2. ELSŐRENDŰ DIFFERENCIÁLEGYENLETEK MEGOLDÁSA TAYLOR-SOROKKAL

Az

$$y' = f(x, y)$$

differenciálegyenletnek az $y(x_0) = y_0$ kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldása Taylor-sor segítségével is felírható.

Ismeretes, hogy az akárhányszor differenciálható $y = g(x)$ függvény Taylor-sora az x_0 helyen a következő:

$$g(x) = g(x_0) + \frac{g'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{g''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 +$$

$$+ \frac{g'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

A megoldandó

$$y' = f(x, y)$$

differenciálegyenlet jobb oldalát tekintsük $g'(x)$-nek

$$y' = g'(x) = f(x, y),$$

és ekkor az összetett függvény differenciálási szabálya szerint

$$y'' = g''(x) = \frac{d}{dx} f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f,$$

$$y''' = g'''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial f}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} f + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} f \frac{\partial f}{\partial y} + f\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + f\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} f =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + 2f\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + f\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + f^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

és így tovább.

Az egyszerűbb írásmód kedvéért legyen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = q, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = s, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = t,$$

és ezek értékét az $(x_0; y_0)$ helyen jelölje p_0, q_0 stb., továbbá legyen $f(x_0, y_0) = f_0$, akkor minden $x = x_0 + h$ helyen (ekkor $x - x_0 = h$) $g(x)$ harmadfokú Taylor-polinomja, amit a differenciálegyenlet közelítő megoldásának tekinthetünk, a következő:

$$\bar{y} = y_0 + hf_0 + \frac{1}{2} h^2 (p_0 + f_0 q_0) +$$

$$+ \frac{1}{6} h^3 (r_0 + p_0 q_0 + 2f_0 s_0 + f_0 q_0^2 + f_0^2 t_0).$$

Az eljárás folytatható, és a megoldás Taylor-sor alakjában is felírható.

Gyakorló feladatok

Határozzuk meg Taylor-sor segítségével az

$$y' = 3x+y^2$$

differenciálegyenletnek az $y(0)=1$ feltételnek eleget tevő partikuláris megoldását! Mekkora y értéke az $x=0,1$ helyen?

Esetünkben $x_0=0$, $y_0=1$, $g(x_0)=y_0=1$.

$$\begin{aligned}
y' &= g'(x) = 3x+y^2, & g'(x_0) &= 1,\\
y'' &= g''(x) = 3+2yy', & g''(x_0) &= 5,\\
y''' &= g'''(x) = 2(y')^2+2yy'', & g'''(x_0) &= 12,\\
y^{IV} &= g^{IV}(x) = 6y'y''+2yy''', & g^{IV}(x_0) &= 54,\\
y^{V} &= g^{V}(x) = 6(y'')^2+8y'y'''+2yy^{IV}, & g^{V}(x_0) &= 354,
\end{aligned}$$

és így tovább.

A megoldás tehát

$$y = 1+\frac{1}{1!}(x-0)+\frac{5}{2!}(x-0)^2+\frac{12}{3!}(x-0)^3+$$
$$+\frac{54}{4!}(x-0)^4+\frac{354}{5!}(x-0)^5+\dots,$$

ill.

$$y = 1+x+\frac{5}{2}x^2+2x^3+\frac{9}{4}x^4+\frac{177}{66}x^5+\dots.$$

Ha $x=0,1$, akkor

$$\bar{y} = y(0,1) = 1+0,1+0,025+0,002+0,000\,22+0,000\,03+\dots,$$

$$\bar{y} \approx 1,127\,25.$$

(Vö. a Picard-módszerrel kapott eredménnyel, 200. old.)