ANALÍZIS(1) | **I. ZÁRTHELYI** | **2002. október 3.**

Műszaki Informatika szak | B kurzus | Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

MÉG DOLGOZOM MAJD RAJTA, DE A LÉNYEG MÁR LÁTHATÓ!

1. feladat (15 pont)

a) Adja meg az alábbi definíciókat!

a1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ a2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$

b) A megfelelő definícióval bizonyítsa be, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+5n-1}{n^2+3n+8} = 3 \qquad (\,N(\varepsilon) = ?\,)$$

Megoldás:

a) a1) $$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty\,,$$
ha $\forall\, M < 0$-hoz $(M \in \mathbb{R})$ $\exists\, N(M) \in \mathbb{N}$, hogy

$$a_n < M, \quad \text{ha } n > N(M)$$

a2) Azt mondjuk, hogy (a_n) konvergens és határértéke (limesze) $A \in \mathbb{R}$, ha $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $(\varepsilon \in \mathbb{R})$ $\exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy

$$|a_n - A| < \varepsilon, \quad \text{ha } n > N(\varepsilon).$$

b)

$$|a_n - A| = \left|\frac{3n^2+5n-1}{n^2+3n+8} - 3\right| = \left|\frac{-4n-25}{n^2+3n+8}\right| = \frac{4n+25}{n^2+3n+8} < \frac{4n+25n}{n^2} = \frac{29}{n} < \varepsilon$$

$$\longrightarrow \quad n > \frac{29}{\varepsilon}\,, \qquad \text{tehát} \qquad N(\varepsilon) \ge \left[\frac{29}{\varepsilon}\right]$$

2. feladat (14 pont)

$$a_n = \frac{(-4)^n + 4^n}{2^{2n+1} + 7} \qquad b_n = \frac{3^n + n!}{3^n + 4\cdot n!}$$

a) $\overline{\lim}\, a_n = ?\,, \qquad \underline{\lim}\, a_n = ?\,, \qquad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = ?$

b) $\overline{\lim}\, b_n = ?\,, \qquad \underline{\lim}\, b_n = ?\,, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = ?$

Megoldás:

a) Ha n páratlan: $a_n = 0 \to 0$

Ha n páros: $a_n = \dfrac{2\cdot 4^n}{2\cdot 4^n + 7} = \dfrac{2}{2 + 7\cdot \dfrac{1}{4^n}} \to 1$

Így a sorozat torlódási pontjai: $\quad 0\,,\ 1$

$$\Longrightarrow \quad \overline{\lim}\, a_n = 1\,, \qquad \underline{\lim}\, a_n = 0\,, \qquad \lim_{n\to\infty} a_n \nexists$$

Felhasználtuk, hogy $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$, ha $|a| < 1$.

b) $b_n = \dfrac{\dfrac{3^n}{n!} + 1}{\dfrac{3^n}{n!} + 4} \to \dfrac{0+1}{0+4} = \dfrac{1}{4}$

$$\Longrightarrow \quad \overline{\lim}\, b_n = \underline{\lim}\, b_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{4}$$

Felhasználtuk, hogy $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$, ha $a \in \mathbb{R}$.

3. feladat (16 pont)

Keresse meg az alábbi sorozatok határértékét!

$$a_n = \left(\frac{3n+2}{3n-5}\right)^{n+4}, \qquad b_n = \left(1 + \frac{5}{n^3}\right)^{n^2}, \qquad c_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{n^2}$$

Megoldás:

$$a_n = \frac{\left(1 + \dfrac{2/3}{n}\right)^n}{\left(1 + \dfrac{-5/3}{n}\right)^n} \left(\frac{1 + \dfrac{2}{3n}}{1 - \dfrac{5}{3n}}\right)^4 \to \frac{e^{2/3}}{e^{-5/3}} = e^{7/3}$$

$$b_n = \sqrt[n]{\left(1 + \frac{5}{n^3}\right)^{n^3}} = \sqrt[n]{\beta_n}$$

$$\beta_n \to e^5 \text{ miatt } : \quad e^5 - 1 < \beta_n < e^5 + 1\,, \text{ ha } n > N_1$$

$$\Longrightarrow \quad \underbrace{\sqrt[n]{e^5 - 1}}_{\substack{\downarrow \\ 1}} < b_n < \underbrace{\sqrt[n]{e^5 + 1}}_{\substack{\downarrow \\ 1}}$$

$$\Longrightarrow \qquad b_n \to 1$$

$$c_n = \left(\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\right)^n = (\gamma_n)^n$$

$$\gamma_n \to \mathrm{e}^2 \text{ miatt } : \quad \gamma_n > 4\,, \text{ ha } n > N_2$$

$$\Longrightarrow \qquad c_n > \underbrace{4^n}_{\substack{\downarrow \\ \infty}}$$

$$\Longrightarrow \qquad c_n \to \infty$$

4. feladat (14 pont)

$$a_1 = 6\,; \qquad a_{n+1} = 8 - \frac{7}{a_n}\,,\ n = 1, 2, \cdots$$

$$(\,a_2 = 6.84\,, \quad a_3 = 6.976\,)$$

a) Mutassa meg, hogy $1 \le a_n \le 7 \quad \forall\, n$ -re!

b) Konvergens-e a számsorozat? Ha igen, mi a határértéke?

Megoldás:

a) 1) $1 \le a_1 \le a_2 \le a_3 \le 7$ teljesül

2) Tegyük fel, hogy $1 \le a_n \le 7$

3) Igaz-e, hogy $1 \le a_{n+1} = 8 - \dfrac{7}{a_n} \le 7\,?$

Tudjuk, hogy $1 \le a_n \le 7$

$$\Longrightarrow \qquad 1 \ge \frac{1}{a_n} \ge \frac{1}{7}$$

$$\Longrightarrow \qquad -7 \le \frac{-7}{a_n} \le -1 \qquad \Big|\ +8$$

$$\Longrightarrow \qquad 1 \le 8 - \frac{7}{a_n} = a_{n+1} \le 7$$

Tehát az állítás igaz.

b) Már beláttuk, hogy a sorozat korlátos. Belátjuk, hogy monoton nő.

1) $a_1 \le a_2 \le a_3$ igaz.

2) Tegyük fel, hogy $a_{n-1} \le a_n\,!$

3) Igaz-e, hogy

$$8 - \frac{7}{a_{n-1}} = a_n \overset{?}{\le} a_{n+1} = 8 - \frac{7}{a_n}$$

Az indukciós feltevés miatt

$$0 < 1 \le a_{n-1} \le a_n$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{a_{n-1}} \geq \frac{1}{a_n}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{-7}{a_{n-1}} \leq \frac{-7}{a_n}$$

$$\Longrightarrow \quad a_n = 8 - \frac{7}{a_{n-1}} \leq 8 - \frac{7}{a_n} = a_{n+1}$$

Tehát a sorozat monoton növekedő.
Vagyis $(a_n) \nearrow \wedge (a_n)$ felülről korlátos $\Longrightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.

A-ra fenn kell állni, hogy
$A = 8 - \dfrac{7}{A} \Longrightarrow A^2 - 8A + 7 = 0$, tehát $A = 1$ vagy $A = 7$.
Mivel $a_1 = 6$ és $(a_n) \nearrow \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 7$

5. feladat (7 pont)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1} + (-2)^n}{7^{n+1}} = ?$$

(Adja meg a sor összegét! Elegendő két tört összegeként vagy különbségeként megadnia.)

Megoldás:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{4^{-1}\,4^k + (-2)^k}{7 \cdot 7^k} = \frac{1}{28} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{4}{7}\right)^k + \frac{1}{7} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{-2}{7}\right)^k =$$

$$= \frac{1}{28} \cdot \frac{4}{7} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{4}{7}\right)^{k-1} + \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{-2}{7}\right) \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{-2}{7}\right)^{k-1}$$

$$\Longrightarrow \quad s = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{49} \frac{1}{1 - \frac{4}{7}} - \frac{2}{49} \frac{1}{1 - \frac{-2}{7}}$$

6. feladat (8 pont)

a) Mondja ki a numerikus sorokra vonatkozó majoráns és minoráns kritériumot!
b) Írja le a numerikus sorok konvergenciájára tanult szükséges feltételt!

Megoldás:

a) Majoráns kritérium:

Ha $0 < a_n \le c_n \quad \forall\, n$-re és $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergens $\Longrightarrow$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens

Minoráns kritérium:

Ha $0 \le d_n \le a_n \quad \forall\, n$-re és $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ divergens $\Longrightarrow$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens

b) Szükséges feltétel:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergens}\right) \quad \Longrightarrow \quad \left(\lim_{k\to\infty} a_k = 0\right)$$

7. feladat (26 pont)

$$a_n = \sqrt{\frac{2n^2 + 3}{5n^4 + 6n^2 + 1}}\,, \qquad b_n = \frac{3^n}{n^2 + 5^{n-1}}\,, \qquad c_n = \frac{1}{\sqrt[n]{2n^3 - 1}}$$

(i)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = ?\,, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = ?\,, \qquad \lim_{n\to\infty} c_n = ?$$

(ii) Konvergens-e a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, illetve a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ sor?

Megoldás:

(i) $a_n = \sqrt{\alpha_n}$, $\qquad \alpha_n = \dfrac{n^2}{n^4} \, \dfrac{2 + \dfrac{3}{n^2}}{5 + \dfrac{6}{n^2} + \dfrac{1}{n^4}} \to 0 \cdot \dfrac{2+0}{5+0+0} = 0$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

$$b_n = \frac{3^n}{n^2 + \frac{1}{5}\cdot 5^n} = \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n}{n^2 \left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{1}{5}} \to \frac{0}{0 + \frac{1}{5}} = 0$$

Felhasználtuk, hogy $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^k\, a^n = 0$, ha $|a| < 1$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

c_n :

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt[n]{2}\,\left(\sqrt[n]{n}\right)^3}}_{\downarrow \atop 1} = \frac{1}{\sqrt[n]{2\,n^3}} < c_n < \frac{1}{\sqrt[n]{2n^3 - n^3}} = \underbrace{\frac{1}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^3}}_{\downarrow \atop 1}$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} c_n = 1$$

(ii) Pozitív tagú sorokról van szó.

$$a_n > \sqrt{\frac{2n^2}{5n^4 + 6n^4 + n^4}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\,\frac{1}{n} \qquad \text{és} \qquad \frac{1}{\sqrt{6}}\sum^{\infty}\frac{1}{n} \ \text{ divergens}$$

$$\Longrightarrow \quad \sum^{\infty} a_n \ \text{ divergens}$$

$$b_n < \frac{3^n}{0 + \frac{1}{5}\cdot 5^n} = 5\left(\frac{3}{5}\right)^n \qquad \text{és} \quad 5\sum^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n \ \text{konvergens geometriai sor}$$

$$\left(0 < q = \frac{3}{5} < 1\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \sum^{\infty} b_n \ \text{ konvergens}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 1 \neq 0$ miatt $\sum^{\infty} c_n$ divergens.
(nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele).

Pótfeladat (csak az elégségeshez):

8. feladat (10 pont)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{5n^2-3n+8} - \sqrt{5n^2+3}\right) = ?$$

Megoldás: