n+3n^2 4^n}=?$
MO. $\dfrac{2n^4 2^n-4n^2 4^n}{n^4 2^n+3n^2 4^n}=\dfrac{2n^2 2^{-n}-4}{n^2 2^{-n}+3}\longrightarrow-\dfrac{4}{3}$, mert $n^2 2^{-n}\longrightarrow 0$.

3. Legyen (a_n) tetszőleges sorozat. Az alábbi állítások közül melyik igaz, melyik nem? Válaszát indokolja! a) Ha (a_n) monoton és korlátos, akkor minden részsorozata konvergens. b) Ha (a_n) minden részsorozata konvergens, akkor (a_n) monoton és korlátos. c) Ha (a_n) monoton és van korlátos részsorozata, akkor konvergens. d) Ha (a_n) korlátos és van monoton részsorozata, akkor konvergens.
MO. a) Igen, a_n monoton és korlátos $\rightsquigarrow$ a_n konvergens $\rightsquigarrow$ a_n minden rászsorozata konvergens. b) Nem: van nem monoton de konvergens sorozat is, pl. $a_n=(-1)^n\dfrac{1}{n}$ c) Igen: Ha a_n monoton és van korlátos részsorozata, akkor a_n korlátos (hisz ellenkező esetben van a_n–nak (pl. a_n növekedő esetén) ∞–hez konvergáló $a_{f(n)}$ részsorozata, azaz tetszőleges P esetén van N, hogy minden $n>N$–re $a_{f(n)}>P$, amiből a monotonitás miatt minden $n>f(N+1)$–re $a_n>a_{f(N+1)}>P$, vagyis $a_n\longrightarrow\infty$ adódik. d) Nem: két monoton különböző határértékhaz tartó sorozat összefésülése, pl. $a_n=(-1)^n$, ellenpéldát szolgáltat.

4. Invertálható-e az $f(x)=e^{\sin x}$ függvény a $I=[\pi/4,\pi/2]$ intervallumon? Ha igen, egyenletesen folytonos-e az inverze $f*I$–n?
MO. Igen, invertálható, mert kölcsönösen egyértelmű függvények összetett függvénye is triviálisan kölcsönösen egyértelmű és folytonos inverze is folytonos, így zárt intervallumon egyenletesen folytonos.

5. Adja meg azt a legkisebb pozitív egész n–et (ha van ilyen), melyre a következő f függvény deriválható az origóban: $f(x)=0$ ha $x\le 0$ és $f(x)=x^n$ ha $x>0$.
MO. $n=2$, mert ha $n>1$, akkor f jobb– és baloldali deriváltja megegyezik az origóban, hisz $f'_+(0)=nx^{n-1}\big|_{x=0}=0=f'_-(0)$, tehát ekkor f deriválható itt, de ha $n=1$, akkor ez nem igaz, mert $f'_+(0)=1\neq 0=f'_-(0)$.

6. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0+}xe^{\frac{1}{x}}=?$

MO. L'Hospitallal: $xe^{\frac{1}{x}}=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}\sim\dfrac{-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}=e^{\frac{1}{x}}}\longrightarrow\infty$ ha $x\longrightarrow 0+$ **vagy:** $y=\dfrac{1}{x}$ helyettesítéssel: $\lim\limits_{x\longrightarrow 0+}xe^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{y\longrightarrow\infty}\dfrac{e^y}{y}=\infty$ mert L'Hospitallal $\dfrac{e^y}{y}\sim\dfrac{e^y}{1}\longrightarrow\infty$ ha $y\longrightarrow\infty$.

7. $\displaystyle\int\frac{x}{1+x^2}=?$
MO. $\displaystyle\int\frac{x}{1+x^2}=\frac{1}{2}\int 2x\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\left(=\ln\sqrt{(1+x^2)}\right)$

8. Legyen $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$ ha $x\neq 0$ és $f(0)=0$. Hol értelmezett és hol deriválható a $g(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ függvény? Ha létezik, számítsa ki a a $g'(\frac{2}{\pi})$ értékét!
MO. g mindenütt létezik és deriválható, mert f mindenütt folytonos és ezért $g'(x)=f(x)$ minden x–re, tehát $g'(\frac{2}{\pi})=f(\frac{2}{\pi})=\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}=\frac{2}{\pi}$.