

1. példa. Egy igen nagy kiterjedésű, földelt fémsík felett egy $a = 5$ cm sugarú fémgömb helyezkedik el a levegőben. A gömb középpontja a síktól $h = 1$ m távolságban van. A gömb töltése $Q = 6$ nC.

a) Határozza meg a gömb és a fémsík közötti kapacitást. (3 pont)

A kis sugarú közelítés alkalmazható. A ponttöltések potenciálfüggvényéből a gömb potenciálja:

$$\Phi_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{2h} \right) = 1052 \text{ V} \quad (2 \text{ p})$$

(ha $1/a - 1/(2h)$ helyett csak $1/a$ -val számol, akkor a $h \gg a$ indoklás esetén 1 pont adható)

$$C_{10} = \frac{Q}{\Phi_1 - 0} = 5,70 \text{ pF} \quad (1 \text{ p})$$

(A kapacitás közvetlenül, Φ_1 ismerete nélkül is számolható.)

b) Adja meg a felületi töltéssűrűséget a fémsík gömbhöz legközelebbi pontjában. (2 pont)

$$\sigma = D_n = -2 \frac{Q}{4\pi h^2} = -955 \frac{\text{pC}}{\text{m}^2} \quad (2 \text{ p})$$

c) Tekintsen egy l görbét, amely a gömb felszínén indul és egy olyan pontban végződik, amely a gömb középpontjától és a fémsíktól egyaránt h távolságban van. Számítsa ki $\int_l \mathbf{E} dl$ értékét. (3 pont)

Az integrál feszültséget jelent, amely potenciálkülönbségként számítható:

$$\Phi_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{\sqrt{5}h} \right) = 29,8 \text{ V} \quad (2 \text{ p})$$

$$U = \Phi_1 - \Phi_2 = 1022 \text{ V} \quad (\Phi_1 \text{ az a) pontból}) \quad (1 \text{ p})$$

d) Mekkora elektrosztatikus erő hat a gömbre? (2 pont)

$$F = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0(2h)^2} = 81 \text{ nN} \quad (2 \text{ p})$$

2. példa. Az ábrán látható rétegzett gömbkondenzátor méretei: $R_1 = 1$ mm, $R_2 = 3$ mm, $R_3 = 5$ mm. A belső és külső szigetelőrétegek dielektromos állandója $\epsilon_{r1} = 3,3$ illetve $\epsilon_{r2} = 2,25$. A kondenzátorra feszültséget kapcsolva, a belső elektróda töltése $Q = 330$ pC, míg a külsőé $-Q$.

a) Adja meg a potenciál értékét a középponttól R_1 illetve R_2 távolságban, amennyiben $\phi(R_3) = 0$. (4 pont)

A potenciálértékek a határatmeneteken:

$$\Phi_1 = \Phi(R_1) = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_1} \frac{1}{r^2} dr + \int_{R_2}^{R_3} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_2} \frac{1}{r^2} dr,$$

$$\Phi_2 = \Phi(R_2) = \int_{R_2}^{R_3} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_2} \frac{1}{r^2} dr,$$

$$\Phi_3 = \Phi(R_3) = 0 \text{ V}. \quad (2 \text{ p})$$

Az integrálás elvégzése után:

$$\Phi_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\epsilon_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{1}{\epsilon_2} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right) \right] = 775 \text{ kV},$$

$$\Phi_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_2} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right) = 176 \text{ V}. \quad (2 \text{ p})$$

b) Vázolja fel a potenciál menetét a sugár függvényében az $R_1 < r < R_3$ tartományban. (2 pont)

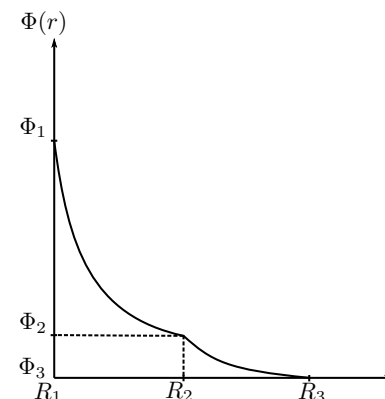
A potenciál helyfüggésének számítása az előző feladat alapján:

$$\Phi(r) = \begin{cases} \int_r^{R_2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_1} \frac{1}{r^2} dr + \int_{R_2}^{R_3} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_2} \frac{1}{r^2} dr & R_1 < r < R_2, \\ \int_r^{R_3} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_2} \frac{1}{r^2} dr & R_2 < r < R_3. \end{cases}$$

Az integrálás elvégzése után:

$$\Phi(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\epsilon_1} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{1}{\epsilon_2} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right) \right] & R_1 < r < R_2, \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_3} \right) & R_2 < r < R_3. \end{cases} \quad (1 \text{ p})$$

Kvalitatíve helyes ábra. (1 p)



- c) Határozza meg a kondenzátor kapacitását! (1 pont)

$$C = \frac{Q}{\Phi_1} = 0,43 \text{ pF} \quad (1 \text{ p})$$

- d) Hol lép fel a maximális térerősség a szigetelő közegben, és mekkora az értéke? (3 pont)

Az R_1 sugarú fegyverzetten fog fellépni a maximális térerősség, melynek értéke: (1 p)

$$E_{\max} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_1 R_1^2} = 0,9 \frac{\text{MV}}{\text{m}}. \quad (2 \text{ p})$$

Kis példák. (Minden helyes válasz 2 pontot ér. A végeredményt írja fel a feladatlapra, a részletszámításokat – ahol szükséges – külön lapon mellékelje.)

A helyes és teljes alapegyenletekre 1 pont, a numerikusan jó eredményre további 1 pont adható.

1. Légtöltésű síkkondenzátor fegyverzeteinek felszíne $0,5 \text{ m}^2$. A lemezek között az elektromos térerősség lineárisan nő 5 kV/m -ről 15 kV/m értékre, $2,5 \text{ s}$ idő alatt. Mekkora áram folyik eközben a fegyverzetek hozzávezetésein?

$$I = \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} A = 17,7 \text{ nA}$$

2. Elektrosztatikus térben, homogén térfogati töltéssűrűséggel ellátott, $\epsilon = 2,25$ permittivitású szigetelő közegben a skalárpotenciál kifejezése V és m egységekben kifejezve $\phi(x) = -6x^2$. Határozza meg a térfogati töltéssűrűséget!

$$\rho = -\epsilon \Delta \Phi = 239 \frac{\text{pC}}{\text{m}^3}$$

3. Két csatolt tekercs öninduktivitása $L_1 = L_2 = 50 \text{ mH}$, kölcsönös induktivitásuk $M = 12 \text{ mH}$. Kezdetben mindkét tekercs árama $I_1 = I_2 = 2 \text{ A}$. Mennyivel nő a tekercsrendszerben tárolt mágneses energia, ha az egyik tekercs áramát 3 A -re növeljük?

$$\Delta W = \Delta \left\{ \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2 \right\} = 149 \text{ mJ}$$

4. Egy villámáram-levezető és egy vezető hurok közötti kölcsönös induktivitás $L_{12} = 25 \text{ nH}$. A villámáram lineáris felfutású, $1 \mu\text{s}$ alatt 0 -ról 10^5 A értékre emelkedik. Mekkora feszültség indukálódik eközben a hurokban?

$$|U_i| = L_{12} \frac{di}{dt} = 2,5 \text{ kV}$$

5. Egy $l = 1 \text{ m}$ hosszú koaxiális kábel ere sugarának és köpenye belső sugarának a különbsége $d = 1 \text{ cm}$. Alkalmazható-e elektrosztatikus modell a hosszegységre eső kapacitás számítására, ha a kábelt $2,4 \text{ GHz}$ -en szeretnénk használni? Válaszát indokolja!

Igen, mert $d \ll \lambda$, ahol $\lambda = c/f$