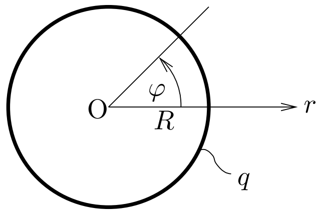
I. példa.

Az ábra szerint a hengerkoordináta-rendszer $z = 0$ síkjában körgyűrű alakú vonaltöltés van, amelynek középpontja az origó, sugara $R = 25\,\mathrm{cm}$, és töltéssűrűsége állandó $q = 8\,\mathrm{nC/m}$ értékű. A közeg levegő. A ϕ skalárpotenciált a végtelenben 0-nak választjuk.



a) Határozza meg a potenciált és a térerősség nagyságát az origóban! (*3 pont*)

$\phi = \int_0^{2\pi} \frac{qR\mathrm{d}\varphi}{4\pi\varepsilon_0 R} = 2\pi\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{q}{2\varepsilon_0} = 452\,\mathrm{V}$ (2 p) Szimmetria miatt $E = 0$ (1 p)

b) Adja meg a térerősség *vektorát* az elrendezés tengelyében, az $r = 0$, $\varphi = 0$, $z = 0{,}4\,\mathrm{m}$ koordinátájú pontban! (*4 pont*)

Szimmetria miatt csak z irányú komponens van, (1 p)
$l = \sqrt{R^2 + z^2}$ és $\cos\alpha = z/l$ jelöléssel
$E_z(z) = \int_0^{2\pi} \frac{qR\mathrm{d}\varphi}{4\pi\varepsilon_0 l^2}\cos\alpha = \frac{qR\cos\alpha}{2\varepsilon_0 l^2} = \frac{qR}{2\varepsilon_0}\frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}} = 431\,\mathrm{V/m}$ (3 p)
(bővebben l. Bilicz példatár 2.6. példa)

c) Becsülje meg a potenciált és a térerősség *nagyságát* az $r = 10\,\mathrm{m}$, $\varphi = \pi/6$, $z = 8\,\mathrm{m}$ koordinátájú pontban! (*3 pont*)

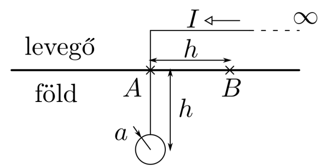
$Q = 2R\pi q = 12{,}57\,\mathrm{nC}$ pontszerű töltéssel közelítve: (1 p)
$\phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+z^2}} = 8{,}8\,\mathrm{V}$ (1 p) $E = \left|\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(r^2+z^2)}\right| = 0{,}69\,\mathrm{V/m}$ (1 p)

d) (*nem kötelező* **IMSc** *feladat*) A z tengely mely pontjában maximális az elektromos térerősség, és mekkora ott az értéke? (*5 IMSc pont*)

A b) feladatrész megoldásából kiindulva,
$E_z'(z) = 0$, ha $z = \pm\frac{R}{\sqrt{2}} = \pm 17{,}7\,\mathrm{cm}$ (3 p) $\rightarrow$ $E_{\max} = \left|\frac{q}{3\sqrt{3}\varepsilon_0 R}\right| = 696\,\mathrm{V/m}$ (2 p)

II. példa.

Egy $a = 10\,\mathrm{cm}$ sugarú gömb alakú elektróda középpontja $h = 2\,\mathrm{m}$ mélyen a földfelszín alatt helyezkedik el. A levegő-föld határfelület síknak tekinthető; a föld fajlagos vezetőképessége $\sigma = 50\,\mathrm{mS/m}$. Az elektródába $I = 150\,\mathrm{A}$ egyenáramot vezetünk a végtelenből; a végtelen távoli pont potenciálja $\phi(\infty) = 0$.



a) Határozza meg a potenciált az A pontban, azaz a határsíknak a gömbhöz legközelebb eső pontjában! (*3 pont*)

Tükrözés helyes alkalmazása (1 p) $\rightarrow$ $\phi_A = \frac{2I}{4\pi\sigma h} = 239\,\mathrm{V}$ (2 p)

b) Határozza meg az elektróda potenciálját! (*2 pont*)

$\phi_{\text{gömb}} = \frac{I}{4\pi\sigma}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{2h}\right) = 2447\,\mathrm{V}$ (2 p)

c) Határozza meg a földelési ellenállást! (*2 pont*)

$R = \frac{\phi_{\text{gömb}}}{I} = 16{,}3\,\Omega$ (2 p)

d) Mekkora a feszültség az A és B pontok között? (*3 pont*)

$U_{AB} = \frac{2I}{4\pi\sigma}\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{\sqrt{2}h}\right) = 69{,}9\,\mathrm{V}$ (3 p)

e) (*nem kötelező* **IMSc** *feladat*) Az A ponttól mekkora távolságra van a föld felszínén az a hely, ahol az ún. lépésfeszültség maximális? Mekkora ennek értéke, ha egy lépés hossza $l = 70\,\mathrm{cm}$? (*5 IMSc pont*)

A Bilicz példatár 3.6 példája alapján a keresett távolság $h/\sqrt{2} = 141\,\mathrm{cm}$,
ahol a lépésfeszültség $U_l = \frac{lI}{3\sqrt{3}\pi\sigma h^2} = 32{,}2\,\mathrm{V}$ (5 p)

Kispéldák

1. Egy síkkondenzátor korong alakú lemezeinek sugara R, távolságuk d, a szigetelőanyag dielektromos állandója ε_r. A lemezek között homogén E térerősség van. Fejezze ki ezekkel a kondenzátor energiáját! (*2 pont*)

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2 \cdot dr^2\pi \quad \text{2 p}$$

2. Húzza alá azt az összefüggést, amely *nem* teljesül stacionárius áramlási térben, ha a közeg inhomogén vezetőképességű! (*2 pont*)

$$\operatorname{div}\mathbf{J} = 0 \quad \Big| \quad \oint_l \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = 0 \quad \Big| \quad \underline{\operatorname{div}\mathbf{E} = 0} \quad \Big| \quad \oint_A \mathbf{J}\cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = 0 \qquad \text{2 p}$$

3. Egy R sugarú gömbön belül a töltéssűrűség kezdetben konstans ρ_0 értékű. A töltéssűrűség Δt idő alatt egyenletesen zérusra csökken. Határozza meg eközben a gömb felszínén a normális irányú térfogati áramsűrűség nagyságát, feltéve hogy ez a felszín minden pontjában azonos! (*2 pont*)

$$J = \frac{\rho_0 R}{3\Delta t} \quad \text{2 p}$$

4. Elektrosztatikus térben a skalárpotenciál kifejezése egy koherens egységrendszerben $\phi(x,y,z) = \phi(z) = 2\sin(\pi z)$. Fejezze ki az elektromos térerősség vektorát mint a hely függvényét. (*2 pont*)

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\phi \quad \text{1 p}$$
$$\mathbf{E}(x,y,z) = -\hat{\mathbf{e}}_z\frac{\partial\phi}{\partial z} = -\hat{\mathbf{e}}_z 2\pi\cos(\pi z) \quad \text{1 p}$$

5. Dielektrikum adott pontjában az elektromos térerősség $\mathbf{E}$, az eltolásvektor $\mathbf{D}$. Fejezze ki a dielektromos polarizáció vektorát! (*2 pont*)

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \varepsilon_0\mathbf{E} \quad \text{2 p}$$