Villamosmérnök A3 (2017 ősz) **3. vizsga ZH**

Minden feladat 12 pontos, tehát összesen 60 pontot lehet összegyűjteni. Minden feladat esetében szükséges a világos indoklás, nem elég a végeredmény és/vagy a válasz.

1. Oldja meg az $y' = 1 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$ differenciálegyenletet!

Megoldásvázlat. Homogén fokszámú: $u = y/x$, $f(u) = 1 + u + u^2$. $u' = \frac{1}{x}(f(u) - u) = \frac{1}{x}(1 + u^2)$ szétválasztható változójú.

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}(1+u^2) \rightsquigarrow \operatorname{arctg} u = \int \frac{du}{1+u^2} = \int \frac{1}{x}\, dx = \ln(|x|) + c$$
$$\rightsquigarrow u = \operatorname{tg}(\ln(|x|) + c) \rightsquigarrow y = ux = x \operatorname{tg}(\ln(|x|) + c)$$

2. Oldja meg az $y'' + 6y' + 9y = 9e^{3t}$ differenciálegyenletet Laplace-transzformáció alkalmazása **nélkül**!

Megoldásvázlat. y_{ha}: -3 a karakterisztikus egyenlet ($\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$) kétszeres gyöke, ezért $y_{ha} = c_1 e^{-3t} + c_2 t e^{-3t}$.
y_{ip}: Mivel $9e^{3t} = e^{3t}(9\cos 0t + 0 \sin 0t)$ és 3 a karakterisztikus egyenletnek nem gyöke, a megoldást $y = e^{3t}P$, $P \in \mathbb{R}$ alakban keressük. Így $y' = 3y$, $y'' = 9y$, tehát visszahelyettesítve: $9e^{3t} = (9 + 6 \cdot 3 + 9)y = 36y = 36Pe^{3t}$, azaz $P = 1/4$, és így $y_{ia} = y_{ha} + y_{ip} = c_1 e^{-3t} + c_2 t e^{-3t} + 1/4 e^{3t}$.

3. Legyen $v(x, y, z) = (-y, x, -xyz)$, F az origó csúcsú, kifelé irányított kúppalást, amelynek a z tengely a szimmetriatengelye, az alapköre 3 sugarú és a $z = 3$ síkban van. $\int_F \operatorname{rot} v\, df = ?$

Megoldásvázlat. A Stokes-tétel miatt $\int_F \operatorname{rot} v\, df = \int_K v\, dr$, ahol K az $r(t) = 3(\sin t, \cos t, 1)$, $t \in [0, 2\pi]$ egyenletű körvonal. Így $\dot r(t) = 3(\cos t, -\sin t, 0)$, ezért

$$\int_K v\, dr = \int_0^{2\pi} (-3\cos t, 3\sin t, -27 \sin t \cos t) 3(\cos t, -\sin t, 0)\, dt = \int_0^{2\pi} -9\, dt = -18\pi.$$

VAGY a definíciókból. $\operatorname{rot} v = (-xz, yz, 2)$, és F egyenlete $r(u, v) = (v \cos u, v \sin u, v)$, $u \in [0, 2\pi]$, $v \in [0, 3]$. Így $r_u(u, v) \times r_v(u, v) = (v \cos u, v \sin u, -v)$ (vagyis valóban kifelé van irányítva).

$$\int_F \operatorname{rot} v\, df = \int_0^3 \int_0^{2\pi} (-v^2 \cos u, v^2 \sin u, 2)(v \cos u, v \sin u, -v)\, du\, dv$$
$$= \int_0^3 \int_0^{2\pi} -v^3 \cos^2 u + v^3 \sin^2 u - 2v\, du\, dv = \int_0^3 \left[2v^3\left(\frac{u}{2} - \frac{1}{2}\sin u \cos u\right) - (v^3 + 2v)u\right]_0^{2\pi} dv$$
$$= \int_0^3 \left[v^3(u - \sin u \cos u) - (v^3 + 2v)u\right]_0^{2\pi} dv = \int_0^3 -4v\pi\, dv = -\pi \left[2v^2\right]_0^3 = -18\pi.$$

(Az integrálás vége máshogy:

$$\int_0^3 \int_0^{2\pi} -v^3 \cos^2 u + v^3 \sin^2 u - 2v\, du\, dv = \int_0^3 \int_0^{2\pi} -v^3 \cos 2u - 2v\, du\, dv$$
$$= \int_0^3 \left[-\frac{v^3}{2} \sin 2u - 2vu\right]_0^{2\pi} dv = \int_0^3 -4\pi v\, dv = \left[-2\pi v^2\right]_0^3 = -18\pi.)$$

4. Legyen F a háromdimenziós térben az origó középpontú R sugarú felső félgömbfelületből és az azt alulról lezáró origó középpontú R sugarú xy-síkbeli körlapból álló kifelé irányított zárt felület. $\int_F r|r|^2\, df = ?$

Megoldásvázlat. $F = F^{-} \dot\cup K$, ahol K az xy-síkbeli körlap. Utóbbin 0 az integrál, mert az integrandus merőleges a felületi normálisra. Tehát, mivel az integrandus sugárirányú, azaz párhuzamos a felületi normálissal,

$$\int_F r|r|^2\, df = \int_{F^-} r|r|^2\, df = \int_{F^-} |r|^3|\, df| = R^3 \int_{F^-} 1|\, df| = R^3 \cdot 2\pi R^2 = 2\pi R^5.$$

VAGY Gauss-Osztrogradszkij tétellel.

$$\operatorname{div} r|r|^2 = (\operatorname{div} r)|r|^2 + r \operatorname{grad}|r|^2 = 3|r|^2 + r2|r|\frac{r}{|r|} = 5|r|^2$$

$$\rightsquigarrow \int_F r|r|^2\, df = \int_G 5|r|^2\, dV = 5\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} r^2 \sin\tau r^2\, d\tau\, d\varphi\, dr$$
$$= 5\int_0^R \int_0^{2\pi} r^4\, d\varphi\, dr = 10\pi \int_0^R r^4 = 10\pi \frac{r^5}{5}\Big|_0^R = 2\pi R^5$$

ahol G jelöli az F által bezárt térrészt.

5. (a) Mit értünk egy $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ antiszimmetrikus lineáris leképezés vektorinvariánsán?
(b) Igaz-e, hogy ha a v és w kétszer folytonosan deriválható $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ függvényekre $\operatorname{div} v = \operatorname{div} w$, akkor v és w legfeljebb konstansban különböznek egymástól?
(c) Ha a $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektorfüggvényre és az F, $F' \subseteq \mathbb{R}^3$ felületekre állnak a Gauss-Osztrogradszkij tétel feltételei, és $\operatorname{div} v = 0$ $\mathbb{R}^3$-ön, akkor
(c1) $\int_F v\, df = \int_{F'} v\, df$
(c2) $\int_F \operatorname{rot} v\, df = \int_L v\, dr$, ahol az L görbe az F határa.

Megoldásvázlat. (a) Azt az egyetlen $a \in \mathbb{R}^3$ vektort, amelyre $Ar = a \times r$ minden $r \in \mathbb{R}^3$-re.
(b) Nem, pl. $\operatorname{div}(xy, xy) = y + x = \operatorname{div}(xy + y, xy)$.
(c1) Igen, mert a Gauss-Osztrogradszkij tétel szerint mindkettő 0.
(c2) Nem, F zárt felület, tehát a határa $\emptyset$.

IMSc-feladat. Mutassa meg, hogy ha f, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ kétszer folytonosan deriválhatók, akkor $\operatorname{div}((\operatorname{grad} f) \times (\operatorname{grad} g)) = 0$.

Megoldásvázlat. $(\operatorname{grad} f) \times (\operatorname{grad} g) = (f_y g_z - f_z g_y, f_z g_x - f_x g_z, f_x g_y - f_y f_x) \rightsquigarrow \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) \times (\operatorname{grad} g) = \operatorname{div}(f_y g_z - f_z g_y, f_z g_x - f_x g_z, f_x g_y - f_y f_x) = (f_y g_z - f_z g_y)_x + (f_z g_x - f_x g_z)_y + (f_x g_y - f_y g_x)_z = f_{yz} g_z + f_y g_{zx} - f_{zx} g_y - f_z g_{yx} + f_{zy} g_x + f_z g_{xy} - f_{xy} g_z - f_x g_{zy} + f_{xz} g_y + f_x g_{yz} - f_{yz} g_x - f_y g_{xz} = 0$, mert a Young-tétel miatt f és g csak a változók sorrendjében különböző parciális deriváltjaik egyenlőek.