

1) Feladat (12 pont).

$u = \frac{y}{x}$ helyettesítéssel oldja meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$x^2 y' + xy = x^2 + y^2 \quad (x > 0)$$

2) Feladat (12 pont).

$$f_n(x) = \frac{n^2 x + \cos(n^5 x)}{n^2}$$

- Állapítsa meg a függvénysorozat határfüggvényét és a konvergencia tartományát!
- $\|f_n - f\| = ?$
- Egyenletes-e a konvergencia a konvergencia tartományon?
- Milyen x -re konvergens a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ függvénysor?

3) Feladat (20 pont).

a) A tanult módon bizonyítsa be, hogy

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Mi a sor konvergencia tartománya?

b) Írja fel az

$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{x^4}{4}\right)$$

függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor sorát és adja meg annak konvergencia sugarát!

c) A b)-beli sorfejtést felhasználva adja meg az

$$\int_0^1 \ln\left(1 + \frac{x^4}{4}\right) dx$$

integrál közelítő értékét 10^{-3} pontossággal!

4) Feladat (4+2+4+9=19 pont).

$$f(x, y) = (2x - y)^2 + 4x^2 - 8y$$

- $f'_x(x, y) = ?$; $f'_y(x, y) = ?$
- Hol deriválható (totálisan) a függvény? (Indokoljon!)
- Írja fel a függvény $P_0(1, 2)$ pontjabeli érintő síkjának egyenletét!
- * Hol lehet f -nek lokális szélsőértéke?
Van-e lokális szélsőértéke? Ha igen, milyen jellegű?

5) Feladat (10 pont)*

$$\int_T \int \frac{1}{(x^2 + y^2 + 4)^7} dT = ?, \quad T : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9; \quad x \leq 0$$

6) Feladat (9 pont)

a) Adja meg $f'(z_0)$ ($f : C \rightarrow C$) definícióját!

Írja fel a Cauchy-Riemann egyenleteket és írja fel a velük kapcsolatban tanult tételt!

b) Definiálja a harmadrendű pólus fogalmát! Mutasson rá példát!

7) Feladat (18 pont)*

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)^4(z+4)}$$

a) Írja fel az f függvény $z_0 = -1$ bázispontú azon Laurent sorfejtését, mely a bázispont közvetlen környezetében konvergens! Adja meg a sor konvergencia gyűrűjét!

b) $\text{res}_{z=-1} f(z) = ?$; $\text{res}_{z=-4} f(z) = ?$

c) $\oint_{|z+2|=4} f(z) dz = ?$

Pótfeladat (csak az elégségesért javítjuk ki):

8) Feladat (10 pont)

Adja meg az alábbi sor konvergencia tartományát!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n+2}}{3^{2n} \sqrt{n}} (x+1)^n$$

Adjon meg egy olyan intervallumot, melyben a sor egyenletesen konvergens!

(pdf by Syntern)