2. Vizsgazárthelyi

2010/11 tél A3

1. Oldja meg az $y' + y = x^2$, $y(0) = 1$ kezdeti érték problémát Laplace-transzformációval!

2. Legyen H az a kifelé irányított felület, melyet úgy kapunk, hogy alap- és fedőlapjaival lezárjuk azt az m magasságú z tengelyű egyenes körhengerpalástot, melynek alaplapja az $[x\,y]$ síkbeli origóközéppontú R sugarú körlap. Legyen

$$v(x, y, z) = (4y + 3xz^2 + 3z, 4x + 8zy - 6yz^2, z^3) \quad x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Határozza meg v felületmenti integrálját H-n!

3. Legyen G a háromdimenziós térben az origóközéppontú R sugarú felfelé irányított felső félgömbfelület és k a z irányú egységvektor. Számítsa ki a $v(r) = \operatorname{rot}(k \times r)$, $r \in \mathbb{R}^3$ vektor-vektor függvény felületmenti integrálját G-n!

4. Legyen K az origóközéppontú $R = 3$ sugarú pozitívan irányított kör a komplex síkon. Mennyi az $\displaystyle\int_K \frac{1}{z(z^2 - 4z + 4)}\,dz$ integrál értéke?

5. Határozza meg az $f(z) = \dfrac{1}{z-1}$ függvény azon $z = i$ pont körüli Laurent sorát mely a $z = 2$ pontban előállítja a függvényt!

6. Legyen $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tetszőleges mindenütt deriválható vektor-vektor függvény és $a \in \mathbb{R}^3$ tetszőleges. Melyik igaz, melyik nem?

(1) Ha v deriváltja lineáris operátor, akkor $\operatorname{div} v = 0$ mindenütt.

(2) Ha v lineáris operátor, akkor $\operatorname{div} v = 0$ mindenütt.

(3) Ha v-nek $r = a$-beli deriváltja w és $\operatorname{div} w\big|_{r=a} = 0$, akkor $\operatorname{div} v\big|_{r=a} = 0$

(4) Ha v-nek $r = a$-beli deriváltja $\mathbf{D}$ és $\operatorname{div} v\big|_{r=a} \neq 0$, akkor $\mathbf{D}$ valamely bázisbeli mátrixának főátlójában nem minden elem 0.

(5) Ha v-nek $r = a$-beli deriváltja $\mathbf{D}$ és $\operatorname{div} v\big|_{r=a} = 0$, akkor minden bázis esetén $\mathbf{D}$ mátrixának főátlójában minden elem 0.

(6) Ha v-nek $r = a$-beli deriváltja $\mathbf{D}$ és $\mathbf{D}$ valamely bázisbeli mátrixának főátlójában nem minden elem 0, akkor $\operatorname{div} v\big|_{r=a} \neq 0$.

(7) Ha v-nek $r = a$-beli deriváltja $\mathbf{D}$ és $\mathbf{D}$ valamely bázisbeli mátrixának főátlójában levő elemek összege 0, akkor $\operatorname{div} v\big|_{r=a} = 0$.

(8) Ha v-nek $r = a$-beli deriváltja $\mathbf{D}$ és $\mathbf{D}$ valamely bázisbeli mátrixának főátlójában levő elemek összege nem 0, akkor $\operatorname{div} v\big|_{r=a} \neq 0$.

2. Vizsgazárthelyi megoldásokkal 2010/11 tél A3

1. Oldja meg az $y' + y = x^2$, $y(0) = 1$ kezdeti érték problémát Laplace-transzformációval!

MO. $Y \doteq \mathrm{L}(y)$, $y(0) = 1 \rightsquigarrow y' + y = x^2 \rightsquigarrow sY - 1 + Y = \dfrac{2}{s^3} \rightsquigarrow$ **3p**

$Y(s+1) = \dfrac{s^3+2}{s^3} \rightsquigarrow Y = \dfrac{s^3+2}{s^3(s+1)}$. Ezt kell parciális törtekre bontani:

$$\frac{s^3+2}{s^3(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{D}{s+1} = \frac{As^2(s+1) + Bs(s+1) + C(s+1) + Ds^3}{s^3(s+1)} \rightsquigarrow$$

$\rightsquigarrow s^3 + 2 = As^2(s+1) + Bs(s+1) + C(s+1) + Ds^3$. **3p**

Ebből $s = -1$:-el $D = -1$, $s = 0$:-al $C = 2$

$s = 1$-el $3 = 2A + 2B + 2C + D \rightsquigarrow 3 = 2A + 2B + 4 - 1 \rightsquigarrow 2A + 2B = 0 \rightsquigarrow A = -B$

$s = 2$-vel $10 = 12A + 6B + 3C + 8D \rightsquigarrow 10 = 12A - 6A + 6 - 8 \rightsquigarrow 12 = 6A \rightsquigarrow A = 2, B = -2$. **2p**

Így $Y = \dfrac{2}{s} - \dfrac{2}{s^2} + \dfrac{2}{s^3} - \dfrac{1}{s+1} \rightsquigarrow y = 2 - 2x + x^2 - e^{-x}$. **2p**

10p

---

2. Legyen H az a kifelé irányított felület, melyet úgy kapunk, hogy alap- és fedőlapjaival lezárjuk azt az m magasságú z tengelyű egyenes körhengerpalástot, melynek alaplapja az $[x\,y]$ síkbeli origóközéppontú R sugarú körlap. Legyen $v(x,y,z) = (4y + 3xz^2 + 3z, 4x + 8zy - 6yz^2, z^3)$. Határozzuk meg v felületmenti integrálját H-n!

MO. Mivel $\operatorname{div} v = 8z$, Gauss-Osztrogradszkij tétellel (V a hengertest): **1p**

$$\int_H v\,df = \int_V \operatorname{div} v\,dV = \quad \textbf{3p}$$

$$= \int_0^m \int_0^{2\pi} \int_0^R 8z\,r\,dr\,d\varphi\,dz = \quad \textbf{4p}$$

$$= 8 \cdot 2\pi \cdot \frac{R^2}{2} \cdot \frac{m^2}{2} = 4R^2m^2\pi \quad \textbf{2p}$$

10p

---

3. Legyen G a háromdimenziós térben az origóközéppontú R sugarú felfelé irányított felső félgömbfelület és k a z irányú egységvektor. Számítsuk ki a $v(r) = \operatorname{rot}(k \times r)$, $r \in \mathbb{R}^3$ vektor-vektor függvény felületmenti integrálját G-n!

MO. A jelölések: $\int_F w\,df$, $\int_L w\,dr$ és $\int_L w\,|dr|$ rendre a w-nek az F felületmenti, az L görbementi és az L ívhossz szerinti integráljai. Legyen K a G pozitívan irányított pereme, azaz az origóközéppontú R sugarú $[x\,y]$ síkbeli pozitívan irányított körvonal. Felhasználva, hogy tetszőleges w és L esetén $\int_L w\,dr = \int_L w_e\,|dr|$, ahol w_e a w-nek az L görbe érintőjére eső vetülete, továbbá hogy

$$(k \times r) \perp k \rightsquigarrow (k \times r) \in [x\,y] \text{ és } (k \times r) \perp r \rightsquigarrow (k \times r) \,||\, e \text{ ha } K \text{ érintője } e,$$

$$\text{tehát } (k \times r)_e = |k \times r| = |r| = R \text{ a körön,} \quad \textbf{4p}$$

Stokes tétellel azt kapjuk, hogy

$$\int_G v\,df = \int_G \operatorname{rot}(k \times r)\,df = \int_K (k \times r)\,dr = \quad \textbf{4p}$$

$$= \int_K R|dr| = R \int_K |dr| = 2R^2\pi \quad \textbf{2p}$$

A vonalintegrál persze számolható a definícióból is, felhasználva, hogy

$$k \times r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (-y, x, 0) \text{ és } K\colon r(t) = (R\cos t, R\sin t, 0),\ t \in [0, 2\pi] \quad \textbf{3p}$$

$$\int_K (k \times r)\,dr = \int_0^{2\pi} (k \times r)(t) \cdot \dot{r}(t)\,dt = \int_0^{2\pi} [(-R\sin t, R\cos t, 0) \cdot (-R\sin t, R\cos t, 0)]\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (R^2 \sin t + R^2 \cos t)\,dt = \int_0^{2\pi} R^2 dt = 2R^2\pi \quad \textbf{3p}$$

10p

Folytatás a következő oldalon.

4. Legyen K az origóközéppontú $R = 3$ sugarú pozitívan irányított kör a komplex síkon. Mennyi az $\int_K \frac{1}{z(z^2-4z+4)}\,dz$ integrál értéke?

MO. Cauchy integrálformulákkal (K_1 és K_2 olyan origó ill. $z = 2$ középpontú körök, melyeken belül a középpont az integrandus egyetlen irreguláris helye):

$$\int_K \frac{1}{z(z^2-4z+4)}\,dz = \int_K \frac{1}{z(z-2)^2}\,dz = \int_{K_1} \frac{\frac{1}{(z-2)^2}}{z}\,dz + \int_{K_2} \frac{\frac{1}{z}}{(z-2)^2}\,dz = \qquad \text{4p}$$

$$= 2\pi j\,\frac{1}{(z-2)^2}\bigg|_{z=0} + 2\pi j\,\left(\frac{1}{z}\right)'\bigg|_{z=2} = 2\pi j\,\frac{1}{(z-2)^2}\bigg|_{z=0} - 2\pi j\,\frac{1}{z^2}\bigg|_{z=2} = \frac{2\pi j}{4} - \frac{2\pi j}{4} = 0. \qquad \text{6p}$$

10p

---

5. Határozza meg az $f(z) = \frac{1}{z-1}$ függvény azon $z = i$ pont körüli Laurent sorát mely a $z = 2$ pontban előállítja a függvényt!

MO. $f(z) = \frac{1}{z-1} = \frac{1}{(z-i)+i-1} = \frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{1+\frac{i-1}{z-i}} =$ 4p

$$= \frac{1}{z-i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{i-1}{z-i}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(1-i)^n\frac{1}{(z-i)^{n+1}} \qquad \text{6p}$$

10p

---

6. Legyen $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tetszőleges mindenütt deriválható vektor-vektor függvény és $a \in \mathbb{R}^3$ tetszőleges. Melyik igaz, melyik nem?

(1) Ha v deriváltja lineáris operátor, akkor $\operatorname{div} v = 0$ mindenütt.

(2) Ha v lineáris operátor, akkor $\operatorname{div} v = 0$ mindenütt.

(3) Ha v-nek $r = a$-beli deriváltja w és $\operatorname{div} w\big|_{r=a} = 0$, akkor $\operatorname{div} v\big|_{r=a} = 0$

(4) Ha v-nek $r = a$-beli deriváltja $\mathbf{D}$ és $\operatorname{div} v\big|_{r=a} \neq 0$, akkor $\mathbf{D}$ valamely bázisbeli mátrixának főátlójában nem minden elem 0.

(5) Ha v-nek $r = a$-beli deriváltja $\mathbf{D}$ és $\operatorname{div} v\big|_{r=a} = 0$, akkor minden bázis esetén $\mathbf{D}$ mátrixának főátlójában minden elem 0.

(6) Ha v-nek $r = a$-beli deriváltja $\mathbf{D}$ és $\mathbf{D}$ valamely bázisbeli mátrixának főátlójában nem minden elem 0, akkor $\operatorname{div} v\big|_{r=a} \neq 0$

(7) Ha v-nek $r = a$-beli deriváltja $\mathbf{D}$ és $\mathbf{D}$ valamely bázisbeli mátrixának főátlójában levő elemek összege 0, akkor $\operatorname{div} v\big|_{r=a} = 0$

(8) Ha v-nek $r = a$-beli deriváltja $\mathbf{D}$ és $\mathbf{D}$ valamely bázisbeli mátrixának főátlójában levő elemek összege nem 0, akkor $\operatorname{div} v\big|_{r=a} \neq 0$

MO.

(1) nem igaz 1p
(2) nem igaz 1p
(3) igaz 2p
(4) igaz 1p
(5) nem igaz 1p
(6) nem igaz 1p
(7) igaz 1p
(8) igaz 2p

10p