ANALÍZIS(1)
Mérnök Informatikus szak

VIZSGADOLGOZAT

2012. jún. 11.
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

1. feladat (20 pont)

a) Mikor mondjuk, hogy $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $A \in \mathbb{R}$?

Bizonyítsa be az alábbi tételt!

Ha $a_n > 0$ és $\lim_{n\to\infty} a_n = A > 0$, akkor $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{A}$.

b) Állapítsa meg az alábbi sorozatok határértékét!

$$a_n = \sqrt{\frac{4^n + (-2)^n}{3^n + 2^{2n+2}}}, \qquad b_n = \sqrt[n]{\frac{16n^2+9n}{8n^2+2}}$$

a.) D $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, N(\varepsilon)$: $|a_n - A| < \varepsilon$, ha $n > N(\varepsilon)$ 2

$\varepsilon \in \mathbb{R}$, $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^+$

B

$a_n \to A$ miatt $\exists\, N_a(\varepsilon\sqrt{A}) = N_a(\varepsilon^*)$:

$|a_n - A| < \varepsilon \cdot \sqrt{A} = \varepsilon^*$, ha $n > N_a\left(\varepsilon\sqrt{A}\right)$

De ekkor

$$\left|\sqrt{a_n} - \sqrt{A}\right| = \left|\frac{a_n - A}{\sqrt{a_n}+\sqrt{A}}\right| = \frac{|a_n - A|}{\sqrt{a_n}+\sqrt{A}} \le \frac{|a_n - A|}{\sqrt{A}} < \frac{\varepsilon\cdot\sqrt{A}}{\sqrt{A}} = \varepsilon,$$

tehát $N(\varepsilon) = N_a(\varepsilon^*)$ ■

7

b.)

$$a_n = \sqrt{\frac{4^n + (-2)^n}{3^n + 4\cdot 4^n}} = \sqrt{\frac{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n + 4}} \longrightarrow \sqrt{\frac{1+0}{0+4}} = \frac{1}{2}$$

5

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt[n]{10}\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}}_{\substack{\downarrow \quad \downarrow \\ 1 \quad 1 \\ \to 1}} = \sqrt[n]{\frac{1}{8n^2+2n^2}} \le b_n = \sqrt[n]{\frac{16n^2+9n}{8n^2+2}} \le \sqrt[n]{\frac{16n^2+9n^2}{8n^2}} = \sqrt[n]{\frac{25}{8}} \to 1$$

$$\Longrightarrow b_n \to 1$$

6

an1o-120611/1.

2. feladat (10 pont)

Konvergens-e az alábbi sor?

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+5}{n^2+3}\right)^2$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4+4}{(n^2+3)^2}$

a.) $\boxed{5}$ $0 < a_n = \left(\frac{2n+5}{n^2+3}\right)^2 \le \left(\frac{2n+5n}{n^2}\right)^2 = 49\,\frac{1}{n^2}$; $49\sum^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konv.

$(\alpha = 2 > 1) \underset{\text{maj. kr.}}{\Longrightarrow} \sum^{\infty} a_n$ konv.

b.) $\boxed{5}$ $b_n = \frac{n^4+4}{(n^2+3)^2} = \underbrace{\frac{n^4}{(n^2)^2}}_{=1} \frac{1+\frac{4}{n^2}}{\left(1+\frac{3}{n^2}\right)^2} \to \frac{1+0}{(1+0)^2} = 1 \neq 0$

$\Longrightarrow \sum^{\infty} b_n$ div., mert nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele.

3. feladat (12 pont)

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{2x-6}{x+3} + e^{\frac{1}{1-x}}, & \text{ha } x > 1 \\ x \cdot \sin(\pi x - \pi), & \text{ha } x \le 1 \end{cases}$$

a) $\lim_{x \to 1+0} f(x) = ?$

Folytonos-e a függvény $x = 1$-ben?

b) Írja fel $f'(x)$-et, ha $x \neq 1$!

a.) $\boxed{4}$ $f(1+0) = \lim_{x \to 1+0} \left(\operatorname{arctg} \frac{2x-6}{x+3} + e^{\frac{1}{1-x}}\right) = \operatorname{arctg}(-1) + 0 = -\frac{\pi}{4}$ 3

$1-x \xrightarrow[x \to 1+0]{} -0$

$\frac{1}{1-x} \xrightarrow[x \to 1+0]{} -\infty \Rightarrow e^{\frac{1}{1-x}} \xrightarrow[x \to 1+0]{} 0$

$f(1) = 0 \neq f(1+0) \Longrightarrow f$ nem folytonos $x=1$-ben. 1

b.) $\boxed{8}$ $x > 1$:

$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{2x-6}{x+3}\right)^2} \underbrace{\frac{2(x+3)-(2x-6)\cdot 1}{(x+3)^2}}_{=\left(\frac{2x-6}{x+3}\right)'} + e^{\frac{1}{1-x}} \underbrace{(-1)(1-x)^{-2}(-1)}_{=\left(\frac{1}{1-x}\right)'}$ 5

$x < 1$

$f'(x) = 1 \cdot \sin(\pi x - \pi) + x \cdot \cos(\pi x - \pi) \cdot \pi$ 3

an1v-120611/2.

4. feladat (16 pont)

a) A tanult módon vezesse le az $\ln x$ és az $\log_a x$ függvény deriváltját!

b) $f(x) = (1 + \cos^2 3x)^{2x^2}$, $\qquad f'(x) = ?$

a.) $\boxed{8}$ Az inverzfüggvény deriválási szabályával:

$$(\ln x)' = \left.\frac{1}{e^u}\right|_{u=\ln x} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x} \qquad 5$$

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}(\ln x)' = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x} \qquad 3$$

b.) $\boxed{8}$

$$f(x) = (1+\cos^2 3x)^{2x^2} = e^{2x^2\ln(1+\cos^2 3x)} \qquad 2$$

$$f'(x) = e^{2x^2\ln(1+\cos^2 3x)}\cdot\left(2x^2\cdot\ln(1+\cos^2 3x)\right)' = \qquad 2$$

$$= (1+\cos^2 3x)^{2x^2}\cdot\left(4x\ln(1+\cos^2 3x) + 2x^2\,\frac{2\cos 3x(-\sin 3x)\cdot 3}{1+\cos^2 3x}\right) \qquad 4$$

5. feladat (17 pont)*

a) $\displaystyle\int \frac{1}{4x^2+8}\,dx = ?$ $\qquad$ b) $\displaystyle\int \frac{4x^2+11}{4x^2+8}\,dx = ?$

c) $\displaystyle\int \frac{2x}{4x^2+8}\,dx = ?$ $\qquad$ d) $\int \cos^3 x\,dx = ?$

Megoldás:

a) $$\int \frac{1}{4x^2+8}\,dx = \frac{1}{8}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dx = \frac{1}{8}\,\frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + C \qquad 3$$

b) $$\int \frac{4x^2+11}{4x^2+8}\,dx = \int \frac{(4x^2+8)+3}{4x^2+8}\,dx = \int 1\,dx + 3\int \frac{1}{4x^2+8}\,dx =$$

$$= x + 3\,\frac{\sqrt{2}}{8}\,\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C \qquad 5$$

(Felhasználtuk az a) feladat megoldását.)

c) $\int \frac{2x}{4x^2+8}\,dx = \frac{1}{4}\int \underbrace{\frac{8x}{4x^2+8}}_{\frac{f'}{f}}\,dx = \frac{1}{4}\ln(4x^2+8) + C$ (4)

d) $\int \cos x \cdot \cos^2 x\,dx = \int \cos x\,(1-\sin^2 x)\,dx =$
$= \int(\cos x - \underbrace{\cos x \sin^2 x}_{f' f^2})\,dx = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$ (5)

6. feladat (9 pont)*

$$\int \arcsin 2x\ dx = ?$$

$\int 1 \cdot \arcsin 2x\ dx = x \arcsin 2x - \int \frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx =$ (2)

$u' = 1 \quad v = \arcsin 2x$ (2)
$u = x \quad v' = \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} \cdot 2$

$= x \arcsin 2x - \frac{-1}{4}\int \underbrace{(-8x)(1-4x^2)^{-\frac{1}{2}}}_{f' f^{\alpha}}\,dx =$

$= x \arcsin 2x + \frac{1}{4}\,\frac{(1-4x^2)^{1/2}}{1/2} + C$ (5)

7. feladat (8 pont)*

Vezesse be az alábbi integrálban a $t = \sqrt[3]{2x-5}$ új változót és számítsa ki az integrál értékét!

$$\int \frac{2x+3}{\sqrt[3]{(2x-5)^4}}\,dx$$

$t = \sqrt[3]{2x-5} \implies x = \frac{1}{2}(t^3+5) \implies dx = \frac{3}{2}t^2\,dt$ (2)

$\int \frac{t^3+8}{t^4}\,\frac{3}{2}t^2\,dt = \frac{3}{2}\int\left(t + \frac{8}{t^2}\right)dt =$ (2)

$= \frac{3}{2}\left(\frac{t^2}{2} + 8\,\frac{t^{-1}}{-1}\right) + C$ (3)

$I = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{(2x-5)^2} - 8\,\frac{1}{\sqrt[3]{2x-5}}\right) + C$ (1)

anlv-120611/4.

8. feladat (10 pont)*

Legyen

$$f(t) = \begin{cases} 3t + 2\,, & \text{ha } t \in [0,1] \\ 5\,, & \text{ha } t > 1 \end{cases}$$

Határozza meg az

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt\,, \qquad x > 0$$

integrált! Hol differenciálható az F függvény és mi a deriváltja?

Ha $x \in (0,1]$:

$$F(x) = \int_0^x (3t+2)\,dt = 3\frac{t^2}{2} + 2t \Big|_0^x = \frac{3}{2}x^2 + 2x$$

2

Ha $x > 1$:

$$F(x) = \int_0^1 (3t+2)\,dt + \int_1^x 5\,dt = 3\frac{t^2}{2} + 2t\Big|_0^1 + 5t\Big|_1^x =$$

$$= \frac{3}{2} + 2 - 0 + 5x - 5 = 5x - \frac{3}{2}$$

4

$$F(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 + 2x\,, & \text{ha } x \in (0,1] \\ 5x - \frac{3}{2}\,, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$$

$$F(x) = \int_0^x \underbrace{f(t)}_{\text{folytonos } t>0\text{-ra}}\,dt \xRightarrow[\text{int. szám. II. alaptétele}]{} F'(x) = f(x)$$

Tehát

$$F'(x) = \begin{cases} 3x + 2\,, & \text{ha } x \in (0,1] \\ 5\,, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$$

4

A *-gal jelölt feladatokból legalább 12 pontot el kell érni!

Pótfeladatok (csak az elégséges és közepes vizsgajegy eléréséhez javítjuk ki):

an1o120611/5.

9. feladat (10 pont)

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2+1}{3n^2-2}\right)^{9n^2} = ?$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x^2)}{\operatorname{arctg}(3x^2)} = ?$

a.) $\boxed{5}$

$$\left(\frac{3n^2+1}{3n^2-2}\right)^{9n^2} = \left(\frac{\left(1+\frac{1}{3n^2}\right)^{3n^2}}{\left(1+\frac{-2}{3n^2}\right)^{3n^2}}\right)^3 \to \left(\frac{e}{e^{-2}}\right)^3 = e^9$$

b.) $\boxed{5}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x^2}{\operatorname{arctg} 3x^2} \underset{\frac{0}{0}}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{(\cos 2x^2)}^{\to 1}\cdot 4x}{\underbrace{\frac{1}{1+9x^4}}_{\to 1}\cdot 6x} = \frac{2}{3}$$

$\frac{4x}{6x} = \frac{2}{3}$

10. feladat (10 pont)

$$f(x) = e^{x^3-27x}$$

a) Keresse meg a függvény monotonitási intervallumait!
b) Hol van lokális szélsőértéke? Milyen jellegű?

$$f'(x) = e^{x^3-27x}\,(3x^2-27) = \underbrace{e^{x^3-27x}\cdot 3}_{>0}\,\underbrace{(x^2-9)}$$

(2) (1)

(2)

	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,3)$	3	$(3,\infty)$
f'	+	0	−	0	+
f	↗	lok. max.	↘	lok. min	↗

(5)