A3 3. vizsgazh, 2011 ősz

1. Oldja meg az $1 + (3x - e^{-2y})y' = 0$ differenciálegyenletet!

2. Számítsa ki a $v(r) = \frac{r}{|r|^3}$ vektorfüggvény felületmenti integrálját az $(1, 1, 1)$ középpontú, 1 sugarú kifelé irányított gömbfelületen!

3. Legyen $m > 0$ és K a háromdimenziós térben az a $z = m$ síkban elhelyezkedő R sugarú felfelé irányított körlap, melynek középpontja a z tengelyen van. Számítsa ki a $v(r) = r$ ($r \in \mathbb{R}^3$) vektor-vektor függvény felületmenti integrálját K-n!

4. Legyen $f(x+iy) = x|x| + iy|y|$. Állapítsa meg, hogy az origóban (a) teljesülnek-e f-re a Cauchy–Riemann differenciálegyenletek, és hogy (b) deriválható-e ott f!

5. Számítsa ki $\int_L \frac{e^{z^2}}{(z^2-2z+1)(z-i)}\,dz$-t ha L a pozitívan irányított $-i$, $3+i$, $-2+2i$ háromszögvonal!

6. (a) Legyen $G \subseteq \mathbb{R}^3$, $v : G \to \mathbb{R}^3$ folytonos. Melyek igazak az alábbi állítások közül?

(1) v potencálfüggvénye G-n u, ha $v = \operatorname{rot} u$

(2) v potencálfüggvénye G-n u, ha $v = \operatorname{div} u$

(3) ha v-nek van potencálfüggvénye G-n, akkor $\operatorname{rot} v = 0$.

(b) Legyen a az f komplex függvény izolált szingularitási helye. Melyek igazak az alábbi állítások közül?

(1) f-nek pontosan akkor n-edrendű pólusa a, ha $\lim_{z\to a} f^n(z)$ létezik és véges, de minden $m < n$ természetes számra $\lim_{z\to a} f^m(z)$ végtelen.

(2) f-nek lényeges szingularitása van a-ban, ha f a körüli Laurent-sorában végtelen sok negatív kitevőjű tag van.