Villamosmérnök A2 (2017 ősz) 2. szigorlat

Minden feladat 12 pontos, tehát összesen 60 pontot lehet összegyűjteni. Minden feladat esetében szükséges a világos indoklás, nem elég a végeredmény és/vagy a válasz.

1. $\int_H \sqrt{xy - y^2}\ dx\ dy = ?$ ha H az a háromszög, melynek csúcsai a $(0,0)$, $(10,1)$ és $(1,1)$ pontok.

Megoldásvázlat.

$$\int_H \sqrt{xy-y^2}\ dx\ dy = \int_0^1 \int_y^{10y} \sqrt{xy-y^2}\ dx\ dy$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{2}{3y}(xy-y^2)^{3/2}\right]_y^{10y} dy = \int_0^1 18y^2\ dy = 6$$

2. Konvergensek, ill. abszolút konvergensek-e a következő sorok? (a) $\sum_{n=0}^\infty \left(\frac{1-n}{2+3n}\right)^n$ (b) $\sum_{n=1}^\infty \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

Megoldásvázlat. (a) Gyökkritériummal: $\sqrt[n]{\left|\left(\frac{1-n}{2+3n}\right)^n\right|} = \frac{|1-n|}{2+3n} \to \frac{1}{3}$, tehát abszolút konvergens.
(b) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e > 2$ miatt $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^n > 2^n \to \infty$, tehát divergens, mert a tagok sorozata nem tart 0-hoz.

3. Számítsa ki $\int_{-1}^0 e^{x^3}\ dx$ értékét 1/10 pontossággal!

Megoldásvázlat. $e^x = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!}$ mindenütt konvergens hatványsor, tehát $e^{x^3} = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^{3n}}{n!}$ is az, ezért minden zárt intervallumon egyenletesen konvergens, és így tagonként integrálható. Tehát

$$\int_{-1}^0 e^{x^3}\ dx = \sum_{n=0}^\infty \int_{-1}^0 \frac{x^{3n}}{n!}\ dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^{3n+1}}{n!(3n+1)}\Big|_{-1}^0 = \sum_{n=0}^\infty -\frac{(-1)^{3n+1}}{n!(3n+1)} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!(3n+1)},$$

ami Leibniz-sor, így a hiba kisebb, mint az első elhagyott tag abszolútértéke. Pl. $n=2$-re $\left|\frac{(-1)^n}{n!(3n+1)}\right| = \frac{1}{14} < \frac{1}{10}$, és így $\int_{-1}^0 e^{x^3}\ dx \approx \sum_{n=0}^1 \frac{(-1)^n}{n!(3n+1)} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

4. Mely a és b valós számokra lesz a $x-y-z=1$, $x+2y+z=-2$, $3x+az=b$ egyenletrendszernek 0, 1, ill. végtelen sok megoldása? Utóbbi esetben adja meg az összes megoldást!

Megoldásvázlat. Az egyenletrendszer kibővített mátrixa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & a & b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & a+3 & b-3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & a+1 & b \end{array}\right)$$

Tehát nincs megoldás, ha $a=-1$, $b \neq 0$ (a kibővített mátrix rangja (3) nagyobb, mint az egyenletrendszer mátrixának rangja (2)); egy megoldás van, ha mindkét mátrix rangja 3, azaz ha $a \neq -1$; és végtelen sok megoldás van, ha a közös rang (2) kisebb, mint 3, azaz ha $a=-1$ és $b=0$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

amiből egy partikuláris megoldás $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, a homogén általános megoldása $c\begin{pmatrix} -1 \\ 2/3 \\ -1 \end{pmatrix}$, vagyis $c\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, és így az inhomogén általános megoldása $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ -1-2c \\ 3c \end{pmatrix}$, azaz $x=c$, $y=-1-2c$, $z=3c$, ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

5. (a) Ha az f kétváltozós, deriválható valós függvény gradiense a nullvektor az a pontban, akkor f-nek lokális szélsőértéke van a-ban.
(b) Mit mond ki az integrálkritérium?
(c) Mekkora a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor konvergencia-sugara?
(d) Igaz-e, hogy $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{x^2}^{2} x \sin(y \cos(y \sin(y \cos y)))\, dy\, dx = 0$?
(e) Írja fel a legfeljebb másodfokú polinomok terének 1, x, x^2 bázisában a deriválás mátrixát!
(f) Legyen V a valós sorozatok, W pedig a konvergens valós sorozatok vektortere. Igaz-e, hogy W altere V-nek?

Megoldásvázlat. (a) Nem, pl. $f(x,y) = xy$ az origóban.
(b) Ha $0 \le f$ és f monoton csökken $[0,\infty)$-n, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$ pontosan akkor konvergens, ha $\int_0^{\infty} f$ konvergens.
(c) $\frac{1}{\alpha}$, ahol $\alpha = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, beleértve, hogy a sugár 0 ha α végtelen, és végtelen, ha $\alpha = 0$.
(d)Igen, mert az integrandus „páratlan x-ben” ($f(-x,y) = -f(x,y)$), és a tartomány, amin integrálunk, szimmetrikus az y tengelyre.
(e)$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
(f)Igen, mert konvergens sorozatok összege és konstansszorosa is konvergens.