A43333

2021. szeptember 23., csütörtök 11:59

A43333

A4 Valószínűségszámítás — III. EA

dr. Keszthelyi Gabriella
Sztochasztika és Dinamikai rendszerek tanszék

2021. szeptember 23.

Valószínűségi változó

Általában a kísérletek lehetséges kimeneteleire vagyunk kíváncsiak. X valószínűségi változó egy függvény, ami az eseménytérről képez a természetes vagy valós számok halmazára.

Diszkrét valószínűségi változó esetén az értékkészlet véges vagy megszámlálhatóan végtelen. $X : S \to \mathbb{N}$
Pl. mikor lesz az első sikeres kísérlet, selejtes termékek száma

Folytonos valószínűségi változó esetén az értékkészlet $\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{R}$ valamilyen nem elfajuló részhalmaza (intervallum). $X : S \to \mathbb{R}$
Pl. alkatrészek élettartama, termékek súlya

Mi tud elromlani?

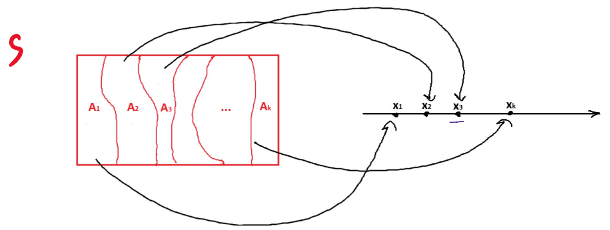
$\mathcal{A} \subset P(S)$ eseményalgebra, amely tartalmazza az események összes metszetét, unióját, komplementerét.

Példa

Egy dobozban van 3 golyó, az egyik 00, a másik 01 a harmadik 10-es számú. Ekkor az eseménytér $S = \{00, 01, 10\}$. Legyen $A_1 = \{00, 10\}, A_2 = \{01\}$, (pl. van egy rossz címkeolvasó, amely nem tudja a 00-t és a 10-t megkülönböztetni) $\mathcal{A}$ pedig az A_1, A_2 által generált eseményalgebra.
$\mathcal{A} = \{\emptyset, \{00, 10\}, \{01\}, \{00, 01, 10\}\}$. Továbbá legyen $P(A_1) = 2/3,\ P(A_2) = 1/3$. Az X valószínűségi változó pedig legyen $X(00) = 0,\ X(01) = 1,\ X(10) = 2$.
Ekkor az $\{X = 0\}$ valószínűsége nem adható meg, mert a $\{00\}$ nincs benne az eseményalgebrában. Tehát az X nem valószínűségi változó.

Diszkrét eloszlások

Diszkrét valváltozó esetén az értékkészlet megszámlálható:



Súlyfüggvény (probability mass function)

$$p_k = P(X = k) \geq 0 \quad \forall k - ra$$
$$\sum_k p_k = 1$$

$P(X=1) = \frac{1}{2}$ $P(X=2) = \frac{1}{4}$

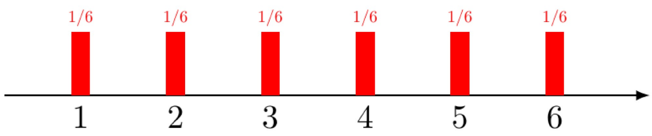
$P(X=3) = \frac{1}{5}$ eloszlás-e?

$P(X=i) = 0$, $i \neq 1,2,3$ $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \neq 1$

NEM.

Súlyfüggvény

Szabályos kocka súlyfüggvénye



$$P(X = 1) = P(X = 2) = P(X = 3) = P(X = 4) =$$
$$= P(X = 5) = P(X = 6) = 1/6$$

Diszkrét eloszlás

Szabályos kocka eloszlásfüggvénye

$P(X \le k)$

$P(X \le 1) = \frac{1}{6}$ $= P(X=1)$

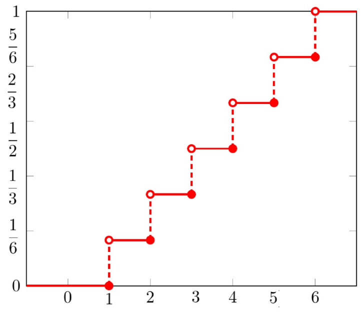
$P(X \le 2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ $= P(X=1) + P(X=2)$

$P(X \le 3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

$P(X \le 4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

$P(X \le 5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

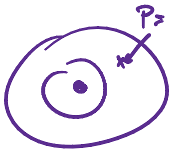
$P(X \le 6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1$



folytonosnál

$P(X = x) = 0$

$P = 0$

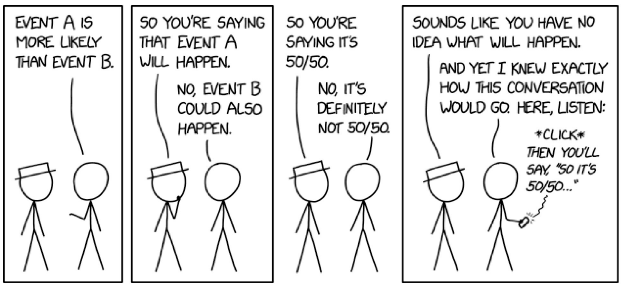


Nevezetes diszkrét eloszlások

Egyenletes eloszlás
Van N különböző kimenetelünk és mindegyik egyformán valószínű:

$$P(X = 1) = P(X = 2) = P(X = 3) = \cdots = P(X = k) = 1/N$$

Lásd kocka, érme.



Nevezetes diszkrét eloszlások

Hipergeometriai eloszlás AKA lottó
N db objektum, amit M és $N - M$ csoportra bontunk (nyerő és nem nyerő). M-ből húzunk m darabot, $N - M$-ből $n - m$ darabot.

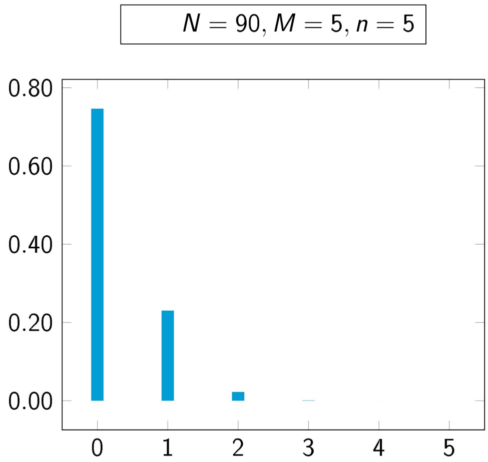
$$P(X = m) = \frac{\binom{M}{m}\binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}}$$

VISSZATEVÉS NÉLKÜLI MINTAVÉTEL

Példa *(ötös lottó)*
90 szám közül 5 nyerő, 85 nem nyerő, k-as találat valószínűsége:

$$P(X = k) = \frac{\binom{5}{k}\binom{85}{5-k}}{\binom{90}{5}}$$

Hipergeometriai eloszlás



Nevezetes diszkrét eloszlások

Bernoulli/indikátor eloszlás

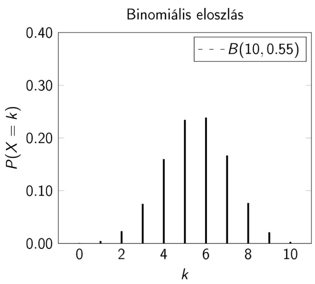
$$X = \{0, 1\}, \; P(X = 1) = p, \; P(X = 0) = 1 - p$$

Pl. dobunk egy (cinkelt) érmével egyszer
$P(X = \text{fej}) = 0.55, P(X = \text{írás}) = 0.45$
Binomiális eloszlás
Ismételt kísérletek (Bernoullik összege)

Példa *dobunk egy cinkelt érmével 10-szer, mi a valószínűsége, hogy lesz benne 3 fej?*

$$P(X = 3) = \binom{10}{3} 0.55^3 0.45^7$$

Binomiális eloszlás



$$P(X = 0) = \binom{10}{0} 0.55^0 0.45^{10}$$

$$P(X = 1) = \binom{10}{1} 0.55^1 0.45^9$$

$$P(X = 2) = \binom{10}{2} 0.55^2 0.45^8$$

$$\vdots$$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Példa binomiálisra

Egy irodában 4 db számítógép van. Mindegyiknél 0,6 az esélye, hogy vírusos. Ha egy gép vírusos lesz, még mindig 0,7 az esélye, hogy működni fog. Mi a vszsége, hogy 3 működő gép van az irodában? Mi a valószínűsége, hogy 2 működő ÉS 3 vírusos gép van?

$p = 0{,}82$

1.) $P(X=3) = \binom{4}{3} 0{,}82^3 \cdot 0{,}18 = \underline{0{,}397}$

2.) P(2 működő ÉS 3 vírusos gép)

P(2 működő ∩ 3 vírusos) = P(2 működő | 3 vírusos) · P(3 vírusos gép)

0. lépés
TELJES VALÓSZÍNŰSÉG TÉTELE
P(MŰKÖDIK) = 0,4 + 0,6 · 0,7 = 0,82

VÍRUS 0,6 — MŰKÖDIK 0,7 — NEM MŰKÖDIK 0,3
NEM VÍRUSOS (MŰKÖDIK) 0,4

P(3 vírusos közül 1 működik) = ?

$P(Y=1) = \binom{3}{1} 0{,}7^1 \cdot 0{,}3^2 = 0{,}189$

$P(Z=3) = \binom{4}{3} 0{,}6^3 \cdot 0{,}4 = 0{,}347$

P(2 műk. ∩ 3 vírusos) = 0,189 · 0,347 = $\underline{0{,}066}$

Hipergeometriai vs Binomiális eloszlás

	hipergeom	binom
mintavétel jellege	visszatevés nélkül	visszatevéssel
kísérletek függetlenek	NEM	IGEN

Példa
Naponta 1000 db tranzisztort gyártunk, ebből 10 db selejtes. Mi a vszsége, hogy 5-öt húzva kevesebb, mint 2 db selejtes lesz közöttük?

2 db csoport: SELEJTES 10, $p = 0{,}01$; JÓ 990, $p = 0{,}99$

$P(X<2)$ **Hipergeometriai**
$P(X=0)$
$P(X=1)$

$$P(X=0) = \frac{\binom{10}{0}\binom{990}{5}}{\binom{1000}{5}} \approx 0{,}95$$

$$P(X=1) = \frac{\binom{10}{1}\binom{990}{4}}{\binom{1000}{5}} \approx 0{,}048$$

Binomiális

$P(X<2) = P(X=0) + P(X=1)$ $\frac{10}{1000}$ $\frac{990}{1000}$

$$P(X=0) = \binom{5}{0} 0{,}01^0 0{,}99^5 \approx 0{,}95$$

$$P(X=1) = \binom{5}{1} 0{,}01^1 0{,}99^4 \approx 0{,}049$$

Geometriai eloszlás

Mikor következik be az első sikeres kísérlet?
$P(\text{sikeres kísérlet}) = p$, $P(\text{sikertelen kísérlet}) = 1 - p$

$$P(X = k) = (1-p)^{k-1} p$$

Példa
Dobunk egy (cinkelt) érmével sokszor
$P(X = \text{fej}) = 0.55$, $P(X = \text{írás}) = 0.45$ *Mi a valószínűsége, hogy hamarabb lesz (az első) fej, mint a 4. dobás?*

SÚLYPONTOSAN
$$P(X<4) = \underbrace{0{,}55}_{P(X=1)} + \underbrace{0{,}45 \cdot 0{,}55}_{P(X=2)} + \underbrace{0{,}45^2 \cdot 0{,}55}_{P(X=3)} \approx 0{,}9$$

ELOSZLÁS FV

Negatív binomiális eloszlás

Mikor következik be a k. sikeres kísérlet?

k a sikeres kísérletek, r a kudarcok száma, $n = k + r$, p a sikeres kísérlet valószínűsége:

$$P(X = n) = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$$

Az első n-1 kísérletben kell k-1 sikeresnek lenni

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{n-1}$$

$$\binom{n-1}{k-1}$$

Példa

Egy gyártósor mindig leáll, amikor hibás termék kerül a szalagra. Mi a valószínűsége, hogy a 15. terméknél lesz a 3. leállás?

$p = 0{,}01$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{14 \text{ db}}$

$Y \sim \text{Geom}$

$n = 15 \quad k = 3$

$P(X=15) = \binom{14}{2} \cdot 0{,}01^3 \cdot 0{,}99^{12}$

$P(Y=5) = ?$

$P(Y=6) = 0{,}99^5 \cdot 0{,}1^6$

Mi annak a valószínűsége, hogy egy leállás után a következő leállásig 5 jó termék lesz?

Poisson eloszlás

Egy adott intervallumon bekövetkező események eloszlása. Olyankor használjuk, amikor egymástól független események következnek be teljesen random módon térben vagy időben. Pl. adott idő alatt:

- radioaktiv sugárzás során a bomlások száma,
- ügyfélszolgálatra befutó telefonhívások száma,
- egy félvezető chipben bekövetkező elektromos kisülések száma

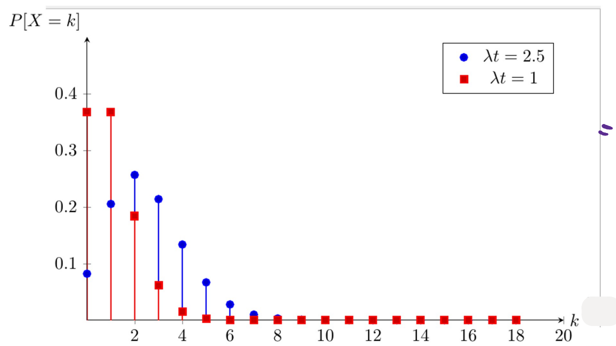
$$P(X = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

Ahol t az intervallum, λ az egységnyi idő alatt bekövetkező események átlagos száma.

Poisson eloszlás

Példa

Telefonos ügyfélszolgálatra óránként átlagosan 10 hívás érkezik. Mi a vszsége, hogy negyed óra alatt több, mint 3 hívás fut be? 6 perc alatt több, mint 2 hívás?



$\lambda = 10$ hívás/óra

$t_1 = \frac{1}{4}$

$\lambda t_1 = 2{,}5$

$P(X>3) = P(X=4) + P(X=5) + P(X=6) + \dots + P(X=100) + \dots$

$= 1 - P(X \le 3) = 1 - (P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3))$

$= 1 - e^{-2{,}5}\left(1 + 2{,}5 + \frac{2{,}5^2}{2} + \frac{2{,}5^3}{6}\right) = \underline{0{,}2424}$

$P(X=0) = \frac{2{,}5^0}{0!} e^{-2{,}5}$

$P(X=1) = \frac{2{,}5^1}{1!} e^{-2{,}5}$

$P(X=2) = \frac{2{,}5^2}{2!} e^{-2{,}5}$

$P(X=3) = \frac{2{,}5^3}{3!} e^{-2{,}5}$

$t_2 = \frac{1}{10} \quad \lambda t_2 = 10 \cdot \frac{1}{10} = 1$

$P(X>2) = P(X=3) + P(X=4) + \dots$

$= 1 - P(X \le 2) = 1 - (P(X=0) + P(X=1) + P(X=2))$

$= 1 - e^{-1}\left(1 + 1 + \frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{0{,}08}}$

$P(X=0) = \frac{1^0}{0!} \cdot e^{-1}$

$P(X=1) = \frac{1^1}{1!} e^{-1}$

$P(X=2) = \frac{1^2}{2!} e^{-1}$

Példa Poissonra

Egy elektromos vezeték átlagosan 4 méterenként szakad meg. Mi a valószínűsége, hogy egy 1 méteres szakaszon több mint 2

$\lambda = 1$ szakadás / 4 méter

Egy elektromos vezeték átlagosan 4 méterenként szakad meg. Mi a valószínűsége, hogy egy 1 méteres szakaszon több mint 2 helyen megszakad? Ha már találtunk egy szakadást az 1 méteres szakaszon, akkor mi a valószínűsége, hogy lesz több, mint 2 helyen szakadás?

$\lambda = 1$ szakadás / 4 méter

$t = \frac{1}{4}$

$\lambda t = 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$P(X>2) = P(X=3) + P(X=4) + \ldots = 1 - (P(X=0) + P(X=1) + P(X=2))$

$P(X=0) = \frac{(\frac{1}{4})^0}{0!} e^{-\frac{1}{4}}$ $P(X=1) = \frac{(\frac{1}{4})^1}{1!} e^{-\frac{1}{4}}$ $P(X=2) = \frac{(\frac{1}{4})^2}{2!} e^{-\frac{1}{4}}$

$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \frac{(\frac{1}{4})^0}{0!} e^{-\frac{1}{4}} = 0{,}22$

$P(X>2) = 1 - e^{-\frac{1}{4}}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{32}\right) = \underline{0{,}0022}$

$P(X>2 \mid X \geq 1) = \frac{P(\{X>2\} \cap \{X \geq 1\})}{P(X \geq 1)} = \frac{P(X>2)}{P(X \geq 1)} = \frac{0{,}0022}{0{,}22} = \underline{\underline{0{,}01}}$

Binomiális vs Poisson eloszlás

Ha p pici a mintavételünk pedig nagy, akkor a binomiális eloszlás jól közelíthető a Poissonnal.

$$\lim_{n\to\infty, p\to 0, np\to\lambda t} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

azaz

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

Irodalomjegyzék

- Vetier András—Valószínűségszámítás
- Alberto Leon-Garcia—Probability, Statistics, and Random Processes for Electrical Engineering

Köszönöm a figyelmet!