Megoldás

**ANALÍZIS(2)**
Műszaki Informatika szak

**VIZSGADOLGOZAT I. rész**
B változat

**2002. június 20.**
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

**1. feladat (10 pont)**

$$y' = x^3 + 2y^2$$

a) Írja fel az n-edrendű Taylor polinom definícióját!

b) Az $x_0 = -2$ pontnak van olyan környezete, melyben az $y(-2) = 2$ kezdeti érték probléma egyértelműen megoldható!
A differenciálegyenlet megoldása nélkül határozza meg ezen kezdeti érték probléma megoldásának az $x_0 = -2$ pontbeli harmadfokú Taylor polinomját!

a) $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ 3

b.) $T_3(x) = y(-2) + \frac{y'(-2)}{1!}(x+2) + \frac{y''(-2)}{2!}(x+2)^2 + \frac{y'''(-2)}{3!}(x+2)^3$

$y(-2) = 2$

$y'(-2) = (-2)^3 + 2\cdot 2^2 = 0$ 1

$y'' = 3x^2 + 4yy'$ $\quad y''(-2) = 12$ 2

$y''' = 6x + 4y'y' + 4yy''$ $\quad y'''(-2) = -12 + 8\cdot 12 = 84$ 2

$T_3(x) = 2 + \frac{12}{2}(x+2)^2 + \frac{84}{6}(x+2)^3$ 2

**2. feladat (12 pont)**

Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$y' - \frac{3x^2}{x^3+5}\,y = (x^3+5)^2$$

$y_{iá} = y_H + y_{ip}$ 2

H: $\quad y' - \frac{3x^2}{x^3+5}y = 0 \longrightarrow y' = \frac{3x^2}{x^3+5}\,y$ $\quad y \equiv 0$ m.o. 2

Ha $y \neq 0$: $\quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{3x^2}{x^3+5}\,dx \longrightarrow \ln|y| = \ln|x^3+5| + C_1$ 1 2

$\longrightarrow |y| = e^{C_1}|x^3+5| \longrightarrow \left.\begin{array}{l} y = \pm e^{C_1}(x^3+5) \\ y \equiv 0 \end{array}\right\} y_H = C(x^3+5)$ $\quad C \in \mathbb{R}$ 1

$y_{ip} = C(x)\,(x^3+5)$

$y'_{ip} = c'(x^3+5) + C\cdot 3x^2$

Behelyettesítve I-be:

$c'(x^3+5) + C\cdot 3x^2 - \frac{3x^2}{x^3+5}\, C\,(x^3+5) = (x^3+5)^2$

$\to \quad c' = x^3+5 \quad \to \quad C = \frac{x^4}{4} + 5x \quad \to y_{ip} = \left(\frac{x^4}{4}+5x\right)(x^3+5)$

$y_{iá} = C\,(x^3+5) + \left(\frac{x^4}{4}+5x\right)(x^3+5) \quad , \; C \in \mathbb{R}$

**3. feladat (15 pont)**

a) Adjon elégséges feltételt függvénysor egyenletes konvergenciájára!
Mondja ki a függvénysor tagonkénti deriválhatóságával kapcsolatos tételt!

b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(2xn + n^2\sqrt{n}\right)}{n^3+8}$$

Mutassa meg, hogy a függvénysor $\mathbb{R}$-en egyenletesen konvergens és tagonként deriválható!

a.) Weierstrass kritérium (elégséges tétel egyenletes konvergenciára).

(T) Ha $\exists (b_k)$, hogy $|f_k(x)| \le b_k$ ; $x \in H$ ; $k = 0, 1 \ldots$ és $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergens numerikus sor, akkor $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ függvénysor egyenletesen konvergens $H$-n. (3)

(T) Ha $f_k \in C^1_{[a,b]}$ és $[a,b]$-n

$\sum_{k=0}^{\infty} f'_k(x) = g(x)$ és a konvergencia egyenletes (3)

$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = s(x)$ (pontonkénti konvergencia),

akkor $s$ deriválható $[a,b]$-n és $s' = g$.

b) $|f_n(x)| \le \frac{1}{n^3}$ és $\sum^{\infty} \frac{1}{n^3}$ konvergens $\Rightarrow$ $\mathbb{R}$-en egyenletes a konvergencia. (3)

v1 020620/2.

$$\sum_1^\infty f_n'(x) = \sum_1^\infty -\frac{\sin(2xn+n^2\sqrt{n})}{n^3+8}\cdot 2n \quad (3)$$

$f_n \in C^1_{\mathbb{R}}$, $\quad |f_n'(x)| \le \frac{1\cdot 2n}{n^3} = \frac{2}{n^2}$; $\quad 2\sum \frac{1}{n^2}$ konv.

$\Rightarrow \sum_1^\infty f_n'(x)$ egyenletesen konvergens $\mathbb{R}$-en (2)

$\sum_1^\infty f_n'(x)$ egyenletesen konv $\mathbb{R}$-en $\Rightarrow \sum_1^\infty f_n(x)$ pontonként konv. (1)

Tehát a tétel feltételei teljesülnek $\Rightarrow$ tagonként deriválható (1)

**4. feladat (16 pont)**

Adja meg az alábbi függvények megadott bázispontú Taylor sorát és annak konvergencia tartományát!

a) $f(x) = 3x\,\mathrm{sh}\,(2x^2)$, $\quad x_0 = 0$

b) $g(x) = \dfrac{1}{5-x}$, $\quad x_0 = -3$ $\qquad$ c) $h(x) = \dfrac{(x+3)^2}{5-x}$, $\quad x_0 = -3$

a.) $\mathrm{sh}\, u = u + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} + \dots \qquad u \in \mathbb{R}$ (2)

$\mathrm{sh}\, 2x^2 = 2x^2 + \frac{2^3 x^6}{3!} + \frac{2^5 x^{10}}{5!} + \dots \qquad x \in \mathbb{R}$ (2)

$f(x) = 6x^3 + \frac{3\cdot 2^3 x^7}{3!} + \frac{3\cdot 2^5 x^{11}}{5!} + \dots \qquad x \in \mathbb{R}$ (2)

b.) $g(x) = \frac{1}{5-x} = \frac{1}{8-(x+3)} \;(2)\; = \frac{1}{8}\,\frac{1}{1-\frac{x+3}{8}} = \frac{1}{8}\sum_{n=0}^\infty \left(\frac{x+3}{8}\right)^n$ (3)

KT: $\left|\frac{x+3}{8}\right| < 1 \rightarrow |x+3| < 8$ (2)

c.) $h(x) = (x+3)^2 \underbrace{\frac{1}{8}\sum_{n=0}^\infty \left(\frac{x+3}{8}\right)^n}_{g(x)} = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{8^{n+1}}(x+3)^{n+2}$ (2)

KT: $\left|\frac{x+3}{8}\right| < 1 \quad : \quad |x+3| < 8$ (1)

v1 020620/3

**5. feladat (8 pont)**

Legyen $f$ $m$ -változós függvény!

a) Adja meg a totális deriválhatóság és a parciális deriválhatóság definícióját!

b) Bizonyítsa be, hogy a parciális deriváltak létezése szükséges feltétele a totális deriválhatóságnak (belső potban)!

Parciális deriváltak

(D) *Az $f$ függvény $x_k$ szerinti parciális deriváltja:*

(2)

$$f_k(x_k) := f(a_1,\ldots,a_{k-1},x_k,a_{k+1},\ldots,a_m) \quad \text{(egyváltozós függvény)}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}f_k}{\mathrm{d}x_k}\right|_{x_k=a_k} = \left.\frac{\partial f}{\partial x_k}\right|_{\underline{x}=\underline{a}} = f'_{x_k}(\underline{a}) =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(a_1,\ldots,a_{k-1},a_k+h,a_{k+1},\ldots,a_m)-f(a_1,\ldots,a_k,\ldots,a_m)}{h}$$

(3) (D) Totális deriválhatóság:

$f:\ D\to\mathbb{R},\ \ D\subset\mathbb{R}^m,\ \ \underline{a}=(a_1,\ldots,a_m)\in \operatorname{int} D,\ \ \underline{h}=(h_1,\ldots,h_m),\ \ \underline{a}+\underline{h}\in D$

$f$ (totálisan) deriválható $\underline{a}$-ban, ha $\Delta f$ előállítható az alábbi alakban:

$$\Delta f = f(a_1+h_1,\ldots,a_m+h_m)-f(a_1,\ldots,a_m) = A_1h_1+\cdots+A_mh_m+\varepsilon_1h_1+\cdots+\varepsilon_mh_m$$

vagy vektorosan

$$\Delta f = f(\underline{a}+\underline{h})-f(\underline{a}) = \underline{A}\cdot\underline{h}+\overbrace{\underline{\varepsilon}(\underline{h})\cdot\underline{h}}^{o(\underline{h})}$$

ahol $\underline{A}=[A_1,\ldots,A_m]$ független $\underline{h}$-tól és $\underbrace{\underline{\varepsilon}(\underline{h})\to\underline{0},\text{ ha }\underline{h}\to\underline{0}.}_{\text{fontos!}}$

(T)

Ha $f$ az $\underline{a}$-ban totálisan deriválható $\Longrightarrow$ mindegyik változója szerinti parciális deriváltja $\exists$.

(Tehát a totális deriválhatóság szükséges feltétele a parciális deriváltak létezése.)

(B) Speciális $\underline{h}$-ra felírjuk a totális deriválhatóság definícióját: $\underline{h}:=(0,0,\ldots,0,h_k,0,\ldots,0)$

$$\Delta f = f(\underline{a}+\underline{h})-f(\underline{a}) = f(a_1,\ldots,a_{k-1},a_k+h_k,a_{k+1},\ldots,a_m)-f(a_1,\ldots,a_m) = \underline{A_k\cdot h_k+\varepsilon_k(\underline{h})\cdot h_k}$$

$$\Longrightarrow \frac{f(a_1,\ldots,a_k+h_k,\ldots,a_m)-f(a_1,\ldots,a_k,\ldots,a_m)}{h_k} = A_k+\varepsilon_k(\underline{h})$$

(2)

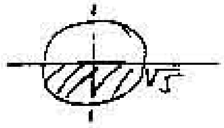
**6. feladat (11 pont)***

a) Írja le polárkoordinátákkal a $T: \quad x^2 + y^2 \le 5\,, \quad y \le 0$ tartományt!

b) $\iint\limits_T \mathrm{sh}\,(2x^2 + 2y^2)\;dx\,dy = ?\,,$ $\qquad T$ : az előző.

a.) $x = r\cos\varphi$ (2) $\quad 0 \le r \le \sqrt{5}$ (2)

$y = r\sin\varphi \quad \pi \le \varphi \le 2\pi$




b.) $\int\limits_0^{\sqrt{5}} \int\limits_{\pi}^{2\pi} \mathrm{sh}\,2r^2\; r\,d\varphi\,dr$ (2) $= (2\pi - \pi)$ (1) $\frac{1}{4}\int\limits_0^{\sqrt{5}} 4r\,\mathrm{sh}\,2r^2\,dr =$

$= \frac{\pi}{4}\,\mathrm{ch}\,2r^2\Big|_0^{\sqrt{5}}$ (3) $= \frac{\pi}{4}\left(\mathrm{ch}10 - \underbrace{\mathrm{ch}\,0}_{=1}\right)$ (1)

**7. feladat (10 pont)***

a) Milyen geometriai transzformációt létesít a $w = a\,z + b$ lineáris egész leképezés, ahol $a$ és $b$ adott komplex számok? Indokoljon!

b) Mibe viszi át az $\mathrm{Re}\,z < 0$ tartományt az alábbi függvény?

$$f(z) = (-1 - j)\,z + 2j$$

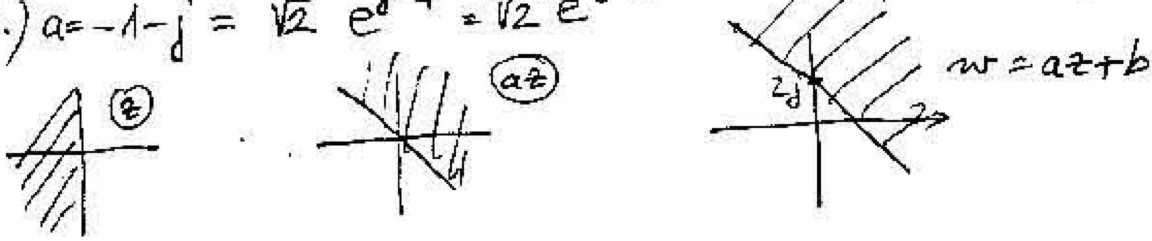
$\boxed{4}$ a.) $a = \rho_0 e^{j\varphi_0}$

$az : \rho_0 r e^{j(\varphi + \varphi_0)}$ : nyújtás (zsugorítás) ($\rho_0$-val) + forgatás (+) irányban $\varphi_0$-val

$+b$ : eltolás

Tehát a transzformáció az előbbiek szuperpozíciója, így hasonlósági transzformáció.

$\boxed{6}$ b.) $a = -1 - j = \sqrt{2}\,e^{j\frac{5\pi}{4}} = \sqrt{2}\,e^{-j\frac{3\pi}{4}}$




V1 02 06 2015.

**8. feladat (17 pont)***

$$f_1(z)=\frac{\sin 3z}{z-5j}, \qquad f_2(z)=5\,(1-\bar{z})$$

a) $\displaystyle\oint_{|z-1|=1} f_1(z)\,dz = ?$ b) $\displaystyle\oint_{|z-1|=10} f_1(z)\,dz = ?$ c) $\displaystyle\oint_{|z-1|=1} f_2(z)\,dz = ?$

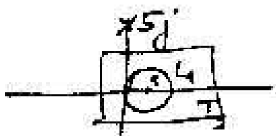
d) Definiálja a komplex vonalintegrál fogalmát!

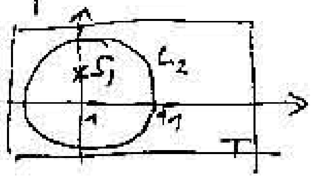
3

a) $f_1$ reg $T$ e.ö.f tartományon.

$\Rightarrow \displaystyle\oint_{|z-1|=1} f_1(z)\,dz = 0 = I_a$

Cauchy alaptétel miatt




b) $\displaystyle I_b = \oint_{L_2} \frac{\overbrace{\sin 3z}^{f \text{ reg}}}{z-5j}\,dz = 2\pi j \,\sin 3z\Big|_{z=5j} =$ 3

$= 2\pi j \,\sin 15j = 2\pi j\, j\, \mathrm{sh}\,15 = -2\pi\, \mathrm{sh}\,15$ 2 (Cauchy-féle integrálformula)

c) $z(t) = 1+\cos t + j\sin t$ 2 $t: 0 \to 2\pi$ 1

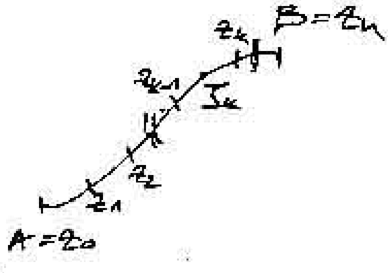
$z'(t) = -\sin t + j\cos t$

$\displaystyle I_c = \oint_{L_1} f_2(z)\,dz = \int_0^{2\pi} f_2(z(t))\, z'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} 5\big(1-(1+\cos t - j\sin t)\big)(-\sin t + j\cos t)\,dt$ 1

$\displaystyle = \int_0^{2\pi} -j\,dt = -j\,2\pi$ 2

3

d) $L \subset \mathbb{C}$ egyszerű, $f$ értelmezett $L$-en és $|f(z)|$ korlátos




$\displaystyle\int_L f(z)\,dz = \lim_{\Delta P_n \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1})$

$\uparrow$
m.h.t.f.f.s.

*Pótfeladat (csak az elégséges (és esetleg a közepes) vizsgához javítjuk ki):*

**9. feladat (10 pont)**

$$f(x,y,z) = x^2 y - 3y^2 + 2z^2\,, \qquad P_0(-2,0,3)$$

a) $\operatorname{grad} f|_{P_0} = ?$

b) Írja fel az $f$ függvény $P_0$ ponton áthaladó szintfelülete $P_0$ pontbeli érintősíkjának egyenletét!

c) $\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{P_0} = ?$, ha $\underline{e} \parallel -4\underline{i} + 3\underline{k}$

a.) $\operatorname{grad} f = [2xy\,,\ x^2-6y\,,\ 4z]$ $\exists$, mert a parc. deriváltak léteznek és folytonosak

$\operatorname{grad} f|_{P_0} = 4\underline{j} + 12\underline{k}$

b.) $\underline{n} \parallel \operatorname{grad} f|_{P_0} = 4\underline{j} + 12\underline{k}$ $\quad \underline{n} := \underline{j} + 3\underline{k}$

Érintősík: $\underline{n}\,(\underline{r} - \underline{r}_0) = 0$

$f'_x|_{P_0}(x-x_0) + f'_y|_{P_0}(y-y_0) + f'_z|_{P_0}(z-z_0) = 0$

$0 \quad + 1\cdot(y-0) + 3\,(z-3) = 0$

c.) $|-4\underline{i} + 3\underline{k}| = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

$\underline{e} = -\frac{4}{5}\underline{i} + \frac{3}{5}\underline{k}$

$\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{P_0} = \operatorname{grad} f|_{P_0} \cdot \underline{e} = (4\underline{j} + 12\underline{k})\left(-\frac{4}{5}\underline{i} + \frac{3}{5}\underline{k}\right) = 12\cdot\frac{3}{5} = \frac{36}{5}$