1	2	3	4	5	6	$\sum$

FMInf_AlkAlg 1. vizsga 22-01-04 **Neptun:** _____ **Név:** _____

*A vizsga feladatainak **eredményeit erre** az oldalra kell írni, a **mellékszámításokat a hátoldalra** és ha oda nem fér, külön lapra, melynek jobb felső sarkán legyen rajta a név és a Neptun-kód! A feladatok megoldásához semmilyen segédeszköz nem használható! Sikeres a vizsga ha az elért pontok száma legalább 8.*

1. *Igaz–Hamis I/H (5 pont – hibás válasz −0.5 pont)*

a) Ha $\mathcal{W} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$, akkor minden $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$ egyértelműen előáll egy $\mathcal{U}$- és egy $\mathcal{V}$-beli elem összegeként. I

b) Legyen $L : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ egy lineáris transzformáció. Ekkor $\mathbb{C}^n$ előállítható annyi invariáns altér direkt összegeként, ahány különböző sajátértéke van L-nek. I

c) Minden valós pozitív definit mátrixnak egyetlen négyzetgyöke van. de csak a pozitív definitek közt H

d) Ha két 5×5-ös mátrix mindegyikének $\{-1, 0, 1\}$ a spektruma, akkor kongruensek. ha a mltplctások is egyenlők H

e) Legyen $\mathcal{V}$ egy valós, véges dimenziós euklideszi tér, $L : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lineáris leképezés, és $\mathbf{b} \in \operatorname{Im} L$. Ekkor egyetlen olyan $\mathbf{x}$ vektor létezik, melyre $L\mathbf{x} = \mathbf{b}$ és $\mathbf{x} \perp \operatorname{Ker} L$. I

2. Válaszoljunk az alábbi kérdésre, illetve egészítsük ki a mondatot valamely tétel vagy definíció alapján! *(4 pont)*

a) Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer optimális megoldásain definíció szerint az

$\mathbf{Ax} = \operatorname{proj}_{\mathcal{O}(\mathbf{A})} \mathbf{b}$

egyenletrendszer megoldásait értjük, melyek megegyeznek az

$\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b}$

egyenletrendszer megoldásaival.

b) A lineáris $L : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ leképezés képterének és magterének dimenziója közt mi az összefüggés, ha $\dim \mathcal{V} = 2022$, $\dim \mathcal{W} = 42$?

$\dim \operatorname{Ker} L + \dim \operatorname{Im} L = 2022$

c) Számítsuk ki a $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix bal Perron-vektorát!

$(3/4, 1/4)$

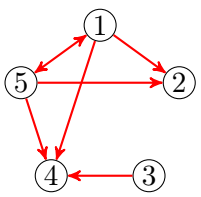
d) A pozitív $\mathbf{A}$ mátrixra és az $\mathbf{x} = (1, 2, 2)$, $\mathbf{y} = (3, 1, 1)$ vektorokra $\mathbf{Ax} = 3\mathbf{x}$, $\mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{A} = 3\mathbf{y}^\mathsf{T}$. Pusztán ezek alapján kiszámolható-e ki a következő határérték? Ha nem, röviden indokoljuk, ha igen, számítsuk ki.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3}\mathbf{A}\right)^n = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

ezek pozitív s.v.-ok, így 3 a spektrálsugár, és $\mathbf{p} = \mathbf{x}/5$, $\mathbf{q} = \mathbf{y}/5$

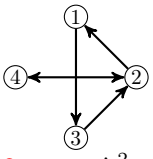
3. Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Kössünk össze minden olyan csúcspárt amelyekhez tartozó állítások közt implikáció ($\to$) vagy ekvivalencia ($\leftrightarrow$) van. *(2.5 pont)*

① $\mathbf{A}$ szimmetrikus
② $\mathbf{A}$ normális
③ $\mathbf{A}$ sajátértékei különbözőek
④ $\mathbf{A}$ diagonalizálható
⑤ $\mathbf{A}$ ortogonálisan diagonalizálható



4. Irreducibilis- és primitív-e az $\mathbf{A}$ mátrix? (a választ indokoljuk néhány szóban és/vagy egy alkalmas gráffal és/vagy mátrixszal) *(2.5 pont)*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



1. mo: Irreducibilis, mert erősen összefüggő a gráfja. Primitív is, mert $\mathbf{A}^6 > \mathbf{O}$ (a hatványozásban elég 0-1-ekkel számolni, vagy csak négyzetreemeléssel, úgy $\mathbf{A}^8 > \mathbf{O}$).

2. mo: $\mathbf{A}^2$ primitív, ui. 1-2-3-4-1 Hamilton-kör, és van hurokél, azaz pozitív elem a főátlóban, így $\mathbf{A}$ is primitív.

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. mo: $\mathbf{A}^6 > \mathbf{O}$, így primitív és akkor irreducibilis is.

4. mo: i-ből 2-be jutunk 0, 1 vagy 2 lépésben, 2-ben időzünk 2, 3, 4, 5 vagy 6 lépésben, onnan j-be 0, 1 vagy 2 lépésben, így bármely két pont közt van pontosan 6-hosszú út.

5. Határozzuk meg az $\mathbf{M}$ mátrix redukált szinguláris felbontását és pszeudoinverzét, ahol *(3 pont)*

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{U}_1\mathbf{\Sigma}_1\mathbf{V}_1^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \operatorname{diag}(2, \sqrt{2}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}^+ = \mathbf{V}_1 \operatorname{diag}(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{\sqrt{2}})\mathbf{U}_1^\mathsf{T} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

6. A 8×8-as $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei 6 és 0. Az $\mathbf{A} - 6\mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre 6, 4, 3, 3, míg $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = 7$, $\mathrm{r}(\mathbf{A}^2) = 6$, $\mathrm{r}(\mathbf{A}^3) = 5$. Írjuk fel $\mathbf{A}$ Jordan-féle normálalakját! *(3 pont)*

k	0	1	2	3	4
r_k	8	6	4	3	3
		2	2	1	0
			0	1	1

k	0	1	2	3
r_k	8	7	6	5
		1	1	1	0
			0	0	1

$$\left[\begin{array}{ccc|cc|ccc} 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$