előadás

2016. 02. 25.

Biomechanika

egyszerű szerkezetek : előző órán volt

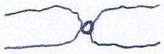
összetett szerkezetek : több test kényszerekkel összekapcsolva

- elsőfokú : rúd, kötél
- másodfokú : csukló
- harmadfokú : merev befogás ≈ mintha csak 1 test lenne

RÚD :

hatásvonala ismert
benne ébredő erő számolható

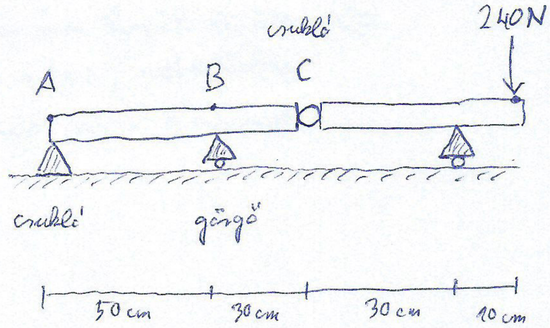
CSUKLÓ :



megoldás menete :

1) elkülönítés
2) egyensúlyi kijelentés testenként
3) egyenletek felírása, megoldása
4) eredményvázlat

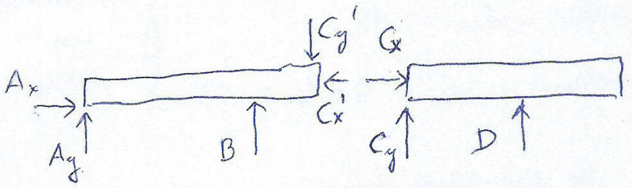
Pl.

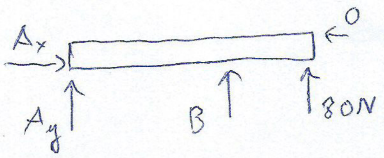


2) $(A, B, C') = 0$ első test
$(C, D, F) = 0$ második test

egyenletek száma = 6
ismeretlenek száma = 6 } nem biztos, hogy nincs megoldás

1)





3) ΣF_{ix} : $A_x = 0$

$\Sigma M_i^{(A)}$: $-80 \cdot 80 - B \cdot 50 = 0$

$B = -128\,N\ (\downarrow)$

$\Sigma M_i^{(B)}$: $-80 \cdot 30 + A_y \cdot 50 = 0$

$A_y = 48\,N\ (\uparrow)$

3) $\Sigma M_i^{(C)}$: $+240 \cdot 40 - D \cdot 30 = 0$

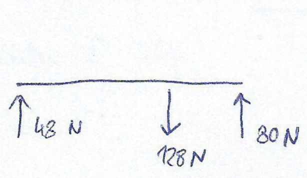
$D = 320\,N\ (\uparrow)$

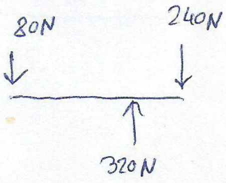
$\Sigma M_i^{(D)}$: $+240 \cdot 10 + C_y \cdot 30 = 0$

$C_y = -80\,N\ (\downarrow)$

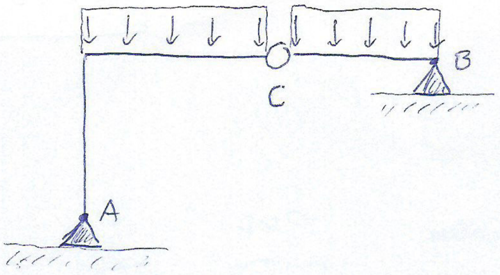
ΣF_{ix} : $C_x = 0$

4)

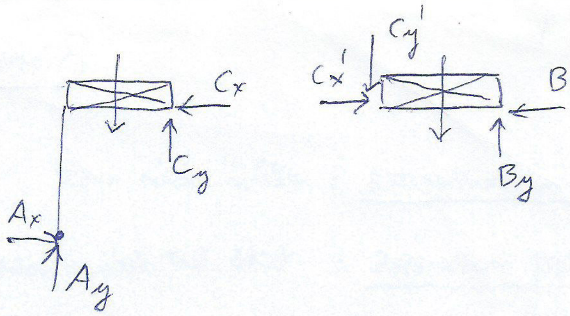




Pl.



1)



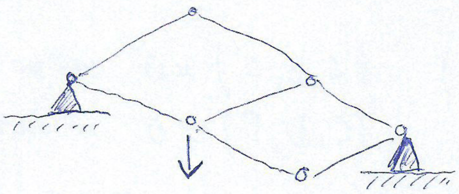
2) $\big((q_1), A, C\big) = 0$

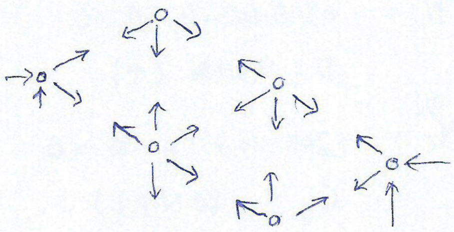
$\big((q_2), B, C\big) = 0$

RÁCSOS TARTÓ:

Pl. A rudak már csak egymáshoz kapcsolódnak: + testek is és megtámasztások is csak a rudakon lehetnek

⇒ elkülönítésnél már nincs mit elkülöníteni, csak a csomópontok maradnak a rá ható erőkkel





egyenletek száma: 12
ismeretlenek száma: 9 + 4 = 13 } statikailag nem határozott

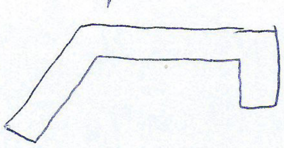
ha ismeretlenek száma > egyenletek száma, akkor <u>statikailag határozatlan</u>

<u>Térbeli szerkezetek:</u> testenként 6 független egyensúlyi egyenlet

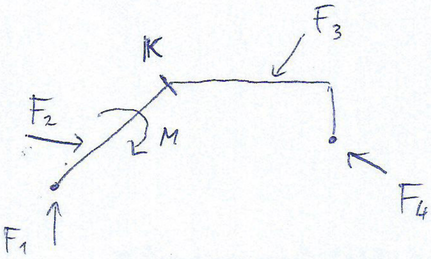
pl. 3 vetületi + 3 nyomatéki egyenlet

Igénybevételek: kiindulás: egyensúlyban lévő szerkezet

pl.:



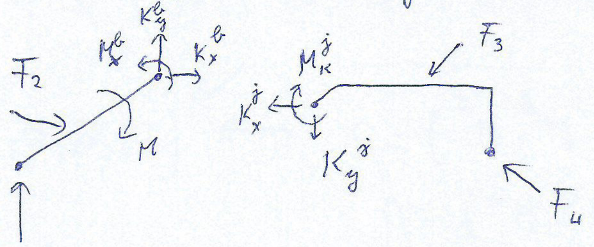
$\boxed{\text{Pl.}}$



Nem számít, hogy melyik erő volt ~~előre~~ eleve megadva, és melyiket számoltuk ki.

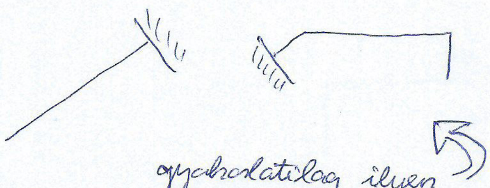
$$(F_1, F_2, F_3, F_4, M) = 0$$

K-nál elvágjuk, elkülönítjük a szerkezetet:



b = bal
j = jobb

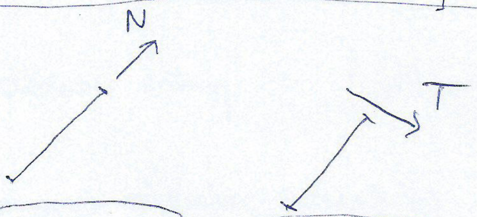
$$(F_1, F_2, M, K^b, M_K^b) = 0 \qquad (F_3, F_4, K^j, M_K^j) = 0$$



gyakorlatilag ilyen

[K^b, M_K^b, K^j, M_K^j K keresztmetszet belső erői]

K erők komponensei:

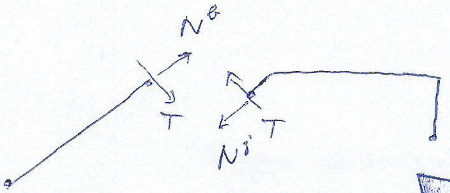


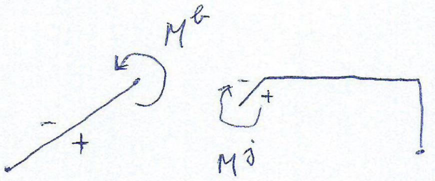
tengelyirányú: N = normál erő

⊕, ha húzóerő (kifelé mutat a keresztmetszetből)

merőleges: T = nyíróerő

⊕, ha az óramutató járásával megegyező irányban elforgatjuk az N-et, akkor ⊕ nyíróerőt kapunk.





belső nyomaték: hajlító nyomaték

normál erő
nyíró erő
hajlítónyomaték
} a belső reakciókat meghatározhatjuk erőkből

bal oldali test:

$$(F_1, F_2, M, N^b, T^b, M^b) = 0$$

jobb oldali test:

$$(F_3, F_4, N^j, T^j, M^j) = 0$$

+

$$(F_1, F_2, F_3, F_4, N^b, N^j, T^b, T^j, M^b, M^j) = 0$$

Ha elvesszük belőle egy egyensúlyi erőrendszert, akkor a maradék továbbra is egyensúlyban lesz. Vegyük el a külső erőket! $\Rightarrow (N^b, T^b, M^b, N^j, T^j, M^j) = 0$

$\Rightarrow$ $N^b = N^j$, $T^b = T^j$, $M^b = M^j$ } (csak a nagysága) a számításoknál azonosnak kell tekintük $\Rightarrow$ hozzárendelhető a keresztmetszethez: N_K, T_K, M_K

$$N^b = N^j := N_K$$
$$T^b = T^j := T_K$$
$$M^b = M^j := M_K$$

a K keresztmetszet **igénybevételei!**

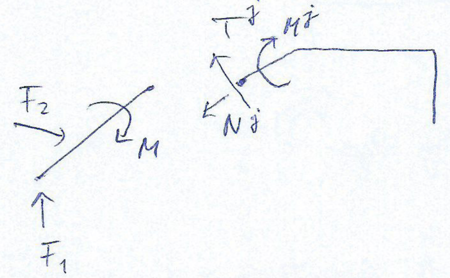
$$(N^b, T^b, M^b) = (-N^j, -T^j, -M^j)$$

a bal oldali komponenseket kifejezhetjük a jobb oldaliakkal

$$(F_1, F_2, M, N^b, T^b, M^b) = 0 \longrightarrow (F_1, F_2, M, -N^j, -T^j, -M^j) = 0$$
$$(F_3, F_4, N^j, T^j, M^j) = 0$$

$$(F_1, F_2, M) \doteq (N^j, T^j, M^j)$$

jobb ~~[illegible]~~ oldali rész igénybevétele egyenlő az összes ~~[illegible]~~ bal oldali részre ható külső erővel

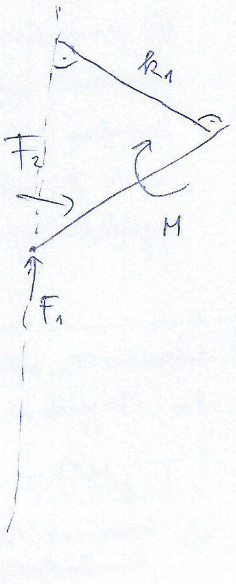


(F_K, M_K) : pontra redukáltuk az erőket és nyomatékokat

az igénybevétel-számítást visszavezethetjük egy erőrendszer pontra redukálására

---

N^j irányába vesszük fel ~~az erőket~~ a ⊕ irányt $\rightarrow$



$$\sum_{\swarrow N^j} F_i : F_{1n} + F_{2n} = +N$$

normál irányú erő

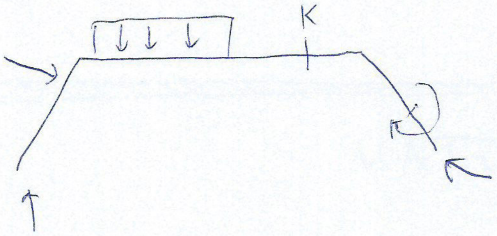
$$\sum_{\uparrow T^j} F_i : F_{1t} + F_{2t} = +T$$

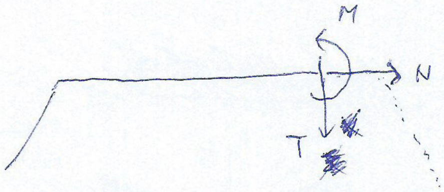
$$\sum M_i^{(K)} : +F_1 \cdot k_1 - F_2 \cdot k_2 + M = +M_K$$

erő · erőkar

előadás | # Biomechanika | 2016. 03. 03.

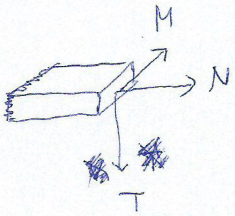
Igénybevételek:





normálerő (N)
nyíróerő ~~(T)~~ ~~(V)~~ (T)
hajlítónyomaték (M)

térben:



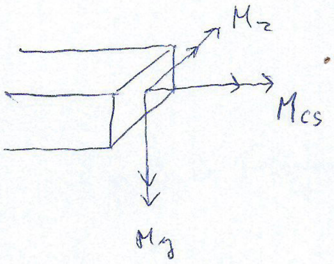
(térben T helyett szokás V-t írni)
balsodrású rendszer (T, N, M)
vagy jobbsodrású (M, N, T)

- egyensúlyi szerkezet
- amit elvágunk egy keresztmetszetben
- a keresztmetszetbe kell redukálni az egyik tartórészre ható erőket
- erő felbontása: normálerőre, nyíróerő(k)re (2 komponens), hajlítónyomaték(ok)

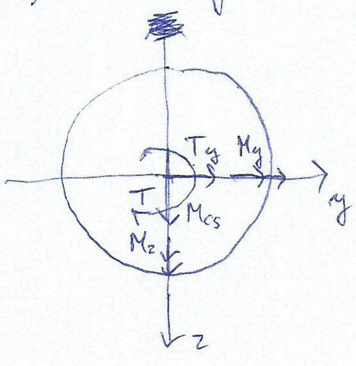
~~csavarónyomaték~~

~~hajlító~~

- M_z
- M_y
- M_{cs} (csavaró nyomaték)

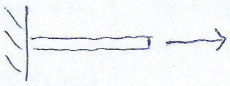


M_{cs}: csavaró nyomaték:

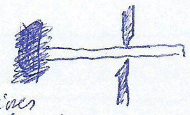


Egyszerű igénybevételek:

– központos húzás (nyomás)



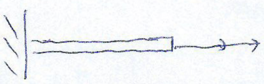
– tiszta nyírás



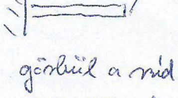
nincs befogva!

pl. olló

– egyszerű csavarás



– hajlítás: – egyenes
– ferde



görbül a rúd
alakváltozás

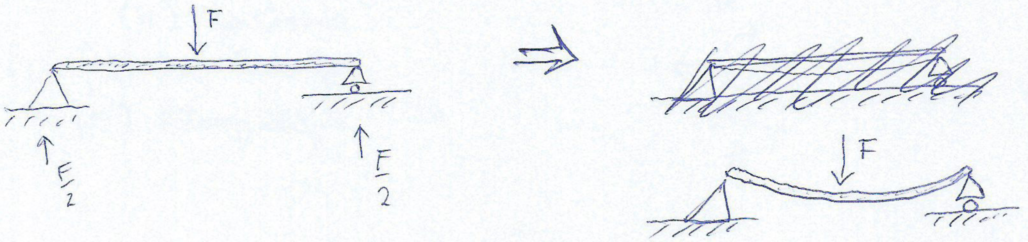
ha az a két hajlítónyomaték szögét adja le, akkor ferde hajlítás

Összetett igénybevételek:

- külpontos húzás (normálerő + hajlítónyomaték)
- hajlítással egyidejű húzás

SZILÁRDSÁGTAN

Az anyag korlátozott alakváltozásra képes test.



Amit statikában kiszámoltunk, az most is érvényes.

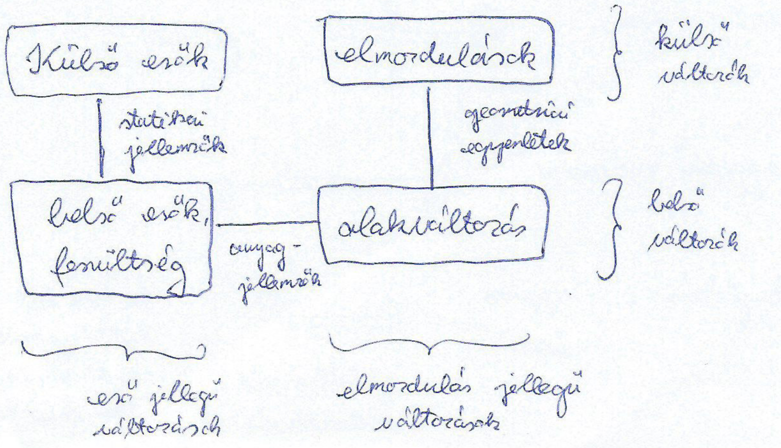
Háromféle erő:
- feszültségek
- alakváltozás
- elmozdulás (az előzőekből számolva, itt is lesznek korlátok)

Feladatok:
- szilárdsági követelmény (ne törjön / szakadjon el)
- merevségi követelmény
- stabilitási követelmények (kitérítjük az egyensúlyból)

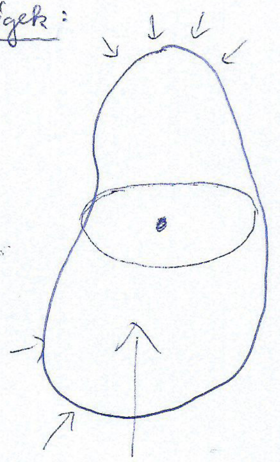
folytonos anyag:

[a bekeretezettekkel számolunk csak!]

- $\boxed{\text{homogén}}$ / inhomogén anyag
- $\boxed{\text{izotróp}}$ / anizotróp (irányfüggő)
- $\boxed{\text{időfüggetlen}}$ / időfüggő (terhelés sebességétől is függ)
- hőmérsékletfüggő / $\boxed{\text{hőmérsékletfüggetlen}}$
- terheléstörténet (nem nyeri vissza az eredeti alakját, fáradás)
- egyéb $\boxed{\text{terheléstörténet-független}}$

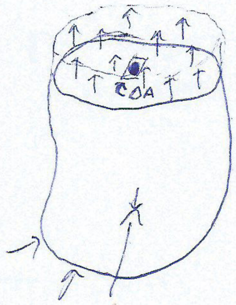


Feszültségek:



(a felső részben is fellépnek erők, csak másik irányban)

vágjuk két részre $\longrightarrow$

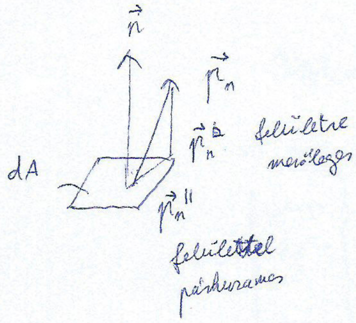


– síkfelületből áll a kiválasztott pont, ennek a felülete legyen ΔA

– a kiválasztott pontban a rögzített normálissal ΔA felületre ható erők eredője legyen $\Delta \vec{Q}$

– a feszültségvektor $\vec{p}_{\vec{n}} = \lim\limits_{\Delta A \to 0} \dfrac{\Delta \vec{Q}}{\Delta A}$

[$\vec{n}$: a kiválasztott normális]



A felületre merőleges komponens ($\vec{p}_{\vec{n}}^{\perp}$) a normálfeszültség.

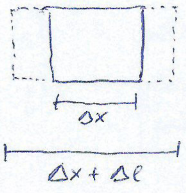
$$\sigma_n = \vec{n}^T \cdot \vec{p}_n \quad ; \quad \begin{array}{ll} \text{ha } \sigma > 0 & \text{húzófeszültség} \\ \text{ha } \sigma < 0 & \text{nyomófeszültség} \end{array}$$

A felülettel párhuzamos komponens ($\vec{p}_{\vec{n}}^{\parallel}$) a nyírófeszültség.

$$\tau_n = \sqrt{|\vec{p}_n|^2 - \sigma_n^2}$$

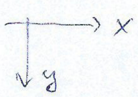
τ_{nt} : n normálú síkban t ???

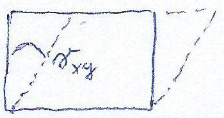
Alakváltozás:



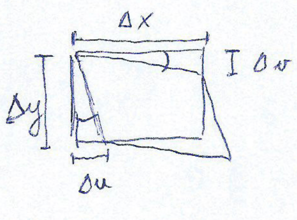
fajlagos nyúlás : $\varepsilon = \dfrac{\Delta l}{\Delta x}$

[$\Delta l << \Delta x$ ezért nem $(\Delta x + \Delta l)$-lel osztjuk el]





~~fajlagos~~ szögtorzulás : $\gamma_{xy} = \dfrac{\Delta u}{\Delta y} + \dfrac{\Delta v}{\Delta x}$



[$\Delta u, \Delta v << \Delta x, \Delta y$, ezért a szöget a ~~tangensével~~ tangensét közelítjük]

$\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$, ha $\alpha << 1$

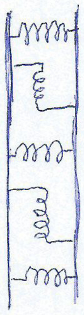
Anyagegyenlet: lineárisan rugalmas anyag

Hooke-törvény: $\sigma = \varepsilon E$; $\tau = \gamma \cdot G$

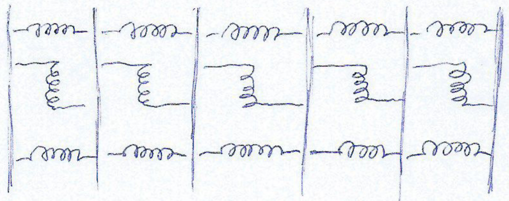
$$\begin{bmatrix} E = \text{rugalmassági (Young)-modulusz} \\ G = \text{nyírási modulusz} \end{bmatrix}$$

rúdmodell:

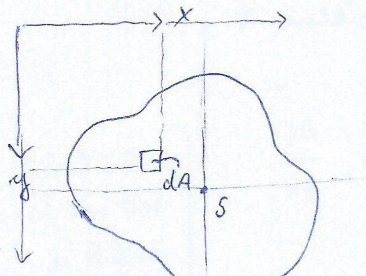
- sík keresztmetszetek elve: az eredeti sík keresztmetszetek síkok maradnak és az eredeti alakkal egybevágóak
- az anyag a szomszédos keresztmetszetek közötti rugókkal jellemezhető



a teljes modell kb. így néz ki:



A rudak keresztmetszeti jellemzői (kiegészítő rész)



egy általános keresztmetszet

$$A = \int_A dA \quad (\text{terület})$$

síkidom elsőrendű nyomatéka: $S_x = \int_A y \cdot dA$

$S_y = \int_A x \cdot dA$

$$\begin{bmatrix} x = x \text{ tengelytől való távolság} \\ y = y \text{ tengelytől való távolság} \end{bmatrix}$$

Súlypont: $S_{x_s} = 0$; $S_{y_s} = 0$; $x_s = \frac{S_y}{A}$; $y_s = \frac{S_x}{A}$

Síkidom másodrendű nyomatékai: (I = inercia)

$$I_x = \int_A y^2 \, dA > 0$$

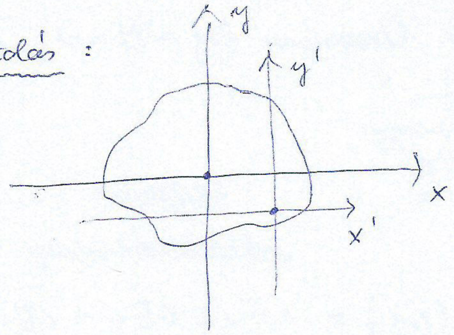
$$I_y = \int_A x^2 \, dA > 0$$

centrifugális nyomaték: $I_{xy} := C_{xy} = \int_A x \cdot y \, dA$

$C_{xy} \lesseqgtr 0$

Koordináta-rendszer transzformációja:

1) eltolás:

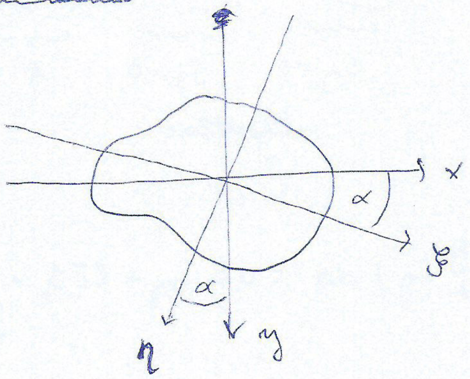


ha ismerjük J_x, J_y, C_{xy} értékeit, akkor x', y' koordináta-rendszerben

$$\left.\begin{aligned} J_x' &= J_x + A\cdot a^2 = \int_A (y')^2\, dA \\ J_y' &= J_y + A\cdot b^2 \\ C_{x'y'} &= C_{xy} + A\cdot ab \end{aligned}\right\}\ \text{Steiner-tétel}$$

(A súlypontban a legkisebb az inercia, ettől távolodva egyre nagyobb lesz.)

2) elforgatás:



adott: I_x, I_y, C_{xy}

keressük: I_ξ, I_η, $C_{\xi\eta}$

$$I_\xi = \int_A \eta^2\, dA \; ; \quad I_\eta = \int_A \xi^2\, dA \; ; \quad C_{\xi\eta} = \int_A \xi\eta\, dA$$

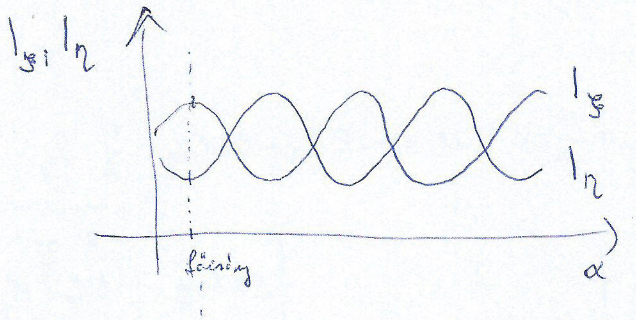
$$\xi = x\cos\alpha + y\sin\alpha$$

$$\eta = -x\sin\alpha + y\cos\alpha$$

$$I_\eta = \int_A \left(x^2\cos^2\alpha + 2xy\cos\alpha\sin\alpha + y^2\sin^2\alpha\right) dA$$

$$= \cos^2\alpha\cdot I_y + \sin(2\alpha)\cdot C_{xy} + \sin^2\alpha\cdot I_x$$

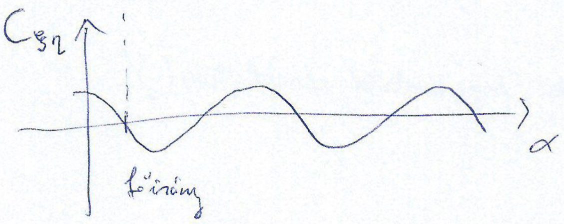
$I_\eta(\alpha)$: 180°-onként periodikus



I_ξ és I_η szélsőértékei a főinerciák: $I_1 \geq I_2$; iránya a tehetetlenségi főirány.

$C_{\xi\eta}$ is 180°-onként periodikus, harmonikusan változik (konstans eltolás nélkül), vannak zérushelyei.

~~A zérushelyeinek~~ A zérushelyek a tehetetlenségi főirány.

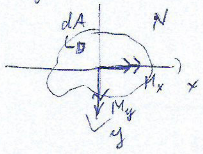


$C_{12} = 0$ (főirányban 0 az értéke).

Normálfeszültségek számítása : - normálerőből + kétirányú hajlításból számoljuk

- sík keresztmetszetek miatt keresztmetszeten belül a nyúlás lineárisan fog változni

$$\varepsilon(x,y) = ax + by + c \quad (\text{sík megadása})$$



- anyagegyenlet : Hooke-törvény : $\sigma(x,y) = E\cdot\varepsilon(x,y) = \underbrace{aE}_{\text{konstans}}x + \underbrace{bE}_{\text{konstans}}y + \underbrace{cE}_{\text{konstans}}$

$$(\sigma) = (N_x, M_x, M_y)$$

$$\Sigma F_{iz}: \quad N = \int_A \sigma\, dA = \int_A (aEx + bEy + cE)\, dA = aE\underbrace{\int_A x\, dA}_{S_y = 0} + bE\underbrace{\int_A y\, dA}_{S_x = 0} + cE\underbrace{\int_A dA}_{A} = cEA$$

súlypontban

$$\Rightarrow \boxed{N = cEA \qquad c = \frac{N}{EA}\ ; \quad cE = \frac{N}{A}}$$

$$\Sigma M_x: \quad M_x = +\int_A y\sigma\, dA = \int_A \left(aExy + bEy^2 + \frac{N}{A}\cdot y\right) dA = aEC_{xy} + bEI_x + \underbrace{\frac{N}{A}\cdot S_x}_{0}$$

óramutatóval megegyező irányba forgat

$$\Sigma M_y: \quad M_y = -\int_A x\sigma\, dA = \int_A -\left(aEx^2 + bExy + \frac{N}{A}\cdot x\right) dA = -aEI_y - bEC_{xy} - \underbrace{\frac{N}{A}\cdot S_y}_{0}$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EC_{xy} & EI_x \\ -EI_y & -EC_{xy} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{E^2(-C_{xy}^2 + I_x I_y)}}_{\text{determináns}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} -EC_{xy} & -EI_x \\ EI_y & EC_{xy} \end{bmatrix}}_{\text{inverz mátrix}} \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{E} \cdot \frac{C_{xy} M_x + I_x M_y}{I_x I_y - C_{xy}^2}.$$

/ lehet, hogy valahol elrontottuk! /

$$b = \frac{1}{E} \cdot \frac{-I_y M_x - C_{xy} M_y}{I_x I_y - C_{xy}}$$

$$\boxed{\sigma = \frac{C_{xy} M_x + I_x M_y}{I_x I_y - C^2_{xy}} \cdot x + \frac{-I_y M_x - C_{xy} M_y}{I_x I_y - C_{xy}} \cdot y + \frac{N}{A}}$$

$\sigma(x,y)$

speciális eset:

- központos húzás-nyomás: $M_x = M_y = 0$ (csak 1 erőnk van)

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad \text{(normálfeszültség)}$$

$$\varepsilon = \frac{N}{E \cdot A} \quad \text{(konstans)}$$

l hosszúságú rúd megnyúlása: $\Delta l = \int_l \varepsilon \, dl = \int_l \frac{N}{E \cdot A} \, dl = \frac{Nl}{EA}$

- ha $N = 0$ (normálerő): $\varepsilon(x,y)$-ban x, y együtthatói $\approx \kappa_y, \kappa_x$ görbületek (nem teljesen matematikai értelemben)

azt az u tengelyt, ahol $\sigma(x,y) = 0$, azt semleges tengelynek nevezzük.

- ha $N = 0$ ÉS x, y tengely tehetetlenségi főirány:

$$\sigma(x,y) = \frac{M_y}{I_y} \cdot x - \frac{M_x}{I_x} \cdot y$$

a semleges tengely helyzete könnyen felírható: $0 = \frac{M_y}{I_y} \cdot x - \frac{M_x}{I_x} \cdot y \Rightarrow y = \left(\frac{I_x}{I_y} \cdot \frac{M_y}{M_x} \right) \cdot x$

$$\left[\frac{M_y}{M_x} = \operatorname{tg} \alpha \; ; \; \frac{I_x}{I_y} \cdot \frac{M_y}{M_x} = \operatorname{tg} \beta \right]$$

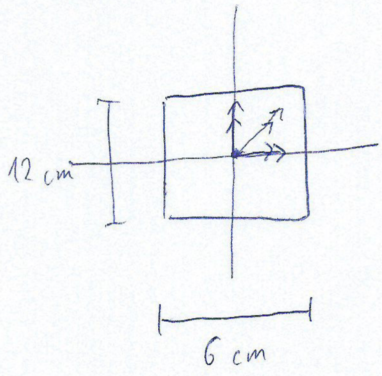
α és β csak szögek, semmi extra jelentés

ha a semleges tengely párhuzamos a hajlítónyomatékkal, akkor egyenes hajlítás, vagy $M \parallel$ tehetetlenségi főirány

ha $M \nparallel$ tehetetlenségi főirány, akkor ferde hajlítás

$M_y = 0$; $M_x = 0$; szimmetrikus keresztmetszet ⇒ ebben a 3 esetben ?

Pl. Feszültségek számolása keresztmetszeten belül.



$$\left.\begin{array}{l} |M_x| = 1200 \text{ kNcm} \\ |M_y| = 600 \text{ kNcm} \\ N = 60 \text{ kN} \end{array}\right\} \sigma = ? \; (\sigma_{max}, \sigma_{min})$$

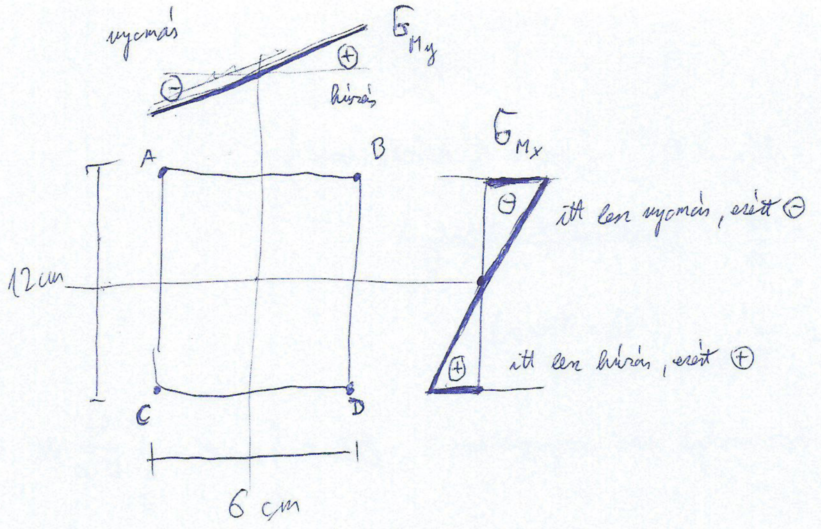
$$I_x = \frac{6 \cdot 12^3}{12} = 864 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{12 \cdot 6^3}{12} = 216 \text{ cm}^4$$

$$A = 6 \cdot 12 = 72 \text{ cm}^2$$

$$\sigma(x,y) = \pm \left| \frac{M_y}{I_y} \right| x \pm \left| \frac{M_x}{I_x} \right| y + \frac{N}{A}$$

szemléletből fogjuk meghatározni az irányát



normálfeszültség

Tengelytől vett távolság

$$\sigma_A = -\frac{600}{216}\cdot 3 - \frac{M_y}{I_x}\cdot 6 + \frac{60}{72}$$

$$\sigma_A = -\frac{1800}{216} - \frac{1200}{864}\cdot 6 + \frac{60}{72}$$

$$\sigma_A = -\frac{600}{72} - \frac{1200}{144} + \frac{60}{72} \cong -15{,}8$$

$$\sigma_A \approx -15{,}8\ \frac{kN}{cm^2}$$

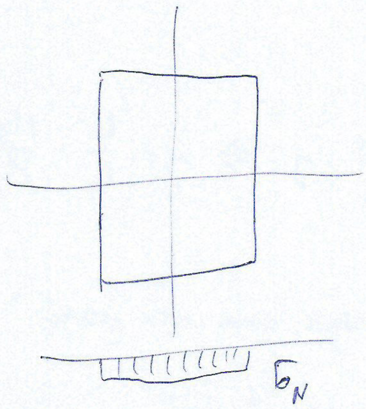
$$\sigma_B = +\frac{600}{216}\cdot 3 - \frac{1200}{864}\cdot 6 + \frac{60}{72} = +0{,}833\ \frac{kN}{cm^2}$$

$$\sigma_{max} = \sigma_D = +\frac{600}{216}\cdot 3 + \frac{1200}{864}\cdot 6 + \frac{60}{72} = +17{,}5\ \frac{kN}{cm^2}$$

???

$$I_x = \int y^2\, dA = \int_{-6}^{+6} y^2 \cdot 6\, dy = 6\cdot\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-6}^{+6} = \frac{1}{12}$$

???

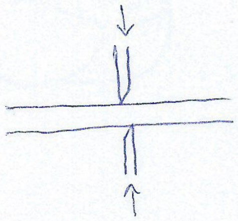


Biomechanika

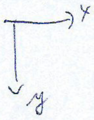
2016.03.10.

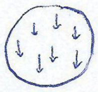
Nyírófeszültségek:

1.) tiszta nyírás:



T dy



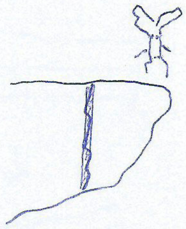


egyenletesen eloszló erőként terjed tovább

$$\tau_{xy} = \frac{T}{A}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

szögtorzulás — nyírási modulus

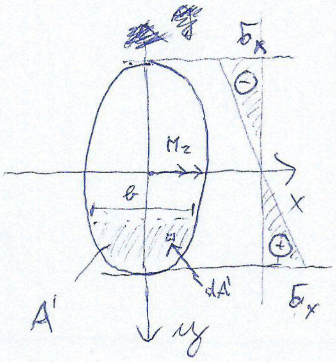


kengyelfutó gyalogkakukk

2.) hajlítással egyidejű nyírás:

$$\frac{dM}{dx} = T \ (\pm)$$

a nyomaték változása a nyíróerővel arányos



y-ra szimmetrikus

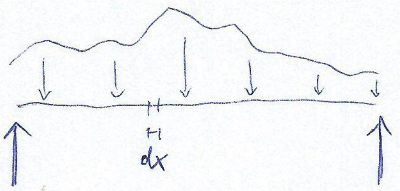
M_z ezért tehetetlenségi főirány

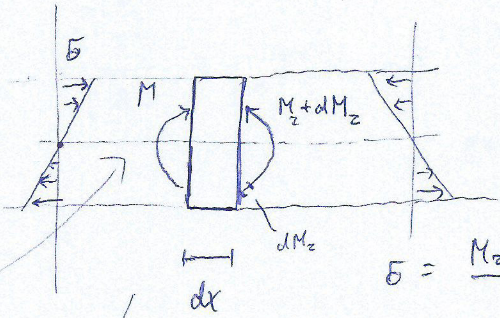
(M_z hajlítónyomaték)

M_z egyenes hajlítás lesz

$$\sigma_x = (\pm)\frac{M_z}{J_z} \cdot y$$

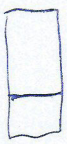
húzófeszültség (σ)



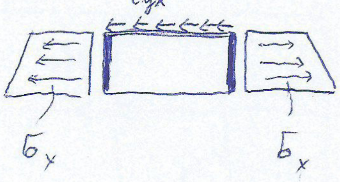


$$\sigma = \frac{M_z + dM_z}{J_z} y$$

elvágjuk a keresztmetszetet:



x: feszültség iránya



dM_z nem függ y helyzettől mert keresztmetszeti jellemző

J_z sem függ y-tól —||—

$$\Sigma F_{ix}: \underbrace{-\int_{A'} \frac{M_z}{J_z} y \cdot dA}_{\text{balra mutató erő}} + \underbrace{\int_{A} \frac{M_z + dM_z}{J_z} dA}_{\text{jobbra —||—}} - \tau_{yx} \cdot b \, dx = 0$$

$$\Sigma F_{ix}: \int_{A'} \frac{dM_z}{J_z} y \, dA = \tau_{yx} \cdot b \cdot dx$$

$$\frac{dM_z}{J_z} \cdot \underbrace{\int_{A'} y \, dA}_{S_z'} = \tau_{yx} \cdot b \cdot dx$$

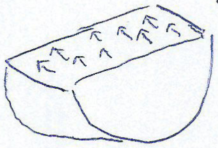
statikai nyomaték

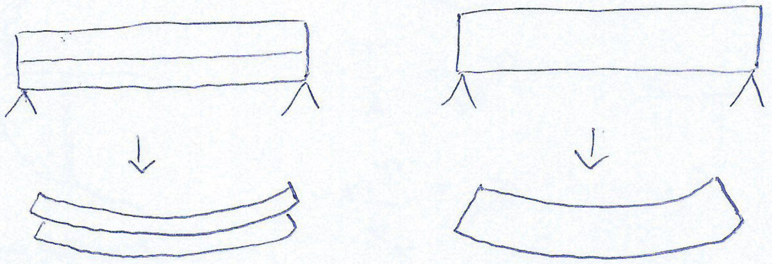
(S_z : egész keresztmetszetre
S_z' : nem az egész keresztmetszetre)

$$\tau_{yx} = \frac{S_z' \cdot \frac{dM_z}{dx}}{b \cdot I_z} = \frac{S_z \cdot T_y}{b \cdot I_z}$$

„ez a satöbbi képlet"

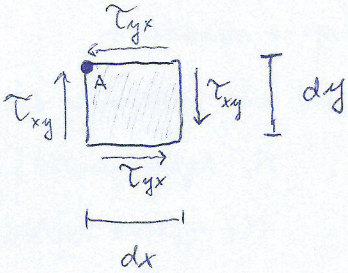
τ_{xy} nyírófeszültség





az anyagi folytonosság biztosítja, hogy ne tudjanak elcsúszni egymáson

Reciprocitás tétele:



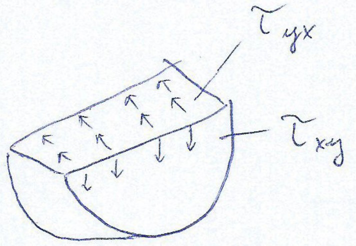
~~x-y irányú~~

pontra felírt nyomatéki egyenlet:

$$\Sigma M_i^{(A)}: \quad +\left(\overbrace{\tau_{xy} \cdot \cancel{dy} \cdot \cancel{dz}}^{\text{erő}}\right) \underbrace{dx}_{} - \left(\tau_{yx} \cdot \cancel{dx} \cdot \cancel{dz}\right) \cdot \overbrace{\cancel{dy}}^{\text{erőkar}} = 0$$

$$\Rightarrow \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

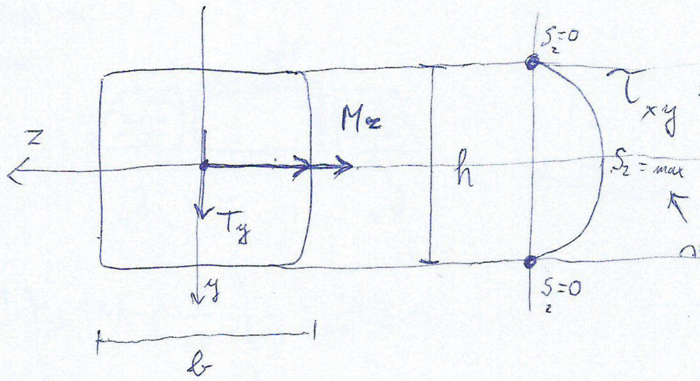
bármilyen két, egymásra merőleges tengelyre igaz



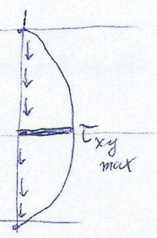
$$\tau_{xy} = \frac{S_z' T_y}{b\, I_z}$$

Zsuravszkij-képlet

statikai nyomaték



$$\tau_{xy} = \frac{S_z' \cdot T_y}{b \cdot I_z}$$



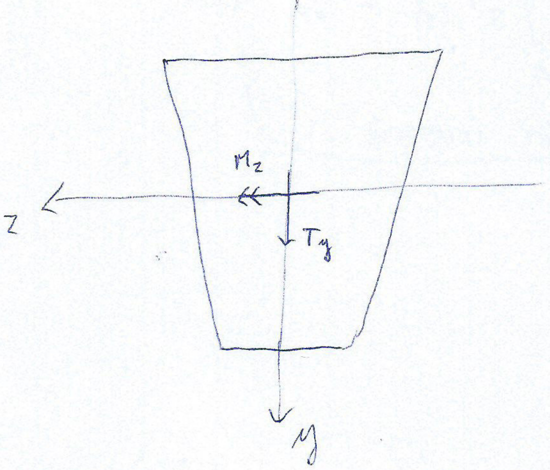
súlypontnál van maximuma

hogyan változik S_z attól függően, hogy a keresztmetszetet hol vágjuk el?

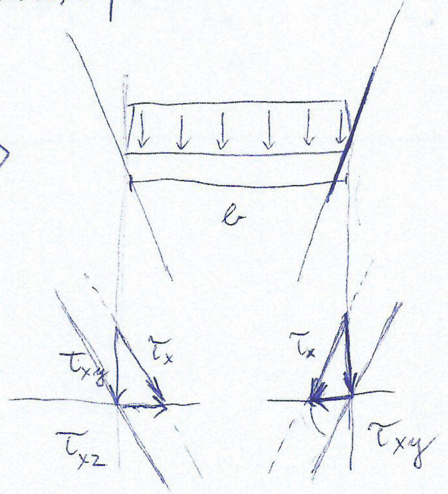
$$\tau_{xy} = \frac{S_z' \cdot T_y}{b \cdot I_z} \qquad S_z' = \frac{bh}{2} \cdot \frac{h}{4} = \frac{bh^2}{8}$$

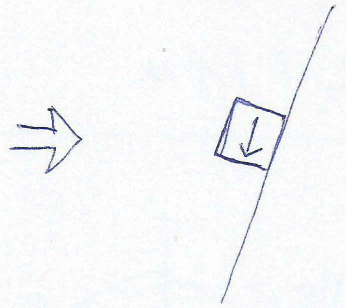
$$I_z = \frac{b \cdot h^3}{12} \quad \rightarrow \quad \tau_{xy} = \frac{\frac{bh^2}{8} \cdot T_y}{b \cdot \frac{bh^3}{12}} = \frac{3}{2} \frac{T_y}{bh}$$

ezért van jelentősége a Zsuravszkij-tételnek...

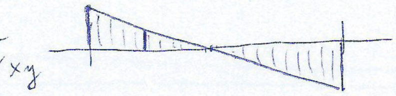


szimmetrikus trapéz





nyírófeszültség || felület

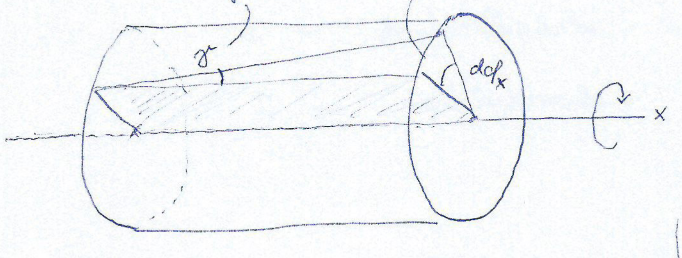


bármelyik közbenső τ_x mindig egy pontba mutat :

a megfogások ~~[illegible]~~ metszéspontjába

Csavarás :

kör (vagy körgyűrű) keresztmetszet csavarása



csak ezen a tengelyen fog elfordulni

$\boxed{\gamma \text{ szögtorzulás kicsi } \approx tg\,\gamma}$

$\boxed{d\varphi_x \text{ elfordulás a kezdethez képest}}$

$\boxed{de = r \cdot d\varphi_x}$

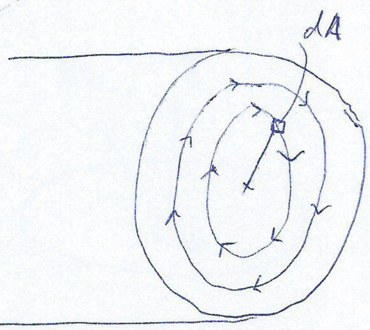
3 egyenlet írható fel : (S), (A), (G) – egyensúlyi egyenlet

(S) keresztmetszeti, (A) anyagegyenlet

– keresztmetszet alakváltozása = fajlagos elcsavarodás : kappa $\kappa_x = \dfrac{d\varphi_x}{dx}$

$$\gamma_{xt} = \frac{de}{dx} = (\gamma_{xt}) = \frac{r \cdot d\varphi_x}{dx} = r \cdot \kappa_x$$

– anyagegyenlet (Hook-törvény) : $\tau = G \cdot \gamma = G \cdot r \cdot \kappa_x$



– egyensúlyi egyenlet : $\Sigma M_{ix} : M_{cs} = \int_A r \cdot \tau_{xt} \cdot dA$

$$= \int_A r \cdot r \cdot G \cdot \kappa_x \cdot dA$$

$$= \kappa_x \cdot G \cdot \int_A r^2 \, dA$$

„poláris inercia”

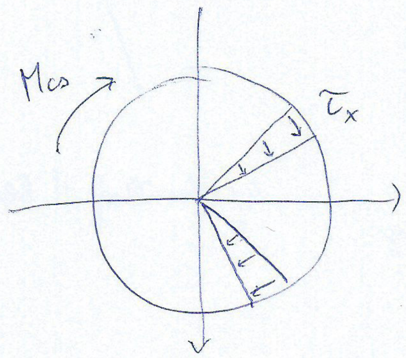
$$\kappa_x = \frac{M_{cs}}{G I_0}$$

I_0 : poláris tehetetlenségi nyomaték – keresztmetszeti jellemző

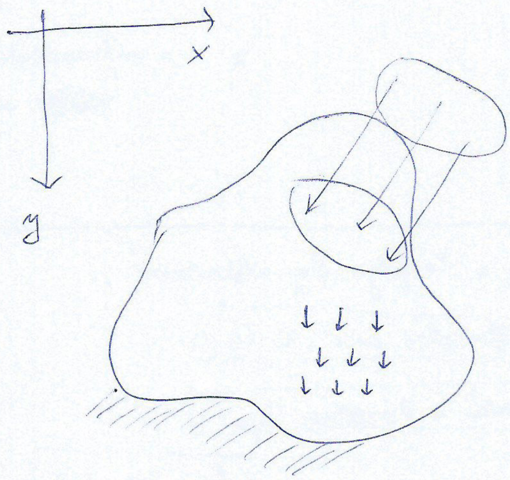
$$I_y = \int z^2\,dA \qquad I_y + I_z = \int_A (y^2+z^2)\,dA = \int_A r^2\,dA = I_0$$

$$I_z = \int y^2\,dA$$

POLÁRIS INNERCIA



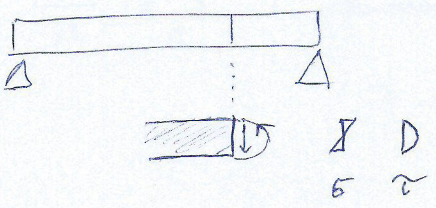
Általános rugalmasságtan:

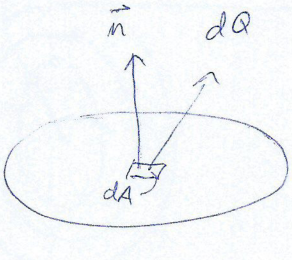


- külső erők (terhek) – K
- belső erők (feszültségek) – B
- alakváltozások – A
- elmozdulások – E

$$\begin{tikzcd} K \arrow[d, dash, "S"] & E \arrow[d, dash, "G"'] \\ B \arrow[r, dash, "A"'] & A \end{tikzcd}$$

Feszültségek:





$$\vec{p}_n = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A} = \frac{dQ}{dA} \qquad \left(\begin{matrix} \vec{\sigma}_n \parallel \vec{n} \\ \vec{\tau}_n \perp \vec{n} \end{matrix} \right)$$

$$\vec{p}_n = \vec{\sigma}_n + \vec{\tau}_n$$

$$\vec{\sigma}_n = (\vec{n}^T \cdot \vec{p}_n) \cdot \vec{n} \quad \text{irányfüggő}$$

$$\vec{\tau}_n = p_n - (n^T \cdot \vec{p}_n) \cdot \vec{n}$$

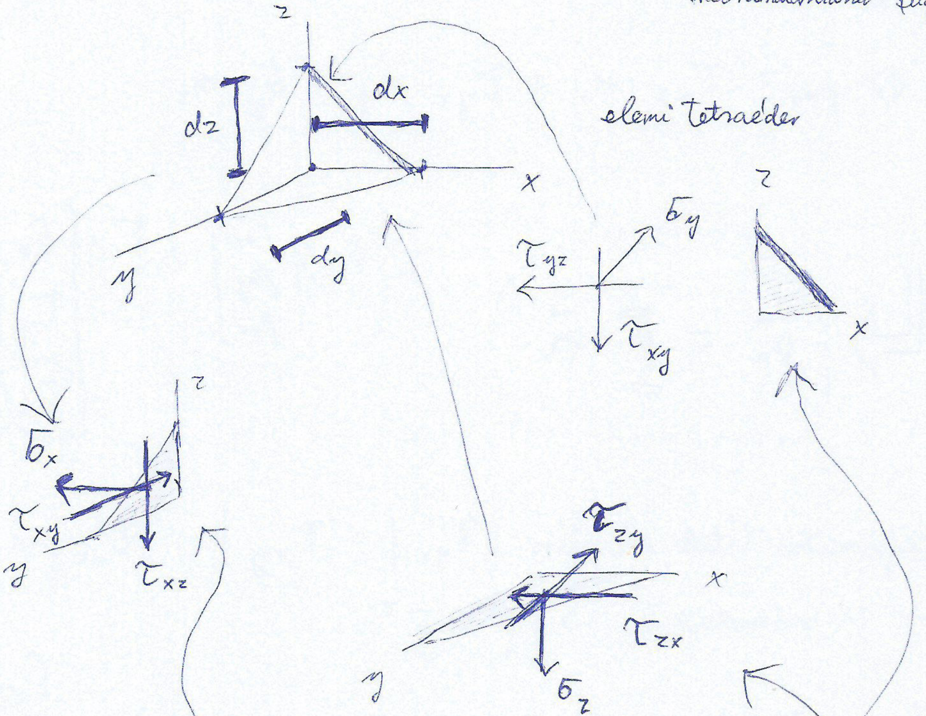
pont feszültségállapota = összes lehetséges irányhoz tartozó feszültségvektor

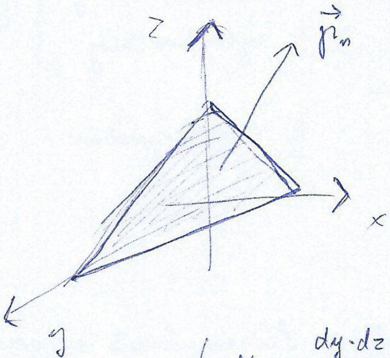
feszültségtenzor = feszültségállapot jellemzője (lineáris leképezés) — 3×3 méretű mátrix

koordinátarendszer-független

$$\vec{p}_n = \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n}$$

feszültségmátrix





$$\left(dA = \frac{dy \cdot dz}{2} \right)$$

$$\Sigma F_{ix}: \underbrace{\vec{p}_{nx} \cdot dA}_{\text{első oldal}} - \sigma_x dA_x - \underbrace{\tau_{yx} \cdot dA_y}_{\text{hátsó oldal}} - \underbrace{\tau_{zx} \cdot dA_z}_{\text{alsó oldal}} = 0$$

$$\Sigma F_{iy}: \vec{p}_{ny} \cdot dA - \tau_{xy} \cdot dA_x - \sigma_y \cdot dA_y - \tau_{zy} \cdot dA_z = 0$$

$$\Sigma F_{iz}: \vec{p}_{nz} \cdot dA - \tau_{xz} \cdot dA_z - \cancel{\sigma}\, \tau_{yz} \cdot dA_y - \sigma_z \cdot dA_z = 0$$

ismeretlen

szeretnénk meghatározni

— JELÖLÉSEK —

τ_{yx} : y normálisú síkon fellépő feszültség (nyírófeszültség)

x irányú erő

σ_x : x irányú erő

Egyenletrendszer megoldása : mindent leosztjuk dA-val

$$n = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{bmatrix} = \frac{1}{dA} \begin{bmatrix} dA_x \\ dA_y \\ dA_z \end{bmatrix}$$

- legyen „α" a „dA" és „dA_x" felület közötti szög

$$\cos\alpha = \frac{dA_x}{dA} \; ; \; \cos\beta = \frac{dA_y}{dA} \; ; \; \cos\gamma = \frac{dA_z}{dA}$$

- legyen „β" a „dA" és „dA_y" felület közötti szög
- legyen „γ" a „dA" és „dA_z" felület közötti szög

$$n = [\, n_x \; ; \; n_y \; ; \; n_z \,]$$

$$\alpha = \measuredangle(x;n)$$
$$\beta = \measuredangle(y;n)$$
$$\gamma = \measuredangle(z;n)$$

$$
\begin{cases}
① \quad p_{nx} = \sigma_x \cdot n_x + \tau_{yx} \cdot n_y + \tau_{zx} \cdot n_z \\
② \quad p_{ny} = \tau_{xy} \cdot n_x + \sigma_y \cdot n_y + \tau_{zy} \cdot n_z \\
③ \quad p_{nz} = \tau_{xz} \cdot n_x + \tau_{yz} \cdot n_y + \sigma_z \cdot n_z
\end{cases}
$$

$$
\Rightarrow \quad \vec{p}_n = \underline{\underline{F}} \circ \vec{n}
$$

$$
\vec{p}_n = \begin{bmatrix} p_{nx} \\ p_{ny} \\ p_{nz} \end{bmatrix} ; \quad \underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} \sigma_x, & \tau_{yx}, & \tau_{zx} \\ \tau_{xy}, & \sigma_y, & \tau_{zy} \\ \tau_{xz}, & \tau_{yz}, & \sigma_z \end{bmatrix} ; \quad \vec{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}
$$

reciprocitás tétele alapján $|\tau_{yx}| = |\tau_{xy}|$; $|\tau_{zx}| = |\tau_{xz}|$; $|\tau_{yz}| = |\tau_{zy}|$

$\rightarrow$ F szimmetrikus $\rightarrow$ $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}^T$

$$\vec{\sigma}_n = (\vec{n}^T \cdot \vec{p}_n) \cdot \vec{n} = (\vec{n}^T \underline{\underline{F}} \vec{n}) \cdot \vec{n} = \sigma_n \cdot \vec{n}$$

$$\vec{\tau}_n = \vec{p}_n - \vec{\sigma}_n = \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n} - \sigma_n \cdot \vec{n} = (\underline{\underline{F}} - \sigma_n \cdot \underline{\underline{E}}) \vec{n}$$

$$\left.\begin{matrix} (+) : \text{húzófeszültség} \\ (-) : \text{nyomófeszültség} \end{matrix}\right\} \sigma$$

$\underline{\underline{E}}$ = egységmátrix

mit jelent, ha nyírófeszültség (τ_n) zérus?

$$0 = (\underline{\underline{F}} - \sigma_n \cdot \underline{\underline{E}}) \cdot \vec{n}$$

Az ilyen irányokat feszültségi főirányoknak nevezzük.
$\vec{n} \rightarrow \sigma_n$ főfeszültségeknek nevezzük.

Matematikai szempontból a $0 = (\underline{\underline{F}} - \sigma_n \underline{\underline{E}}) \vec{n}$ egy sajátérték-feladat megoldása.

A főfeszültségek azok a σ_n-ek, amikor az egyenletnek van nem triviális megoldása.

A főfeszültségek $\underline{\underline{F}}$ sajátértékei: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

A főirányok pedig a sajátvektorok. $n_1 \perp n_2 \perp n_3 \; (\perp n_1)$

A feszültségtenzor mátrixa ($\underline{\underline{F}}$) ebben az elforgatott (n_1, n_2, n_3) koordináta-rendszerben

$$
\underline{\underline{F}}^{123} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \tau_{21} & \tau_{31} \\ \tau_{12} & \sigma_2 & \tau_{32} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \sigma_3 \end{bmatrix}
$$

a feszültségtenzor diagonális mátrix lesz!

$\tau_{12} = \tau_{21} = \tau_{13} = \tau_{31} = \tau_{23} = \tau_{32} = 0$

mert főirányok.

$$
\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \cdots & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \text{szimmetrikus} & & \sigma_z \end{bmatrix}
$$

a tenzor koordináta-rendszer független, hozzákapcsolódnak olyan vektor és skalármennyiségek, amelyek szintén koordinátarendszer-függetlenek

Invariánsok:

$$
I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \underbrace{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}_{\text{FŐÁTLÓ ELEMEINEK ÖSSZEGE}} = \underbrace{\mathrm{spur}(\underline{\underline{F}})}_{\text{A TENZOR NYOMA}}
$$

$$
I_2 = -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) =
$$

minorok determinánsainak összegének (-1)-szerese

$$
\left(\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} \right) \cdot (-1)
$$

$$
I_3 = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 = \det(\underline{\underline{F}})
$$

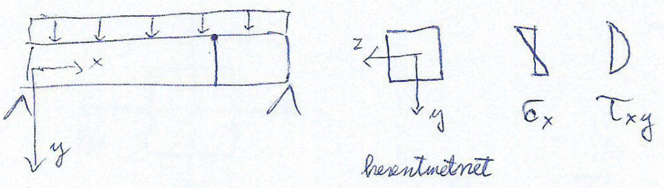
Feszültségállapotok:

- lineáris feszültségállapot : $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ vagy $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$

  $(\sigma_1 > 0)$ $(\sigma_3 < 0)$

  központos húzás, központos nyomás

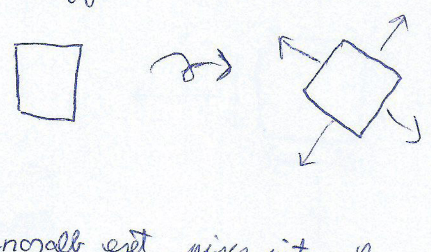
- síkbeli feszültségállapot : az egyik főfeszültség 0.



$\sigma_z = 0$; $\tau_{zx} = 0$; $\tau_{zy} = 0$

$$
\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

az egyik sajátérték 0, a hozzátartozó sajátvektor (0,0,1) marad egy síkbeli eset:



- térbeli feszültségállapot : ez a legáltalánosabb eset, nincs mit róla mondani.

- hidrosztatikus (= gömbi) feszültségállapot: $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$

NYOM ELTŰNIK!

- deviátoros feszültségállapot: $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$ (= J_1 invariánsa a feszültség-tenzornak)

↑ amikor eltűnik a tenzor nyoma!

visszatérünk egy általános feszültségtenzorra ...

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}_0 + \underline{\underline{F}}_d$$

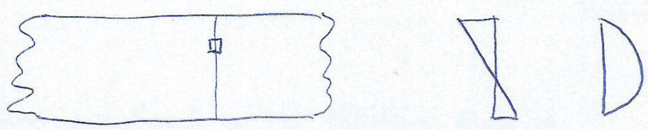
deviátoros mátrix $\Rightarrow J_1 = 0$

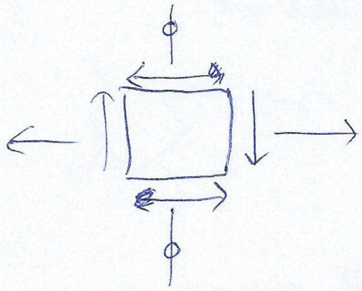
$$\underline{\underline{F}}_0 = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{F}}_d = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_0 & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_0 & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_0 \end{bmatrix}$$

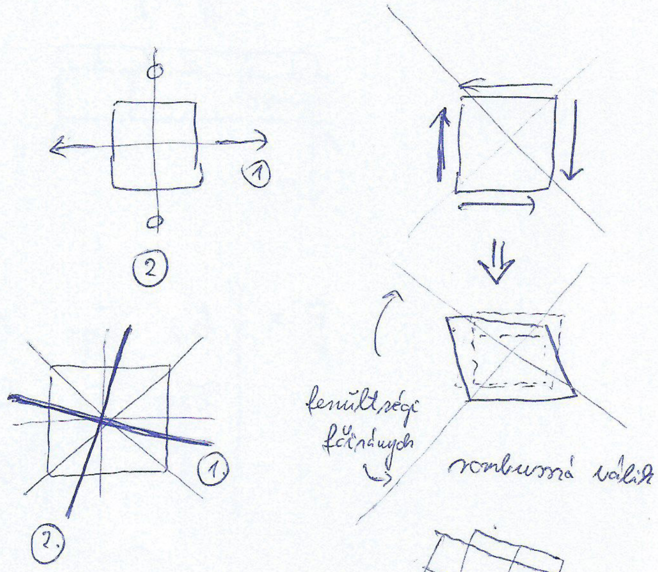
$$\sigma_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$$

$$\left\{ \begin{matrix} s_1 & s_2 & s_3 \\ J_2 & J_3 & \end{matrix} \right\}$$ ezekkel lehetne számolni, de nekünk erre nem lesz szükségünk!

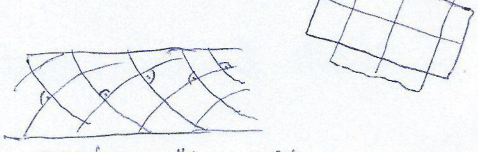
visszatérünk egy korábbi feladatra ...







ezt a görbesereget nevezzük főfeszültségi trajektóriáknak (az érintője minden pontban valamelyik főiránnyal azonos)



egymásra merőleges görbék

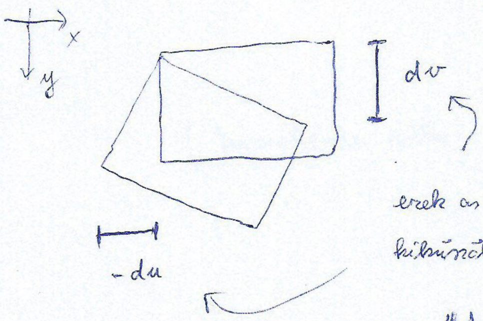
Alakváltozások:

$$\left.\begin{matrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{matrix}\right\} \quad \vec{u} = \underset{\text{végállapot}}{\vec{r}} - \underset{\text{kezdeti állapot}}{\vec{r}_0} \quad \text{elmozdulásvektor}$$

elmozdulás gradiens:

$$\underline{\underline{f}} = \frac{d\vec{u}}{d\vec{r}}$$

tartalmazza a merevtest szerinti elfordulásokat
+ az alakváltozást



$$\underline{\underline{f}} = \begin{bmatrix} \dots & -\frac{du}{dy} & \dots \\ \frac{dv}{dx} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

ezek az elfordulások kiküszöbölendők

MEGOLDÁS: $\underline{\underline{f}}$ felbontása

$$\underline{\underline{f}} = \underset{\text{szimmetrikus}}{\underline{\underline{A}}} + \underset{\text{ferdén szimmetrikus}}{\underline{\underline{f}}_m}$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ \text{szimmetrikus} & & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{f}}^T = \underline{\underline{A}}^T + \underline{\underline{f}}_m^T$$

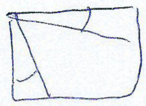
$$\left(\underline{\underline{f}} + \underline{\underline{f}}^T\right) = 2 \cdot \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{0}} \longrightarrow \underline{\underline{A}} = \frac{\underline{\underline{f}} + \underline{\underline{f}}^T}{2}$$

fajlagos nyúlások:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$



szögtorzulások:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \; ; \; \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \text{szimmetrikus} & & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

Irányfüggő:

- irányfüggő
- invariánsok
- főnyúlások, nyúlási főirányok (olyan irányok, ahol nincs szögtorzulás)

~~(Homogén, izotróp anyag esetén a nyúlási állapotok)~~

Alakváltozási állapotok:

- lineáris
- síkbeli
- általános

térbeli alakváltozással is jár (ha megfúrjuk, akkor elvékonyul)