Matematika A2a szóbeli kidolgozott tételek

dr. Nguyen Xuan Ky, 2005/2006-02 BSc

By:Marci & Sapi

1. Lineáris algebra

1. **Mátrix**

Változókból alkotott sorokban és oszlopokban rendezett táblázat.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

m sor
n oszlop
mxn-es típusú
a_{ij} A mátrix eleme

$$A=(a_{ij}^{m,n})_{i=1,\, j=1}$$

<u>Speciális alakú mátrixok</u>

1. m=n -> négyzetes mátrix
2. n=1-> oszlopmátrix (oszlopvektor)
3. m=1-> sormátrix (sorvektor)
4. Diagonális mátrix

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$a_{ij}=0$, ha $i\neq j$
mxn-es típusú

főátló tagjai nem 0-k

5. Egységmátrix

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

mxn-es típusú

$a_{ij}=1$ ha $i=j$
$a_{ij}=0$ ha $i\neq j$

6. Nullmátrix

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}=\underline{\underline{0}}=0$$

Minden i,j-re $a_{ij}=0$

7. Háromszögmátrix

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

<u>alsó</u> $a_{ij}=0$, ha $i<j$
<u>felső</u> $a_{ij}=0$, ha $i>j$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

8. Transzponált mátrix

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \rightarrow \boldsymbol{A}^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

mxn nxm

9. Szimmetrikus mátrix

A=nxn és A=A[T]

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}=A^T$$

Tétel: 2 mátrix akkor és csak akkor egyenlő $A_{mxn}=B_{mxn}$, $A=(a_{ij});\ B=(b_{ij})$ $\longleftrightarrow$ $a_{ij}=b_{ij}$ $\forall\, i, j-$re

Definíció: Almátrix

Egy tetszőleges mátrix sorait vagy oszlopait elhagyva kapható.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \rightarrow \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Tétel: Műveletek

Adott $\underset{[m\times n]}{A}=(a_{ij}),\ \lambda\in\mathbb{C}$

1. Összeadás

$B=(b_{ij}),\ m\times n$

$A\pm B=(a_{ij}\pm b_{ij})_{i=1,\, j=1}$

a) $A+B=B+A$
b) $(A+B)+C=A+(B+C)$
c) $A+\underline{\underline{0}}=A$
d) $A+(-A)=\underline{\underline{0}}$ -A=(-a_{ij}),ha A=(a_{ij})

2. Számmal való szorzás

$\lambda\cdot A=\lambda\cdot(a_{ij})=(\lambda\cdot a_{ij})\rightarrow\forall$ elemet meg kell szorozni λ-val.

3. Szorzás

1. eset: sor-,és oszlopmátrix kombinálása

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}=(a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+\cdots+a_n\cdot b_n)=C$$

2. eset: Általános alak

$$C=\underset{m\times n}{A}\cdot\underset{n\times p}{B}=(a_{ij})_{i=1,j=1}^{m,n}\cdot(b_{jk})_{j=1,k=1}^{n,p}=\underset{n\times p}{C}=(c_{ik})_{i=1,k=1}^{m,p}$$

$$c_{ik}=\sum_{l=1}^{n}a_{il}\cdot b_{lk}$$

a) nem kommutatív
b) asszociatív
c) disztributív az összeadásra $A(B+C)=AB+AC$
d) szorzás az identitásmátrixszal kommutatív $A\cdot E=E\cdot A=A$

2. Mátrixok elemi transzformációi

Definíció: Mátrix transzformáció

Olyan művelet, amelynek segítségével egy adott mátrixból egy másik mátrixot kapunk.

Definíció: Elemi transzformáció:Nem változtatja a mátrix rendjét és rangját

a) Egy mátrix 2 sorának, illetve oszlopának felcserélése
b) Egy mátrix oszlopának, illetve sorának szorzása egy skalárral
c) Egy mátrix valamelyik sorát, illetve oszlopát egy skalárral megszorozva a mátrix egy másik sorához, illetve oszlopához adjuk

Definíció: Ekvivalens transzformáció: nem változtatja a mátrix rangját
Jelölés: S» elemi sortranszformáció, K» elemi oszloptranszformáció

Mátrix vektorokkal való jelölése:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\underline{a_1} & \underline{a_2} & \cdots & \underline{a_n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\underline{b_1}\\ \underline{b_2}\\ \cdots \\ \underline{b_n}\end{pmatrix}$$

3. Mátrix rangja és kiszámítása

Definíció: Rang: $A=(a_{ij})_{i=1,j=1}^{m,n}$
Az A rangja r(A),ha $\exists$ r-edrendű reguláris almátrixa, de $\forall$ r-nél nagyobb rendű almátrixa szinguláris.
Reguláris: $det(\underline{\underline{A}})\neq 0$ Szinguláris: $det(\underline{\underline{A}})=0$

Tétel: Gauss-elimináció
Ha $A=(a_{ij})$ akkor az elemi transzformációk segítségével elérjük, hogy a főátló alatt csak 0 legyen, nxn-es mátrix esetén felső háromszögmátrix.
Pl.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 5 & 2 \\ 5 & -7 & 5 & 10 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0{,}5 & 5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 5 & 0 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0{,}5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\rightarrow r(A)=2\leq 3 \quad r\leq min(m,n)$$

4. Mátrix inverzének létezése és kiszámítása

Definíció:

$$A=(a_{ij}) \quad n\times n \quad \boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Ha $\exists B\, n\times n \wedge A\cdot V = B\cdot A = E \rightarrow B = A^{-1}$

Tétel: Ha $\begin{matrix} \exists A^{-1} \rightarrow det(A\cdot A^{-1}) = det(E) = 1 \\ det(A)\cdot det(A^{-1}) = 1 \\ det(A) \neq 0 \end{matrix}$ $\rightarrow$ A reguláris $\rightarrow$ létezik inverz.

Tétel: Ha $\exists A^{-1} \rightarrow$ csak 1 van.

Bizonyítás: $\exists X_1, X_2$

$$X_2(A\cdot X_1) = X_2\cdot E$$
$$E\cdot X_1 = X_2$$
$$X_1 = X_2$$

Tétel: $A = (a_{ij})$ $n\times n$ típusú mátrix $\leftarrow\rightarrow \exists$ inverze, ha $det(A) \neq 0$ és ekkor

$$A^{-1} = \frac{1}{det}(A)\cdot(D_{ij})^T$$

Kiszámítás:

(1) $det(A)$ meghatározása

(2) Ha $det(A) \neq 0 \rightarrow D_{ij}$

(3) $(D_{ij})^T \rightarrow$ főátlóra tükrözés

Tétel: Az inverz művelet tulajdonságai

a) $det(A^{-1}) = \frac{1}{det}(A)$

b) Ha $det(A) \neq 0 \rightarrow det\, A^T \neq 0 \rightarrow (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

c) $(A^{-1})^{-1} = A$

d) A és B reguláris $\rightarrow A\cdot B$ is reguláris, $(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$

5-6. **N-edrendű determináns+Speciális mátrixok determinánsa**

Értelmezés: Az $n\times n$ -es mátrixhoz hozzárendelünk egy számot.

$det(A) = |A|$

a) $det(a) = a$

b) $det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

c) $det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

d) n-edrendű determináns(első sor szerinti kifejtés)

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{11} \\ a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{11} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot D_{11} + a_{12}\cdot D_{12} + \cdots + a_{1n}\cdot D_{1n}$$

ahol D_{1i} az a_{1i} -hez tartozó előjeles aldetermináns.

pl. $D_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

Tétel: $\forall$ n-edrendű determináns visszavezethető másodrendű determinánsok kiszámítására.

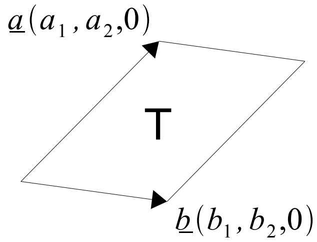
Kifejtés: Geometriai jelentés

$$\underline{a}(a_1, a_2, a_3) \qquad \underline{b}(b_1, b_2, b_3)$$

$$\underline{a}\times\underline{b}=\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \rightarrow T=\|\underline{a}\times\underline{b}\|=\left\|\begin{matrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix}\right\| =_{a_3=b_3=0} \left|\underline{k}\left(a_1 b_2 - a_2 b_2\right)\right|$$

$$T=\left|a_1 b_2 - a_2 b_1\right|$$

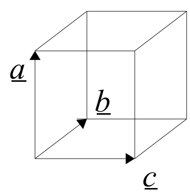
a) Területszámítás



b) Térfogatszámítás

$$\underline{a}(a_1, a_2, a_3) \qquad \underline{b}(b_1, b_2, b_3) \qquad \underline{c}(c_1, c_2, c_3)$$

$$V=|\underline{a} \;\; \underline{b} \;\; \underline{c}|=\left\|\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix}\right\|$$



Tétel: Determináns tulajdonságai

1. $det(A)=det(A^T)$
2. Háromszögmátrix determinánsa a főátlóban álló elemek szorzatával egyenlő
3. Ha egy oszlopot vagy sort megszorzunk egy λ számmal, akkor a determináns értéke az eredeti λ szorosára nő
   $$det(\underline{a_1}, \underline{a_2}, \cdots, \underline{a_i}+\underline{a_i'}, \cdots, \underline{a_n})=det(\underline{a_1}, \underline{a_2}, \cdots, \underline{a_i}, \cdots, \underline{a_n})+det(\underline{a_1}, \underline{a_2}, \cdots, \underline{a_i'}, \cdots, \underline{a_n})$$
4. $$det\begin{pmatrix} \underline{b_1} \\ \vdots \\ \underline{b_i}+\underline{b_i'} \\ \vdots \\ \underline{b_n} \end{pmatrix}=det\begin{pmatrix} \underline{b_1} \\ \vdots \\ \underline{b_i} \\ \vdots \\ \underline{b_n} \end{pmatrix}+det\begin{pmatrix} \underline{b_1} \\ \vdots \\ \underline{b_i'} \\ \vdots \\ \underline{b_n} \end{pmatrix}$$
5. Egy determináns előjelet vált, ha 2 sorát illetve 2 oszlopát egymással felcseréljük
6. Egy determináns értéke nem változik, ha egy tetszőleges oszlophoz vagy sorhoz hozzáadjuk egy másik oszlop vagy sor λ-szorosát
7. $det(A\cdot B)=det(A)\cdot det(B)=det(B)\cdot det(A)=det(B\cdot A)$
8. Speciális eset $det(E)=1$
9. Ha egy determinánsban 2 sor vagy oszlop megegyezik, akkor a determináns értéke 0.

10. Vandermonde determináns

$$V(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{i>k}(x_i-x_k)$$

Pl.:

$$\underline{\underline{V}}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix}=\prod_{i>k}(x_i-x_k)=(4-3)\cdot(4-2)\cdot(3-2)=\underline{\underline{2}}$$

11. a_{ij} -hez tartozó előjeles aldetermináns

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \to D_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot det(A_{ij})$$

7-8-9. **Lineáris egyenletrendszerek**

Értelmezés: Általános lineáris egyenletrendszer

$$\begin{array}{l} a_{11}\cdot x_1+a_{12}\cdot x_2+\cdots+a_{1n}\cdot x_n=b_1 \\ a_{21}\cdot x_1+a_{22}\cdot x_2+\cdots+a_{2n}\cdot x_n=b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}\cdot x_1+a_{n2}\cdot x_2+\cdots+a_{mn}\cdot x_n=b_n \end{array} \quad \to \quad \begin{array}{r} a_{ij}, b_k \to \text{szabad együtthatók} \\ x_i \to \text{ismeretlenek} \end{array}$$

Mátrix alak

$$A=(a_{ij}) \qquad \underline{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad \underline{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} A=(a_{ij})=(\underline{a_1}, \ldots, \underline{a_n}) \\ A\cdot\underline{x}=\underline{b} \to x_1\cdot\underline{a_1}+x_2\cdot\underline{a_2}+\cdots+x_n\cdot\underline{a_n}=\underline{b} \end{array}$$

Tétel: Megoldás: Gauss-elimináció

Ha a mátrixokra elemi transzformációkat alkalmazunk, úgy hogy a kapott mátrix háromszögmátrix legyen, akkor a műveletet Gauss-féle kiküszöbölési módszernek, Gauss-

$$\begin{array}{c} -\dfrac{a_{21}}{a_{11}} \\ \vdots \\ -\dfrac{a_{m1}}{a_{11}} \end{array} \approx \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)}\cdot x_1^{(1)}+a_{12}^{(1)}\cdot x_2^{(1)}+\cdots+a_{1n}^{(1)}\cdot x_n^{(1)}=b_1^{(1)} \\ 0\cdot x_1^{(1)}+a_{22}^{(1)}\cdot x_2^{(1)}+\cdots+a_{2n}^{(1)}\cdot x_n^{(1)}=b_2^{(1)} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ 0\cdot x_n^{(1)}+a_{m2}^{(1)}\cdot x_2^{(1)}+\cdots+a_{mn}^{(1)}\cdot x_n^{(1)}=b_n^{(1)} \end{pmatrix}$$

eliminációnak nevezzük.

1. lépés

2. lépés
   Hasonló az előzőhöz

r. lépés:

$$r \rightarrow \left(\begin{array}{c} a_{11}^{(r)} \cdot x_1^{(r)} + a_{12}^{(r)} \cdot x_2^{(r)} + \cdots + a_{1n}^{(2)} \cdot x_n^{(2)} = b_1^{(r)} \\ 0 \cdot x_1^{(r)} + a_{22}^{(r)} \cdot x_2^{(r)} + \cdots + a_{2n}^{(r)} \cdot x_n^{(r)} = b_2^{(r)} \\ \ddots \end{array} \right)$$

$$m - r \rightarrow \left(\begin{array}{r} a_{rr}^{(r)} \cdot x_r^{(r)} + \cdots + a_{rn}^{(r)} \cdot x_n^{(r)} = b_r^{(r)} \\ \cdots + 0 \cdot x_n^r = b_{r+1}^r \\ \cdots + 0 \cdot x_m^r = b_m^r \end{array} \right)$$

a) r=n

$b_{r+1} = \cdots = b_m = 0$ egy megoldás van

$x_r^{(r)} \rightarrow x_{r-1}^{(r)} \rightarrow x_1^r$; $A^r, B^r = (A^r | \underline{b}^r) \rightarrow$ kibővített mátrix

$A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ $\quad r(A) = r(A^{(r)}) = r(B^{(r)}) = n \rightarrow$ egyetlen megoldás van

b) r<n

$b_{r+1}^{(r)}, \cdots, b_m^{(r)}$ között legalább egy nem 0 $\rightarrow$ nincs megoldás

$r(A) = r(A^{(r)}) < r(B^{(r)})$

c) r<n

$b_{r+1}^{(r)} = \cdots = b_m^{(r)} = 0 \rightarrow r(A^{(r)}) = r(B^{(r)}) = r(A) < n \rightarrow \infty$ sok megoldás van

Tétel: Megoldás inverz mátrix segítségével

$$A \cdot \underline{x} = \underline{b} \qquad A^{n \times n} \qquad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$A^{-1} \cdot (A \cdot \underline{x}) = A^{-1} \cdot \underline{b} \qquad \exists A^{-1}$

$(A^{-1} \cdot A) \cdot \underline{x} = A^{-1} \cdot \underline{b}$

$E \cdot \underline{x} = A^{-1} \cdot \underline{b}$

$\underline{x} = A^{-1} \cdot \underline{b}$

Cramer-szabály

$A \cdot \underline{x} = \underline{b} \qquad A^{n \times n} \qquad D = |A| \neq 0$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} \; ; \; x_2 = \frac{D_2}{D} \; ; \; \cdots \; ; \; x_n = \frac{D_n}{D}$$

ahol $D_i = |(\underline{a_1}, \cdots, \underline{a_{i-1}}, \underline{b}, \underline{a_{i+1}}, \cdots, \underline{a_n})|$

Bizonyítás:

$\underline{x} = A^{-1} \cdot \underline{b}$

10. **Mátrix sajátvektora és sajátértéke**

Definíció:

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \; ; \; \lambda_{\text{sajátérték}} \in \mathbb{C} \; ; \; \underline{s}_{\text{ sajátvektor}} = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \neq \underline{0}$$

ha $A \cdot \underline{s} = \lambda \cdot \underline{s}$

Kiszámítása:

$A\cdot \underline{s}-\lambda\cdot \underline{s}=\underline{0}$
$A\cdot \underline{s}-\lambda\cdot E\cdot \underline{s}=\underline{0}$

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

$(A-\lambda\cdot E)\cdot \underline{s}=\underline{0}\rightarrow$ homogén egyenletrendszer

Mivel $\underline{s}\neq\underline{0}$, így $det(A-\lambda E)=0$

$K_n(\lambda)$ pontosan n-edfokú polinom.

Az A mátrix karakterisztikus polinomja.

Tétel: Algebra alaptétele

$P_n(x)$ komplex együtthatós polinomnak, amely n-edfokú
$(n\geq 1)$ pontosan komplex gyöke van $K_n(\lambda)=0$ multiplicitással együtt

Gyökfelbontás

$P_n(x)=(\lambda_1-x)^{m_1}\cdot(\lambda_2-x)^{m_2}\cdot\cdots\cdot(\lambda_r-x)^{m_r}$

$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\cdots,\lambda_r\rightarrow$ különböző gyökök

$m_1,m_2,\cdots,m_r\rightarrow$ multiplicitás

Pl. $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$K_2(\lambda)=\begin{vmatrix} 0-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}=-\lambda(a-\lambda)=0\rightarrow\lambda_1=0\,;\lambda_2=1$$

Sajátvektorok meghatározása

a) Sajátértékek meghatározása
b) $\forall$ egyes $\lambda_i(i=1\cdots r)$ -hez tartozó sajátvektort kell meghatározni

$A\cdot \underline{s}=\lambda\cdot \underline{s}\rightarrow(A-\lambda\cdot E)\cdot \underline{s}=\underline{0}$

$\underline{s}$ -ra vonatkozó egyenletrendszer $\rightarrow$ Gauss-eliminációval $\underline{s}$ meghatározható

Pl. $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\lambda_1=0$ $\lambda_2=1$

$\lambda_1=0$ $$\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\lambda_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\cdot \underline{s}=\underline{0}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}=\underline{0}\rightarrow \begin{matrix} 0\cdot s_1+0\cdot s_2=0 \\ 0\cdot s_1+1\cdot s_2=0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} s_2=0 \\ s_1\in\mathbb{C}\setminus\{0\} \end{matrix}$$

$\lambda_2=1$ $$\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\lambda_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\cdot \underline{s}=\underline{0}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}=\underline{0}\rightarrow \begin{matrix} -1\cdot s_1+0\cdot s_2=0 \\ 0\cdot s_1+1\cdot s_2=0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} s_1=0 \\ s_2\in\mathbb{C}\setminus\{0\} \end{matrix}$$

Definíció: Hasonló mátrixok

A, B $n \times n$ -es hasonlóak, ha $\exists$ $T_{n\times n}$ -es reguláris mátrix:
$A = T^{-1} \cdot B \cdot T$ Jelölés $A \simeq B$

a) $A \simeq A \rightarrow$ idempotens

b) $A \simeq B \rightarrow B \simeq A \rightarrow$ szimmetrikus $\rightarrow$

$$A = T^{-1} \cdot B \cdot T$$
$$T \cdot A \cdot T^{-1} = T \cdot T^{-1} \cdot B \cdot T \cdot T^{-1}$$
$$T \cdot A \cdot T^{-1} = B$$

c) $A \simeq B$ és $B \simeq C \rightarrow A \simeq C \rightarrow$ tranzitív

Tétel: Legyen $A \simeq B (A = T^{-1} \cdot B \cdot T)$

$\downarrow$

a) A és B sajátértékei ugyanazok
b) $\underline{s}$ sajátvektora A-nak $\leftarrow\rightarrow$ $T \cdot \underline{s}$ sajátvektora B-nek

Bizonyítás:

a) λ sajátértéke A-nak. $A \underline{s} = \lambda \underline{s}$

$(T^{-1} \cdot B \cdot T) \cdot \underline{s} = \lambda \cdot \underline{s}$

$T \cdot T^{-1} \cdot B \cdot T \cdot \underline{s} = T \cdot \lambda \cdot \underline{s}$

$B \cdot (T \cdot \underline{s}) = \lambda \cdot (T \cdot \underline{s})$

$\downarrow$

λ sajátértéke B-nek
$T \cdot \underline{s}$ sajátvektora B-nek

b) Fordítva: λ sajátértéke B-nek és $T \cdot \underline{s}$ sajátvektora

$B (T \cdot \underline{s}) = \lambda (T \cdot \underline{s})$

$T \cdot A \cdot T^{-1} (T \cdot \underline{s}) = \lambda \cdot T \cdot \underline{s}$

$T^{-1} \cdot T \cdot A \cdot T^{-1} \cdot T \cdot \underline{s} = \lambda \cdot T \cdot \underline{s}$

$A \cdot \underline{s} = \lambda \cdot \underline{s}$

λ sajátértéke A-nak
$\underline{s}$ sajátvektora A-nak

11. **Lineáris tér definíciója**

Jelölések. $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ (valós számtest)
$\mathbb{C}$ komplex számok halmaza (komplex számtest)
F: vagy $\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$ (számtest)

Definíciója: Vektortér:

V adott halmaz. V F feletti lineáris tér (vektortér),ha V-n értelmezve van 2 művelet, összeadás(+) és λ-val való szorzás $\lambda \in F$,és a következő axiómák érvényesek rá:

1. $\forall \underline{u}, \underline{v} \in V$ -re $\underline{u} + \underline{v} \in V \rightarrow$ a művelet V-re zárt
2. $\forall \underline{u}, \underline{v} \in V$ -re $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u} \rightarrow$ kommutatív
3. $\forall \underline{u}, \underline{v}, \underline{x} \in V$ -re $(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{x} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{x}) \rightarrow$ asszociatív
4. $\forall \underline{u} \in V$ -re $\exists \underline{v} \in V$ $\underline{u} + \underline{v} = \underline{0} \rightarrow$ additív inverzének $\exists$ -e
5. $\exists \sigma \in V$ $\forall \underline{u} \in V$ -re és $\underline{u} + \underline{\sigma} = \underline{u}$ $\rightarrow$ neutrális elem $\exists$ -e
6. $\forall \underline{u} \in V$ -re és $\lambda \in F$ -re $\underline{u} \cdot \lambda \in V$ $\rightarrow$ a művelet V-re zárt
7. $e \cdot \underline{v} = \underline{v}$ $\exists e \in F$ $\forall \underline{v}$ -re $\rightarrow$ egységelem $\exists$ -e
8. $(\lambda \cdot \mu) \cdot \underline{v} = \lambda \cdot (\mu \cdot \underline{v})$ $\forall \lambda, \mu \in F$ $\forall \underline{v} \in V$ -re
9. $(\lambda + \mu) \cdot \underline{v} = \lambda \cdot \underline{v} + \mu \cdot \underline{v}$ $\forall \lambda, \mu \in F$ $\forall \underline{v} \in V$ -re
10. $\lambda \cdot (\underline{u} + \underline{v}) = \lambda \cdot \underline{u} + \lambda \cdot \underline{v}$ $\forall \lambda \in F$ $\forall \underline{u}, \underline{v} \in V$ -re

Definíció:Vektorrendszer

V vektortér $\underline{v_1}, \underline{v_2}, \cdots, \underline{v_n} \in V \quad \{\underline{v_1}, \underline{v_2}, \cdots, \underline{v_n}\}$

Definíció: Lineáris kombináció

$\underline{v_1}, \underline{v_2}, \cdots, \underline{v_n} \in V \;\; ; \;\; \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in F$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha i \cdot \underline{v_i} = \alpha_1 \cdot \underline{v_1} + \alpha_2 \cdot \underline{v_2} + \cdots + \alpha_n \cdot \underline{v_n} \in V$$

Triviális eset:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \underline{v_i} = 0$$

Definíció: Lineáris burkoló

$\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n} \in \boldsymbol{V}$

$\{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\} = \{\sum \alpha_i \cdot \underline{v_i} | \alpha_i \in F\} = \underline{v_i}, \ldots, \underline{v_n}$

Pl. $V^3 \to \underline{i}, \underline{j}, \underline{k}, \;\; \{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\} = V^3$

Definíció: Lineárisan független rendszer

$\{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\} \in V$ lineárisan független, ha $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \underline{v_i} = \underline{0} \to \alpha_i = 0 \;\; (i = 1, \ldots, n)$

Definíció: Lineárisan függő rendszer

$\{\underline{v_i}, \ldots, v_n\} \in V$ lineárisan függő, ha

$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \underline{v_i} = \underline{0}$ és $\exists \;\; \alpha_k \neq 0 \;\; (k = 1, \ldots, n)$ azaz létezik nem triviális lineáris kombináció, amely 0-t adja.

Pl. $\alpha_j \neq 0; \;\; \alpha_j \cdot \underline{v_j} = -\sum_{i=1, i \neq j}^{n} \alpha_i \cdot \underline{v_i} \to \underline{v_j} = -\frac{1}{\alpha_j} \cdot \sum_{i=1, i \neq j}^{n} \alpha_i \cdot \underline{v_i}$

Tétel: Egy vektorrendszer akkor és csak akkor függő, ha valamelyik vektor kifejezhető a többi vektor lineáris kombinációjaként.

Definíció: Generátorrendszer

$\{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\} \in V$ és $\{\overline{\underline{v_1}, \underline{v_2}, \ldots, \underline{v_n}}\} = V$ vagyis $\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}$ vektorok lineáris kombinációjaként az egyik V vektortér előáll.

Definíció: Bázis

$\{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\} \in V$ bázis, ha lineárisan független és generátorrendszer.

Tétel: Egy vektorrendszer bázis, ha vektorterének ($\{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\} \in V$ bázis V-ben) akkor és csak akkor, ha $\exists \underline{v} \in V \to = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \underline{v_i}$ egyértelműen.

Tétel: Kicserélési tétel

Ha V-ben létezik két bázis: $\{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ és $\{\underline{u_1}, \ldots, \underline{u_s}\} \to r = s$

Tétel: Dimenziótétel

Ha $\exists\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_r\} \in V$ bázis, akkor a rendszer vagy bázis elemszáma a dimenzió,

$$\dim V = r$$

Pl. $\mathbb{C}^4$ a $\mathbb{C}$ felett, vagy $\mathbb{R}^4$ $\mathbb{R}$ felett 4 dimenziós vektortér

Definíció: Ha a $\mathbb{C}$ $[a,b]$ -ban nem $\exists$ végesszámú bázis, akkor nem véges dimenziójú térről beszélünk.

Definíció: Altér

V vektortér F felett $U \subseteq V$ altér, ha U maga is vektortér ugyanazon műveletre nézve.

$\underline{u}, \underline{v} \in U \rightarrow \underline{u} + \underline{v} \in U$

$\lambda \in F \rightarrow \lambda \cdot \underline{u} \in U$

$\underline{0}$ mindig altér.

Tétel: Ha U_1 és U_2 altér V-ben, akkor $U_1 \cap U_2$ és $U_1 + U_2$ is altér.

12. Euklidészi tér

Értelmezés

V vektortér K számtest felett

Skaláris szorzat $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$ vektorpárhoz hozzárendelünk egy skalárt($k \in K$)

Jelölése ($\underline{v}_1, \underline{v}_2$)

Tulajdonságai:

1. $(\underline{v}_1, \underline{v}_2) = \overline{(\underline{v}_1, \underline{v}_2)}$
2. $(c \cdot \underline{v}_1, \underline{v}_2) = c \cdot (\underline{v}_1, \underline{v}_2)$
3. $(\underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{v}_3) = (\underline{v}_1, \underline{v}_3) + (\underline{v}_2, \underline{v}_3)$
4. $(\underline{v}, \underline{v}) \geq 0$ és $(\underline{v}, \underline{v}) = 0 \leftarrow\rightarrow \underline{v} = \underline{0}$

Definíció: Euklidészi tér

Olyan vektortér, amelyben értelmezve van a skaláris szorzat.

Példák:

1. $\mathbb{R}^n = \{\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}\}$ $(\underline{x}, \underline{y}) := \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$
2. $\mathbb{C}^n = \{\underline{c} = (x_1, \ldots, x_n) | c_i \in \mathbb{C}\}$ $(\underline{c}, \underline{d}) := \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot \overline{d_k}$
3. $C[a,b]$ = { f folytonos [a,b]-n}

   $(f, g) := \int_a^b f(x) g(x) dx$

   Bizonyítás:

   $f \in C[a,b]$ az első 3 tulajdonság a határozott integrál definíciója és tulajdonságai alapján következik

4. a) $(f, f) \geq 0$ $\int_a^b f^2(x) dx \geq 0$
5. b) $f(x) = 0 \leftarrow\rightarrow (f, f) = 0$ $f \neq 0 \rightarrow \int_a^b f^2(x) dx > 0$

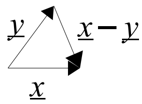
Definíció: Norma

Legyen E Euklidészi tér, ekkor $\|\underline{v}\| := \sqrt{(\underline{v}, \underline{v})}$ a norma.

Pl. $\|\underline{x}\| = \sqrt{(\underline{x}, \underline{x})}$ $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ $\|\underline{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

Definíció: Távolság

$$d(\underline{v_1},\underline{v_2}):=\|\underline{v_1}-\underline{v_2}\|$$



$d(\underline{x},\underline{y})=\|\underline{x}-\underline{y}\|$ = távolság a 2 vektor végpontja között

Definíció: Merőlegesség: 2 vektor merőleges $(\underline{v_1}\perp\underline{v_2})$,ha $(\underline{v_1},\underline{v_2})=0$

Tétel: Cauchy-Bunyakovszkij-egyenlőtlenség

Legyen E Euklidészi tér; $\underline{v_1},\underline{v_2}\in E\rightarrow|(\underline{v_1},\underline{v_2})|\leq\|\underline{v_1}\|\cdot\|\underline{v_2}\|$

Bizonyítás: E valós $c\in\mathbb{R}$

$$(\underline{v_1}-c\underline{v_2},\underline{v_1}-c\underline{v_2})\geq 0$$
$$(\underline{v_1},\underline{v_1})-2\cdot c(\underline{v_1},\underline{v_1})+c^2(\underline{v_2},\underline{v_2})\geq 0$$
$$\|\underline{v_1}\|^2-2\cdot c(v_1,v_2)+c^2\cdot\|\underline{v_2}\|^2\geq 0$$

$\rightarrow$ c-nek másodfokú polinomja, teljesül ha $D\leq 0$

$$D=4\cdot(\underline{v_1},\underline{v_2})^2-4\cdot\|\underline{v_1}\|^2\cdot\|\underline{v_2}\|^2\leq 0$$
$$|(\underline{v_1},\underline{v_2})|\leq\|\underline{v_1}\|\cdot\|\underline{v_2}\|$$

Definíció: Bázis Euklidészi-térben

n-dimenziós Euklidészi térben E^n

$B=\{\underline{e_1},\ldots,\underline{e_n}\}$ bázis

Ortonormált bázis

$$(\underline{e_i},\underline{e_j})=\begin{cases}1 & \text{ha, } i=j\\ 0 & \text{ha, } i\neq j\end{cases}\Bigg|\longleftrightarrow\quad \begin{matrix}\|\underline{e_i}\|=1\\ \underline{e_i}\perp\underline{e_j}\ \ (i\neq j)\end{matrix}$$

Pl. 3-dimenziós valós vektortér $\{\underline{i},\underline{j},\underline{k}\}$ ortonormált bázis

Tétel: Gram-Schmidt-féle ortogonizálási eljárás

$B=\{\underline{b_1},\ldots,\underline{b_n}\}$ bázis E^n -ben $\rightarrow$ $\exists$ $C=\{\underline{c_1^*},\underline{c_2^*},\ldots,\underline{c_n^*}\}$

ortonormált bázis, ahol $\underline{c_1}\in\{\overline{\underline{b_1}}\};\ c_2\in\{\overline{\underline{b_1},\underline{b_2}}\};\ldots;\underline{c_n}\in\{\overline{\underline{b_1},\ldots,\underline{b_n}}\}$

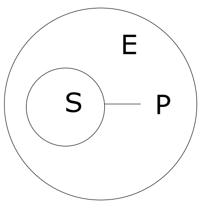
$$\underline{c_1}=\underline{b_1}$$
$$\underline{c_2}=\underline{b_2}+\lambda\cdot\underline{c_1}$$
$$\underline{0}=(\underline{c_1},\underline{c_2})=(\underline{b_2},\underline{c_1})+\lambda(\underline{c_1},\underline{c_1})\rightarrow\lambda=-\frac{(\underline{b_2},\underline{c_1})}{(\underline{c_1},\underline{c_1})}$$

Általában $\underline{c_1},\ldots,\underline{c_{k-1}}$

$$\underline{c_k}=\underline{b_k}+\xi_1\cdot\underline{c_1}+\xi_2\cdot\underline{c_2}+\ldots+\xi_{k-1}\cdot\underline{c_{k-1}}\rightarrow\xi,\ldots,\xi_{k-1}\quad\underline{c_i}\perp\underline{c_k}\quad(i<k)$$
$$\xi_1=-\frac{(\underline{b_k},\underline{c_1})}{(\underline{c_1},\underline{c_1})};\ \ldots\ ;\ \xi_{k-1}=-\frac{(\underline{b_k},\underline{c_{k-1}})}{(\underline{c_{k-1}},\underline{c_{k-1}})}$$

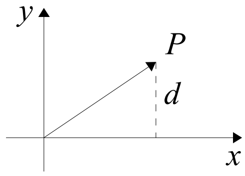
Tétel: Projekció-tétel

E Euklidészi tér, S altere, $P\notin S$



$d(P,S)=inf\ d(\underline{p},\underline{s})\quad \underline{s}\in S$ pont és halmaz távolsága
$d(\underline{p},S)=d(\underline{p},\underline{s_0}) \leftarrow\rightarrow \underline{p}-\underline{s_0}\perp \underline{s}\quad (\underline{s}\in S)$

Pl. V^2-ben



Definíció: Euklidészi tér lineáris operátora

E^n , $B=\{\underline{e_1},\dots,\underline{e_n}\}$ ortonormált bázis
$\underline{v}=v_1\cdot\underline{e_1}+v_2\cdot\underline{e_2}+\dots+v_n\cdot\underline{e_n}$

$$\underline{v}=\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}\qquad \begin{matrix}v_1=(\underline{v},\underline{e_1})\\ \vdots\\ v_n=(\underline{v},\underline{e_n})\end{matrix}$$

Bizonyítás: $(\underline{v},\underline{e_1})=v_1\cdot\underbrace{(\underline{e_1},\underline{e_2})}_{=1}+\underbrace{v_2\cdot(\underline{e_1},\underline{e_2})+\dots+v_n(\underline{e_1},\underline{e_n})}_{0\text{ ,mert } \underline{e_1}\perp\underline{e_2}\perp\dots\perp\underline{e_n}}$

$\underline{x}=(\underline{x},\underline{e_1})\cdot\underline{e_1}+(\underline{x},\underline{e_2})\underline{e_2}+\dots+(\underline{x},\underline{e_n})\cdot\underline{e_n}$
$\underline{y}=(\underline{y},\underline{e_1})\cdot\underline{e_1}+(\underline{y},\underline{e_2})\underline{e_2}+\dots+(\underline{y},\underline{e_n})\cdot\underline{e_n}$

$$(\underline{x},\underline{y})=\sum_{i=1}^{n}(\underline{x},\underline{e_i})\cdot(\overline{\underline{y},\underline{e_i}})=\sum_{i=1}^{n}(\underline{x},\underline{e_i})\cdot(\underline{e_i},\underline{y})$$

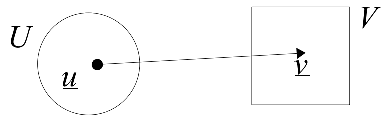
$$\|\underline{x}\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|(\underline{x},\underline{e_i})|^2}$$

$T\in\zeta(E^n,E^n)$

13. **Lineáris operátor**

U,V vektorterek F számtest felett

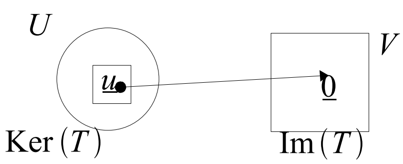
Definíció: Leképezés (operátor)
minden egyes $\underline{u}\in U$ vektorhoz hozzárendel egy $\underline{v}\in V$ vektort:
T: $U\rightarrow V$; $T\cdot\underline{u}=\underline{V}$ T operátor



Definíció: T operátor lineáris, ha

1. $T(\underline{u_1}+\underline{u_2})=T\,\underline{u_1}+T\,\underline{u_2}\quad (\underline{u_1},\underline{u_2}\in U)\rightarrow$ additív tulajdonság
2. $T(\lambda\cdot\underline{u})=\lambda\cdot(T\,\underline{u})\quad (\underline{u}\in U,\lambda\in F)\rightarrow$ homogén tulajdonság

U tárgytér $(\{T\,\underline{u}|\underline{u}\in U\subseteq V\})$ képtér



Definíció: funkcionál
Speciális operátor, az egyik tér ℝ vagy ℂ halmaza

Definíció: Magtér

$\{\underline{u} \in U \quad T\,\underline{u} = \underline{0}\} = \mathrm{Ker}\,(T) \equiv$ T operátor magtere (lsd feljebb)

Jelölés: $\zeta(U, V) \equiv \{T : U \to V |$ lineáris$\}$

Tétel:

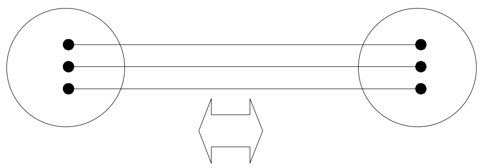
Legyen $T \in \zeta(U, V) \to$ a) képtér, azaz Im(T) altér

b) magtér, azaz Ker(T) altér

c) T egyértelmű leképezés $\leftrightarrow$ Ker(T)= $\underline{0}$

Egyértelmű (1-1 leképezés)

$\forall\, \underline{u_1} \neq \underline{u_2}$ -re igaz, hogy $T\,\underline{u_1} \neq T\,u_2$



Bizonyítás: Tétel bizonyítása

a) Im(T) altér V-ben

I. $\underline{v_1}, \underline{v_2} \in \mathrm{Im}(T) \to \underline{v_1} + \underline{v_2} \in \mathrm{Im}(T)$

$\underline{v_1} = T\,\underline{u_1}, \underline{v_2} = T\,\underline{u_2} \to \underline{v_1} + \underline{v_2} = T\,\underline{u_1} + T\,\underline{u_2} = T\,(\underline{u_1} + \underline{u_2}) \in \mathrm{Im}\,(T)$

II. $\underline{v} \in \mathrm{Im}\,(T), \lambda \in K \to \lambda \cdot \underline{v} \in \mathrm{Im}\,(T)$

$\underline{v} = T\,\underline{u} \to \lambda \cdot \underline{v} = \lambda \cdot (T \cdot \underline{u}) = T\,(\lambda \cdot \underline{u}) \in \mathrm{Im}\,(T)$

b) Ker(T) altér U-ban

I. $\underline{u_1}, \underline{u_2} \in \mathrm{Ker}\,(T) \to \underline{u_1} + \underline{u_2} \in \mathrm{Ker}\,(T)$

$T\,\underline{u_1} = \underline{0}$, $T\,\underline{u_2} = \underline{0} \to T\,(\underline{u_1} + \underline{u_2}) = T\,\underline{u_1} + T\,\underline{u_2} = \underline{0} + \underline{0} = \underline{0}$

$\to \underline{u_1} + \underline{u_2} \in \mathrm{Ker}\,(T)$

II. $\underline{u} \in \mathrm{Ker}\,(T)$, $\lambda \in K \to \lambda \cdot \underline{u} \in \mathrm{Ker}\,(T)$

$T\,\underline{u} = \underline{0} \to \lambda\,(T \cdot \underline{u}) = T\,(\lambda \cdot \underline{u}) = \lambda\,(T\,\underline{u}) = \lambda \cdot \underline{0} = \underline{0} \to \lambda \cdot \underline{u} \in \mathrm{Ker}\,(T)$

c) Ker(T)={0} $\leftrightarrow$ 1-1 leképezés

I. $T(\underline{0}) = \underline{0} \in V \quad \underline{u} - \underline{u} = \underline{0} \in U \quad \underline{v} = T\,\underline{u} \in V$

$T\,(\underline{u} - \underline{u}) = T\,\underline{u} - T\,\underline{u} = \underline{v} - \underline{v} = \underline{0} \in V$

II. $\underline{u_1} \neq \underline{u_2} \to T\,\underline{u_1} \neq T\,\underline{u_2}$

$\underline{u_1} - \underline{u_2} \neq \underline{0} \to T\,\underline{u_1} - T\,\underline{u_2} = T\,(\underline{u_1} - \underline{u_2}) \neq \underline{0}$

III. T 1-1 leképezés $\to$ Ker(T)={$\underline{0}$}

Ha $\mathrm{Ker}\,(T) \neq \{\underline{0}\} \to \exists\, \underline{u} \neq \underline{0} \quad \underline{u} \in \mathrm{Ker}\,(T)$

$T\,\underline{u} = \underline{0}$

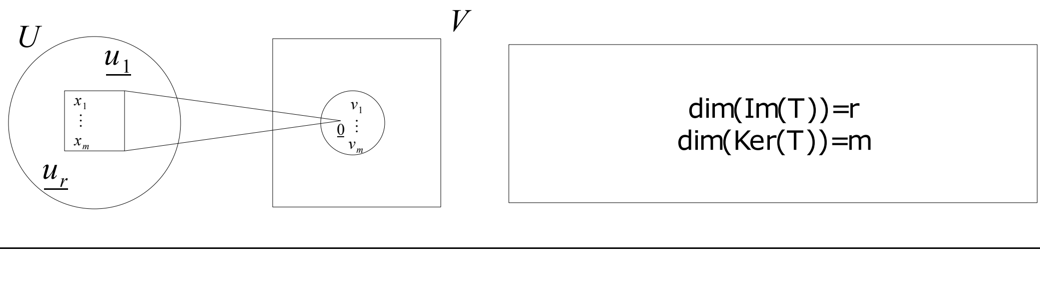
$T\,\underline{0} = \underline{0}$ $\to$ ellentmondás, mert ekkor T már nem 1-1 leképezés

Tétel: Dimenziótétel

$T \in \zeta$: U és V véges dimenziós terek

dim(U)=dim(Im(T))+dim(Ker(T))

Bizonyítás:



$\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ bázis Im(T)-ben

$\{\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n\}$ bázis Ker(T)-ben

$T\,\underline{u}_1 = \underline{v}_1, \dots, T\,\underline{u}_r = \underline{v}_r$

$\downarrow$

$\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_r, \underline{x}_1, \dots, \underline{x}_m\}$ bázis U-ban, r+m elem

dim(U)=r+m

Tétel: Műveletek operátorokkal

a) Összeadás $\quad T_1, T_2 \in \zeta(U, V)$

$(T_1 + T_2)\underline{u} = T_1\underline{u} + T_2\underline{u} \qquad \underline{u} \in U \to T_1 + T_2 \in \zeta(U, V)$

Bizonyítás:

I. $(T_1+T_2)(\underline{u}_1+\underline{u}_2) = T_1\underline{u}_1 + T_1\underline{u}_2 + T_2\underline{u}_1 + T_2\underline{u}_2 = T_1(\underline{u}_1+\underline{u}_2) + T_2(\underline{u}_1+\underline{u}_2) =$
$= (T_1+T_2)\underline{u}_1 + (T_1+T_2)\underline{u}_2$

II. $(T_1+T_2)(\lambda \cdot \underline{u}) = \lambda \cdot \left[(T_1+T_2)\underline{u}\right]$

b) Skalárral való szorzás

$T \in \zeta(U, V) \qquad \lambda \in K \qquad (\lambda T)\underline{u} = \lambda(T\underline{u}) \to \lambda T \in \zeta(U, V)$

c) Szorzás, operátorok szorzata

$T \in \zeta(U, V) \qquad \tilde{T} \in \zeta(V, W)$

$(\tilde{T}T)\underline{u} = \tilde{T}(T\underline{u}) \to \tilde{T}T \in \zeta(U, W)$

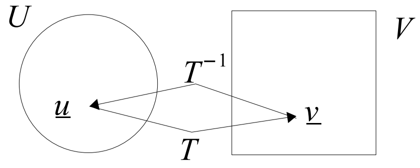
Bizonyítás:

I. $(\tilde{T}T)(\underline{u}_1+\underline{u}_2) = \tilde{T}(T(\underline{u}_1+\underline{u}_2)) = \tilde{T}(T\underline{u}_1 + T\underline{u}_2) = \tilde{T}T\underline{u}_1 + \tilde{T}T\underline{u}_2$
$\to (\tilde{T}T)(\underline{u}_1+\underline{u}_2) = \tilde{T}T\underline{u}_1 + \tilde{T}T\underline{u}_2 \qquad \underline{u}_1, \underline{u}_2 \in U$

II. $\underline{u} \in U$, $\lambda \in K$
$\to (\tilde{T}T)(\lambda\underline{u}) = \tilde{T}(T(\lambda\underline{u})) = \tilde{T}(\lambda(T\underline{u})) = \lambda(\tilde{T}T)\underline{u}$

d) Inverz operátor

$T \in \zeta(U, V)$ és Ker(T)={0} $\to$ T 1-1 leképezés



Definíció: Lineáris operátor mátrixa

$T \in \zeta(U_n, U_m) \qquad dim(U_n) = n \quad , \quad dim(V_m) = m$

$B = \{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ bázis U_n-ben

$F = \{\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_m\}$ bázis V_m-ben

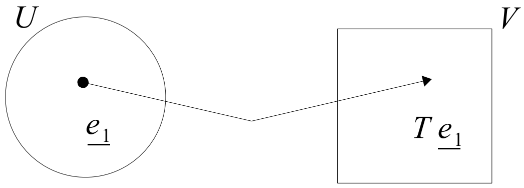
$\forall\, \underline{u} \in U_n \to \underline{u} = u_1 \cdot \underline{e}_1 + \dots + u_n \cdot \underline{e}_n$

u B-re vonatkozó koordinátái

$\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \to$ koordináta oszlopvektor

$\forall\, \underline{v}\, n V_n \to \underline{v} = v_1 \cdot \underline{f}_1 + \dots + v_m \cdot \underline{f}_m$

$\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \qquad T\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} t_{11} \\ \vdots \\ t_{m1} \end{pmatrix} \;;\; \dots \;;\; T\underline{e}_n = \begin{pmatrix} t_{1n} \\ \vdots \\ t_{mn} \end{pmatrix}$



$$\underline{\underline{T}}^{B,F}=\begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{m1} & \cdots & t_{mn} \end{pmatrix}$$ B és F közötti lineáris operátor, mxn-es mátrixa

Tétel:

$T\in\zeta(U_n, V_m)$, B bázis U_n -ben, F bázis V_m -ben.

$$\underline{u}=\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \;;\; \underline{v}=\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \rightarrow \quad T\,\underline{u}=\underline{v}\leftarrow\rightarrow \underline{\underline{T}}^{B,F}\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$$

Bizonyítás: $\underline{u}=u_1\cdot\underline{e_1}+\ldots+u_n\cdot\underline{e_n}$

$$T\,\underline{u}=u_1\cdot\underbrace{T\cdot\underline{e_1}}_{\underline{t_1}}+\ldots+u_n\cdot\underbrace{T\cdot\underline{e_n}}_{\underline{t_n}}=\underline{v}=u_1\cdot\underline{t_1}+\ldots+u_n\cdot\underline{t_n}=\underline{\underline{T}}^{B,F}\cdot\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}=\underline{v}=\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$$

Tétel: Operátor mátrixának tulajdonságai

$T, T_1, T_2\in\zeta(U_n, U_n)$; B egy bázis U_n -ben

a) $\underline{\underline{T_1+T_2}}=\underline{\underline{T_1}}+\underline{\underline{T_2}}$

b) $\underline{\underline{(\lambda T)}}=\lambda\cdot\underline{\underline{T}}$

c) $\underline{\underline{T_1\cdot T_2}}=\underline{\underline{T_1}}\cdot\underline{\underline{T_2}}$

d) Ha $\exists T^{-1}\rightarrow\underline{\underline{(T^{-1})}}=(\underline{\underline{T}})^{-1}$

Tétel: Operátorok sajátértéke és sajátvektora

$T\in\zeta(U, U)$; $\lambda\in K$, $\underline{u}=\underline{s}\in U$

$T\,\underline{u}=\lambda\,\underline{u}$ sajátérték és sajátvektor

Tétel:

$T\in\zeta(U_n, U_n)$; $B=\{\underline{e_1},\ldots,\underline{e_n}\}$ bázis U_n-ben $\rightarrow\underline{\underline{T}}=\underline{\underline{T}}^{B,B}$

Egy $\underline{s}=\begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$, $\lambda\in K$ sajátvektora és sajátértéke T-nek, ha

$\begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$ és λ sajátvektora és sajátértéke $\underline{\underline{T}}$ -nek, azaz

$$T\,\underline{s}=\lambda\,s\leftarrow\rightarrow\underline{\underline{T}}\begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$$

Bizonyítás: Definíciója: $T\,\underline{u}=\underline{v}\leftarrow\rightarrow\underline{\underline{T}}\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

14. Bázistranszformáció

Értelmezés: V_n ; $B_1=\{\underline{b_1},\ldots,\underline{b_n}\}$; $B_2=\{\underline{c_1},\ldots,\underline{c_n}\}$

$\underline{c_j}=\sum_{i=1}^{n} c_{ij}\underline{b_i}$ $(j=1\ldots n)$; $C=(c_{ij})$ B_1-ről B_2-re áttérő bázistranszformáció mátrixa

$T\in\zeta(V_n,V_n)$, $\underline{\underline{T}}^{B_1}$, $\underline{\underline{T}}^{B_2}$

Tétel:

$$\underline{\underline{T}}^{B_1}=C^{-1}_{B_1\to B_2}\cdot\underline{\underline{T}}^{B_2}\cdot C_{B_1\to B_2}$$
$$\underline{\underline{T}}^{B_1}=C_{B_2\to B_1}\cdot\underline{\underline{T}}^{B_2}\cdot C^{-1}_{B_2\to B_1}$$

Definíció: Spektrálfelbontás

A $n\times n$ -es; $\underline{s_1},\ldots,\underline{s_n}$ független sajátvektorai A-nak; $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ sajátértékek

$$A\cdot\underline{s_k}=\lambda\cdot\underline{s_k}\ \ (k=1,\ldots,n)\ \ \underline{s_k}\neq\underline{0}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}=\langle\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\rangle$$

Tétel: $S=(\underline{s_1},\underline{s_2},\ldots,\underline{s_n})$ $A=S\cdot\langle\lambda_1,\ldots,\lambda_n\rangle\cdot S^{-1}$ $\underline{\underline{B}}\cdot B_1=\{\underline{s_1},\ldots,\underline{s_n}\}$

$$B_2=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\qquad \underline{s_j}=\sum_{i=1}^{n} s_{ij}\cdot\underline{c_i}\to S=C_{B_2\to B_1}$$

Példa: A^n kiszámítására kiváló

Tétel: $A^n=S\cdot(\langle\lambda_1,\ldots,\lambda_n\rangle)^n\cdot S^{-1}$

Bizonyítás: $A^2=S\cdot\langle\lambda_1,\ldots,\lambda_n\rangle\cdot\underbrace{S^{-1}\cdot S}_{E}\cdot\langle\lambda_1,\ldots,\lambda_n\rangle\cdot S^{-1}=S\cdot(\langle\lambda_1,\ldots,\lambda_n\rangle)^{?}\cdot S^{-1}$

Indukcióval bizonyítható

Tétel: Összefüggések sajátértékekkel

a) A nxn-es $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$

$det\,A=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3\cdot\ldots\cdot\lambda_n$

Bizonyítás: $K(2)=det(A-\lambda E)=(\lambda_1-\lambda)\cdot\ldots\cdot(\lambda_n-\lambda)$

ha $\lambda=0\to det\,A=\lambda_1\cdot\ldots\cdot\lambda_n$

b) Mátrix nyoma

$Tr(A)=\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn}$

n-edfokú algebrai egyenletre vonatkozó Viet-tétel

15. Önadjungált operátorok sajátértékei, mátrixa

$T\in\zeta(E^n,E^n)$

T^* :T adjungált operátora

$(T\,\underline{x},\underline{y})=(\underline{x},T^*\underline{y})$ $\forall\,\underline{x},\underline{y}\in E^n$

Tétel: $\forall T \in \zeta(E^n, E^n)$ van T* adjungáltja és egyértelműen meghatározható(1db van):

$$T^* \underset{\sim}{y} = \sum_{i=1}^{n} (\underset{\sim}{y}, T\,\underline{e_i})\underline{e_i}$$

Bizonyítás:

a) I. $T^* \in \zeta(E^n, E^n)$

$$T^*(\underset{\sim}{x}+\underset{\sim}{y}) = T^* \cdot \underset{\sim}{x} + T^* \cdot \underset{\sim}{y}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (\underset{\sim}{x}+\underset{\sim}{y}, T\,\underline{e_i})\underline{e_i} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (\underset{\sim}{x}, T\,\underline{e_i})\underline{e_i}}_{T^* x} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (\underset{\sim}{y}, T\,\underline{e_i})\underline{e_i}}_{T^* y}$$

II. $\underbrace{T^*(\lambda \cdot \underset{\sim}{x})} = \lambda \cdot (T^* \underset{\sim}{x})$

$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda\,\underset{\sim}{x}, T\,\underline{e_i})\underline{e_i} = \lambda \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (\underset{\sim}{x}, T\,\underline{e_i})\underline{e_i}}_{T^* x}$$

b) $(T\,\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y}) \stackrel{?}{=} (\underset{\sim}{x}, T^* \underset{\sim}{y})$

$$\underset{\sim}{x} = \sum_{i=1}^{n} (\underset{\sim}{x}, \underline{e_i})(T \cdot \underline{e_i}, \underset{\sim}{y}) = \sum_{i=1}^{n} (\underset{\sim}{x} \cdot \underline{e_i}) \cdot (\overline{\underset{\sim}{y}, T \cdot \underline{e_i}})$$

$(x, T^* \underset{\sim}{y}) = \sum_{i=1}^{n} (\underset{\sim}{x}, \underline{e_i})(\overline{y, T\,\underline{e_i}}) \rightarrow$ közvetlenül $\underset{\sim}{x}$ és $T^* \underset{\sim}{y}$ felbontásából

c) Csak egy van

$$(T\,\underline{e_i}, \underset{\sim}{y}) = (\underline{e_i}, T^* \underset{\sim}{y})$$

$$(\underset{\sim}{y}, T\,\underline{e_i}) = (T^* \underset{\sim}{y}, \underline{e_i})$$

$$T^* \underset{\sim}{y} = \sum_{i=1}^{n} (T^* \underset{\sim}{y}, \underline{e_i}) = \sum (\underset{\sim}{y}, T\,\underline{e_i})\underline{e_i}$$

Definíció: T* mátrixa

$T \in \zeta(E^n, E^n)$, $B = \{\underline{e_i}, \ldots, \underline{e_n}\}$ ortonormált bázis

$$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}^{B,B} = \underline{\underline{T}}^{B} \rightarrow \underline{\underline{T}}^* = \left(\left(\overline{\underline{\underline{T}}^T}\right)\right)$$

Ha valós tér $\rightarrow \underline{\underline{T}}^* = \left(\underline{\underline{T}}\right)^T$

$\underline{\underline{T}} = (t_{ij})$; $t_{ij} = (T\,\underline{e_j}, \underline{e_i})$; $\underline{\underline{T}}^* = (b_{ij})$

$$b_{ij} = (T^*\,\underline{e_j}, \underline{e_i}) = (\underline{e_j}, T\,\underline{e_i}) = (\overline{T\,\underline{e_i}, \underline{e_j}}) = \overline{t_{ij}}$$

Definíció: Önadjungált operátor:

Ha T*=T, akkor T önadjungált operátor. Ha $B = \{\underline{e_i}, \ldots, \underline{e_n}\}$ ortonormált bázis, akkor $\rightarrow$ $\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}^* = \overline{\left(\underline{\underline{T}}\right)}^T$. Valós térben $\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}^T$, vagyis szimmetrikus operátor az önadjungált operátor.

Tétel: Önadjungált operátor sajátértékei valós számok

Bizonyítás: $\lambda \cdot \underline{s} = T \cdot \underline{s} \rightarrow$ $\begin{matrix} (T\,\underline{s}, \underline{s}) = (\lambda\,\underline{s}, \underline{s}) = \lambda \cdot (\underline{s}, \underline{s}) \\ (\underline{s}, T\,\underline{s}) = (\underline{s}, \lambda\,\underline{s}) = \overline{\lambda} \cdot (\underline{s}, \underline{s}) \end{matrix}$ $\rightarrow \lambda = \overline{\lambda} \rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

Tétel: Önadjungált operátor különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorok merőlegesek egymásra

Bizonyítás: $\lambda_1 \neq \lambda_2$; $\underline{s_1}$; $\underline{s_2}$ $(T\,\underline{s_1}, \underline{s_2}) = (\lambda_1 \cdot \underline{s_1}, \underline{s_2}) = \lambda_1 \cdot (\underline{s_1}, \underline{s_2})$

$$(T\,\underline{s_1}, \underline{s_2}) = (\underline{s_1}, T\,\underline{s_2}) = (\underline{s_1}, \lambda_2 \cdot \underline{s_2}) = \overline{\lambda_2}(\underline{s_1}, \underline{s_2}) = \lambda_2(\underline{s_1}, \underline{s_2})$$

$$\lambda_1(\underline{s_1}, \underline{s_2}) = \lambda_2(\underline{s_1}, \underline{s_2})$$

$\underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0}(\underline{s_1}, \underline{s_2}) = 0$

$\rightarrow (\underline{s_1}, \underline{s_2}) = 0 \rightarrow \underline{s_1} \perp \underline{s_2}$

<u>Következmény</u>: Ha $T \in \zeta(E^n, E^n)$ önadjungált operátor n különböző sajátértékkel, akkor $\exists\ B = \{\underline{s_1}, \ldots, \underline{s_n}\}$ ortonormált bázis.

<u>Tétel</u>: Főtengely-tétel
$T \in \zeta(E^n, E^n)$ önadjungált operátor $\exists\ B = \{\underline{s_1}, \ldots, \underline{s_n}\}$ ortonormált bázis akkor

$$\underline{\underline{T}}^B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

16. **Operátorok diagonizálása**

<u>Definíció</u>: E (valós vagy komplex) Euklidészi tér; $T \in \zeta(E, E)$

a) T unitér $\exists T^{-1}$ és $T^* = T^{-1}$
b) T normális $T^* \cdot T = T \cdot T^*$ (felcserélhetőek)
c) T izometria $\exists T^{-1}$ és $(\underline{x}, \underline{y}) = (T\,\underline{x}, T\,\underline{y})\ \forall\ \underline{x}, \underline{x} \in E$ -re
   Megjegyzés: tetszőleges A mátrixra
   a) $\overline{A^T} = A^{-1} \rightarrow$ unitér mátrix
   b) $A \cdot A^* = A^* \cdot A \rightarrow$ normális mátrix

<u>Tétel</u>: $T \in \zeta(E^n, E^n)$, akkor

1. T unitér akkor és csak akkor, ha izometria is
2. $B = \{\underline{e_1}, \ldots, \underline{e_n}\}$ ortonormált bázi $\rightarrow$ T unitér $\longleftrightarrow \underline{\underline{T}}^B = A$
   $A^* = \overline{A^T} = A^{-1}$
3. T normális $\longleftrightarrow A^* \cdot A = A \cdot A^*$

<u>Bizonyítás</u>:

a) Ha T unitér T*=T-1
   $(T\,\underline{x}, T\,\underline{y}) = (\underline{x}, T \cdot T^*\,\underline{y}) = (\underline{x}, T \cdot T^{-1} \cdot \underline{y}) = (\underline{x}, \underline{y})$
b) Ha T izometria $\exists T^{-1}$; $(\underline{x}, \underline{y}) = (T\,\underline{x}, T\,\underline{y})$
   $(\underline{x}, \underline{y}) = (T\,\underline{x}, T\,\underline{y}) = (\underline{x}, T^*T\,\underline{y}) \rightarrow (\underline{x}, \underline{y} - T^*T\,\underline{y}) = 0$
   $(\underline{x}, \underline{y}(I - T^*T)) = 0$, ahol I identikus operátor. $(\underline{\underline{I}} \cdot \underline{X} = \underline{X})$
   $T^*T = I \rightarrow T^* = T^{-1}$

<u>Tétel</u>: Önadjungált vagy unitér operátor normális operátor is
<u>Bizonyítás</u>:

a) $T^* = T \rightarrow T^* \cdot T = T^2 = T \cdot T^*$
b) $T^* = T^{-1} \rightarrow T^* \cdot T = T^{-1} \cdot T = I = T \cdot T^{-1} = T \cdot T^*$

<u>Tétel</u>: Diagonizálási tétel
Egy $T \in \zeta(E^n, E^n)$ operátorhoz akkor és csak akkor létezik $B = \{\underline{e_1}, \ldots, \underline{e_n}\}$ ortonormált bázis, amelyre $\underline{\underline{T}}^B$ ortogonális, ha T normális operátor.
<u>Bizonyítás</u>(vázlat):

a) Ha $\exists\ B = \{\underline{e_1}, \ldots, \underline{e_n}\}$ ortonormált bázis, $\underline{\underline{T}}^B = \langle \lambda_1, \ldots, \lambda_n \rangle = \underline{\underline{T}}$
   $\rightarrow \underline{\underline{T}}^* \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{T}}^*$, mert $\underline{\underline{T}}^* = \overline{(\underline{\underline{T}}^*)^T} = \langle \overline{\lambda_1}, \ldots, \overline{\lambda_n} \rangle$

$\underline{\underline{T}}^* \underline{\underline{T}} = \langle \lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2 \rangle = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{T}}^*$

b) T normális szerkeszthető

$\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ ortonormált bázis, amelyre $\underline{\underline{T}}^B$ diagonális. $B = \{\underline{s}_1, \dots, \underline{s}_n\}$

Sajátvektorokból álló ortonormált bázis. Bizonyítható, hogy ha ilyen rendszer létezik

$$\rightarrow \underline{\underline{T}}^B = \langle \lambda_1, \dots, \lambda_n \rangle$$

Következmények:

1. Ha egy operátor önadjungált vagy unitér operátor, akkor $\exists$ $B = \{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ ortonormált bázis, melyre $\underline{\underline{T}}^B$ ortogonális
2. Valós Euklidészi terekben az unitér operátor egyben ortogonális operátor is.
3. Az unitér operátor minden ortonormált bázist egy másik ortonormált bázisba visz át
$$(\underline{x}, \underline{y}) = (T\,\underline{x}, T\,\underline{y}) \rightarrow (\underline{e}_i, \underline{e}_j) = (T\,\underline{e}_i, T\,\underline{e}_j)$$
4. $A = (\underline{s}_1, \dots, \underline{s}_n)$; $B = \{\underline{s}_1, \dots, \underline{s}_n\}$ ortonormált bázis.

$\underline{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \underline{e}_k$; $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ E^n-ben

$$A \cdot \underline{x} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \cdot \underline{e}_1 + \dots + x_n \cdot \underline{e}_n = \underline{x}$$

Tehát I operátor B-re vonatkozó mátrixa az A mátrix $\rightarrow A^* = \overline{A^T} = A^{-1}$

Vagyis ha A ortogonális mátrix (oszlopai ortogonálisak), akkor a unitér mátrix, speciálisan ha valós $A^T = A^{-1}$
5.

2. Sorozatok,sorok

17. **Számsorok**

Definíció: $a_1, a_2, \dots \in \mathbb{R}$

Formális sor: $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$,ahol a_n=általános tag

Tétel: Algebrai műveletek

a) Összeadás
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$$
b) Számmal való szorzás
$$\lambda \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda \cdot a_n)$$

Tétel: Konvergencia

Definíció: részletösszeg:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad s_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (m = 1, 2, \dots)$$

m-edik részletösszeg $\{s_m\}_1^{\infty}$ számsorozat

a) Ha $\exists \lim_{m\to\infty} s_m = s \in \mathbb{R} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens

b) Ha nem $\exists \lim_{m\to\infty} s_m \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens

Tétel: Konvergens sor elem tulajdonságai

1. Konvergencia szükséges feltétele

   Ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens $\rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

2. Zárójelezés

   Ha $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n1} + a_{n+1} + \ldots + a_{n2} + \ldots = A \in \mathbb{R}$

   $\rightarrow (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n1}) + (a_{n+1} + \ldots + a_{n2}) + \ldots = A \in \mathbb{R}$

3. Véges tag elhagyása és hozzáadása

   Egy sor konvergenciája, illetve divergenciája nem változik, ha végesszámú tagot hozzáadunk, vagy elhagyunk belőle.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n = A \pm B$

   $\rightarrow \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lambda \cdot A$

Definíció: Pozitív tagú sor

$\sum_{n=1}^{\infty} \quad a_n > 0 \quad n = 1,2,\ldots$ konvergens $\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$

Tétel: Majoráns kritérium

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$; $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \quad 0 \le a_n \le c_n$ Ha $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$

Tétel: Minoráns kritérium

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$; $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \quad 0 \le c_n \le a_n$ Ha $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \infty \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$

Tétel: Hányados kritérium

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ (a_n > 0)$ Legyen $l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ ha $\exists \rightarrow$ l<1 sor konvergens, l>1 a sor divergens, l=1 a sor konvergenciája nem határozható meg.

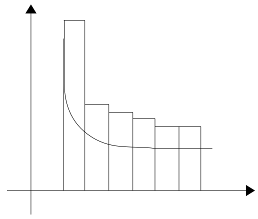
Tétel: Gyök-kritérium

$\sum_{n=1}^{\infty} \ (a_n > 0)$ Ha $\exists \ l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \rightarrow$ l<1 konvergens, l>1 divergens, l=1 a sor konvergenciája nem határozható meg.

Tétel Integrál-kritérium

$0 \le f(x)$ monoton csökkenő függvény $[1,\infty)$ -on $\sum_{k=1}^{\infty} f(k) < \infty \leftarrow\rightarrow \int_1^{\infty} f(x)dx < \infty$

Bizonyítás:



$$f(2) + f(3) + \ldots + f(n) \le \int_1^n f(x)dx \le f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1)$$

Definíció: Abszolút és feltételes konvergencia

1. Abszolút konvergens sor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ abszolút konvergens, ha $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergens
2. Ha $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergens $\rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is konvergens
3. Ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ abszolút konvergens
4. Ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens, de $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ nem, akkor feltételesen konvergens $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Tétel:

1. Ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ sor abszolút konvergens $\rightarrow$ bármely átrendezése $\sum_{n=1}^{\infty} a_n' = A$
2. Ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = B$ feltételesen konvergens $\rightarrow \exists$ $A \in \mathbb{R} \pm \infty$,hogy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n' = A$ $(\neq B)$

Definíció: Váltakozó előjelű sorok $c_n > 0$ $c_1 - c_2 + c_3 - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot c_n$

Tétel: Leibnitz-kritérium $c_1 \geq c_2 \geq \dots$ és $\lim_{n \to \infty} c_n = 0 \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot c_n$ konvergens

18. Függvénysorozat, függvénysorok

Definíció: Függvénysorozat

$$s_0(x), s_1(x), \dots \quad x \in H \qquad \{s_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$$

Definíció: Konvergencia

$x_0 \in H$ pontban konvergens, ha $\{s_k(x_0)\}_k^{\infty} \rightarrow \lim_{k \to \infty} s_k(x_0) = s$ ahol s az adott pontban a függvénysorozat határértéke.

Definíció: Konvergencia-tartomány

$$\{s_k(x)\}_{k=0}^{\infty} \rightarrow KT = \{x : \exists \lim_{k \to \infty} s_k(x) = s(x)\}$$

Definíció: Határfüggvény

$x \in KT \rightarrow \lim_{k \to \infty} s_k(x) = s(x)$, ahol s(x) a sorozat határfüggvénye.

Definíció: Egyenletes konvergencia

$\lim_{k \to \infty} s_k(x) = s(x)$; $x \in KT$; $x_0 \in KT \rightarrow |s_k(x_0) - s(x_0)| < \varepsilon$, ha $k \leq N(\varepsilon)$

N(ε) szám ε-tól és x_0-tól függ és $\forall \varepsilon > 0$ -ra ha igaz, akkor $s_k(x)$ egyenletesen konvergál s(x)-hez H-n

Definíció: Függvénysor

$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ $x \in H \equiv$ függvénysor

Definíció: Konvergencia

A függvénysor $x_0 \in H$ pontban konvergens, ha $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_0) = A$ $A \in \mathbb{R}$

$s_m(x) = \sum_{k=0}^{m} f_k(x)$, $\{s_m(x)\}$ függvénysorozat, akkor igaz, hogy $s_m(x_0) \rightarrow A$

Definíció: Konvergenciatartomány és összegfüggvény

$$KT=\{x \ \exists \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)=f(x)\in\mathbb{R}\}$$, ahol f(x) a sor összegfüggvénye.

Definíció: Egyenletes konvergencia

$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)\rightarrow s_m(x)=\sum_{k=0}^{m} f_k(x)$ Ha $s_m(x)\rightarrow f(x) \quad x\in H$, akkor a függvénysor egyenletesen konvergál f(x)-hez H-n

Definíció: Pontbeli abszolút konvergencia

Ha $\sum_{k=0}^{\infty} |f_k(x_0)|<\infty\rightarrow\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x_0)$ abszolút konvergens x_0 pontban

Definíció: Abszolút egyenletes konvergencia

Ha $\sum_{k=0}^{\infty} |f_k(x)|$ egyenletesen konvergál H-n $\rightarrow\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ sor abszolút egyenletesen konvergens H-n.

Tétel: Ha $\sum_{k=0}^{\infty} |f_k(x)|$ egyenletesen konvergens H-n $\rightarrow\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ is egyenletesen konvergens.

Tétel: Weierstrass-féle kirétrium

$|f_k(x)|<c_k$, $(x\in H, \ k=0,1,2\ldots)$ és $\sum_{k=0}^{\infty} c_k<\infty\rightarrow\sum_{k=0}^{\infty} |f_k(x)|$ egyenletesen konvergens H-n, és $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ abszolút egyenletesen konvergens.

19. Függvénysorok összegfüggvényeinek tulajdonságai

A tételek az egyenletesen konvergens függvénysor összegfüggvényeinek tulajdonságait írják le.

Tétel: Folytonosság

$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)=f(x)$ egyenletesen konvergens $[a,b]$ -n $\rightarrow$

a) Ha $f_k(x)$ függvények folytonosak x_0 -ban $\rightarrow f(x)$ is folytonos x_0 -ban
b) Ha $f_k(x)$ függvények folytonosak $[a,b]$ -n $\rightarrow f(x)$ is folytonos $[a,b]$

Tétel Differenciálhatóság

Ha $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)=f(x) \quad (x\in(a,b))$, $\sum_{k=0}^{\infty} f_k'(x)=g(x)$ (egyenletesen konvergens)
$\rightarrow f'(x)=g(x)$

Tétel: Integrálhatóság

$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)=f(x)$ egyenletesen konvergens $[a,b]$ -n és

$$\exists \int_a^b f_k(x)dx\rightarrow\int_a^b f(x)dx=\sum_{k=0}^{\infty}\int_a^b f_k(x)dx$$

20. **Hatványsor, Taylor-sor**

Definíció: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k \rightarrow$ a sor hatánvysor, a_k együttható, x_0 középpont.

Ha $a_k=1, x_0=0 \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} x^k$

Definíció: Konvergencia-sugár

Cauchy-Hadamard-formula

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k \quad : \quad R=\frac{1}{\lim\limits_{n\rightarrow\infty} \sqrt{|a_n|}} \text{ ha létezik, } \quad R=\frac{1}{\lim\limits_{n\rightarrow\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}} \text{ , ha létezik}$$

Tétel: Konvergencia-tartomány

a) Ha R=0, akkor csak x_0-ban konvergens

b) Ha R=∞, akkor a sor mindenhol konvergens

c) Ha 0<R<∞ $\quad |x-x_0|<R$ *konvergens*, $\quad |x-x_0|>R$ *divergens*, $\quad |x-x_0|=R$ *?*

Bizonyítás: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x-x_0)^k=\sum_{k=0}^{\infty} c_k$, gyök-kritérium alkalmazása

$$\lim_{k\rightarrow\infty} \sqrt[k]{|c_k|}=l=\lim_{k\rightarrow\infty} \sqrt[k]{|a_k|\cdot|x-x_0|^k}=|x-x_0|\cdot\lim_{k\rightarrow\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

$$l=\frac{|x-x_0|}{R}\rightarrow \begin{array}{ll} l<1 & |x-x_0|<R \text{ konvergens} \\ l>1 & |x-x_0|>R \text{ divergens} \\ l=1 & |x-x_0|=R\ ? \end{array}$$

Tétel: Abszolút konvergencia

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n : 0<R\leq\infty, |x-x_0|<R \rightarrow \sum a_n(x-x_0)^n$ abszolút konvergens x-ben

$r<R_0 \quad [x_0-r, x_0+r]\subset(x_0-R, x+r)$ hatványsor abszolút egyenletesen konvergens

$[x_0-r, x_0+r]$ -n. (x_0+r) -ben aszolút konvergens: $\sum |a_n\cdot(x_0+r-x_0)^n|<\infty$

$$|x-x_0|<r\rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}|a_n(x-x_0)^n|=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\cdot|x-x_0|^n\leq\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\cdot r^n<\infty$$

Weierstrass-féle kritérium $\rightarrow \sum_{0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ abszolút egyenletesen konvergens.

Hatványsor minden belső intervallumon abszolút egyenletesen konvergens.

Tétel: Hatványsor összegfüggvénye

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n=f(x) \quad |x-x_0|<R$$

1. f(x) folytonos $K_R(x_0)$-ban
2. Ha (x_0+R) pontban konvergens → f(x) balról folytonos (Abel-tétel)
   Ha (x_0-R) pontban konvergens → f(x) jobbról folytonos
3. f(x) végtelen sokszor differenciálható (x_0-R, x_0+R) -ban

   $$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n(x-x_0)^n)'=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot n\cdot(x-x_0)^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot n\cdot(x-x_0)^{n-1}\rightarrow R'=R$$

   Együtthatók meghatározása

   $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n=f(x) \quad K_R(x_0)$ -ban

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (x-x_0)^{n-1}=a_1+2\cdot a_2\cdot(x-x_0)+\ldots$$

$$a_0=f(x_0)$$
$$a_1=f'(x_0)$$
$$f'(x)=a_1 \rightarrow \quad a_2=f''\frac{(x_0)}{2}$$
$$a_n=f^{(n)}\frac{(x_0)}{n}!$$

$$f(x)=f(x_0)+f'\frac{(x_0)}{1}!(x-x_0)+f''\frac{(x_0)}{2}!(x-x_0)^2+\ldots+f^{(n)}\frac{(x_0)}{n}!(x-x_0)^n$$

<u>Definíció</u>: Taylor-sor

$$f(x)=f(x_0)+f'\frac{(x_0)}{1}!(x-x_0)+f''\frac{(x_0)}{2}!(x-x_0)^2+\ldots+f^{(n)}\frac{(x_0)}{n}!(x-x_0)^n+\ldots$$

$f(x)$ függvény x_0 körüli Taylor-sora

$f(x)$ akárhányszor differenciálható $K_R(x_0)$-ban (R>0)

$\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}}{n}!(x-x_0)^n$ formális hatványsor

Általában

Adott f függvény Taylor-sora

a) konvergens x_0-ban és előállítja f(x)-t

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n=f(x_0)$$

b) divergens $x_0$ban, R konvergencia-sugarú

$$R=\frac{1}{\lim \sqrt{\left|\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\right|}} \qquad f(x)=T_n(x)+R_n(x) \text{ Taylor-tétel}$$

$$T_n(x)=f(x_0)+f'\frac{(x_0)}{1}!(x-x_0)+f''\frac{(x_0)}{2}!(x-x_0)^2+\ldots+f^{(n)}\frac{(x_0)}{n}!(x-x_0)^n \rightarrow$$ Taylor-polinom

$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \rightarrow \xi_n$ az n-dik maradéktag (Lagrange-féle alak)

A Taylor-polinom a Taylor-sor n-dik részletösszege

$$T_n(x) \rightarrow f(x) \quad (n \rightarrow \infty) \leftarrow \rightarrow R_n(x) \rightarrow 0$$

Közelítés hibája

$f(x)$ Taylor-sorába kifejthető $K_R(x_0)$ -ban

$f(x) \sim T_n(x) \quad |f(x)-T_n(x)| \leq \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}$, mert $|f(x)-T_n(x)|=|R_n(x)|$

$M_n=\max_{x\in[a,b]} \frac{|f^{n+1}(x)|}{(n+1)!}\cdot|x-x_0|^{n+1} \leq \frac{M_n\cdot A^{n+1}}{(n+1)!} \quad x\in[a,b] \rightarrow$ kicsi, ha n nagy

Speciális eset

$$f(x)=e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!} \quad x\in\mathbb{R}$$

$$g(x)=e^{-x}=1+\frac{-x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{-x^3}{3!}\ldots+\frac{(-1)^n x^n}{n!} \quad x\in\mathbb{R}$$

Tétel:

a) $f(x) \to f(\lambda x)$, akkor Taylor-sorban x helyére $\lambda \cdot x$ kerül

b) $f(x) \to f(x^2) = f(x_0) + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x^2 - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x^2 - x_0)^n$

21. **Fourier-sor**

Definíció: f(x) 2Π periodikus integrálható [0;2Π]-ban

$f \in \mathbb{R}[2\pi]$

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos kx \, dx \quad k = 0,1,\ldots$$

$$b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin kx \, dx \quad k = 1,2$$

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cdot \cos x + b_1 \cdot \sin x + a_2 \cdot \cos 2x + b_2 \cdot \sin 2x + \ldots = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cdot \cos(k \cdot x) + b_k \cdot \sin(k \cdot x)\right]$$

f Fourier-sora.

Ha x_0-ban Fourier-sor konvergens, akkor összege x_0-ban egyenlő $f(x_0)$-lal.

Fourier-sor divergálhat sok pontban

Tétel: Riemann-Lemma

$$\lim_{k \to \infty} a_k(f) = 0 \quad \lim_{k \to \infty} b_k(f) = 0$$

f 2π periodikus

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \cos(k \cdot x)\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{0+a}^{2\pi+a} f(x) \cdot \cos(k \cdot x)\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(k \cdot x)\, dx$$

$$b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \sin(k \cdot x)\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(k \cdot x)\, dx$$

a) Ha f páros $a_k(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos(k \cdot x)\, dx$, $b_k(f) = 0$

b) Ha f páratlan $a_k(f) = 0$, $b_k(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(k \cdot x)\, dx$

Tétel: Pontonkénti konvergencia

Ha f,f' 2π periodikus, szakaszonként folytonos [0,2π-on, akkor f függvény Fourier-sora x_0-ban konvergál $\frac{f(x_{0+}) + f(x_{0-})}{2}$

Tétel: Szakaszonként folytonos [a,b]-n

f függvény véges sok pontban nem folytonos [a,b]-n. Ha f korlátos is, akkor minden x_0-ban $\exists$ $f(x_{0+})$ és $f(x_{0-})$

Következmény: f,f' szakaszonként folytonos $(f \in R[2\pi])$, akkor f kifejthető Fourier-sorába minden folytonos x_0-ban.

Tétel: Egyenletes konvergencia

f 2π periodikus és 2-szer differenciálható, f'' és integrálható [0,2π]-n, akkor f kifejthető a Fourier-sorába az egész számegyenesen és egyenletesen konvergens.

Bizonyítás:

$$k \geq 1$$

$$a_k(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(k\cdot x)\,dx=\underbrace{\frac{1}{\pi}\left[f(x)\cdot\frac{1}{k}\sin(k\cdot x)\right]_{-\pi}^{\pi}}_{=0}-\frac{1}{k\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin(k\cdot x)\,dx=$$

$$=\frac{1}{k\pi}\left[f'(x)\cdot-\frac{1}{k}\cos(k\cdot x)\right]_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{k\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\cdot\left[-\frac{1}{k}\cos(k\cdot x)\right]dx=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{k^2}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\cos(k\cdot x)\,dx=\underline{-\frac{1}{k^2}\cdot a_k(f'')}$$

$$b_k(f)=\ldots=\underline{-\frac{1}{k^2}\cdot b_k(f'')} \quad \rightarrow \quad |a_k|\leq M\cdot\frac{1}{k^2} \qquad |b_k|\leq M\cdot\frac{1}{k^2}$$

$$\left|\frac{a_0}{2}\right|+\sum_{k=1}^{\infty}|a_k\cos(k\cdot x)+b_k\sin(k\cdot x)|\leq\frac{|a_0|}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|+|b_k|\leq\frac{|a_0|}{2}+M\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2}\right)<\infty\rightarrow$$

Weierstrass-féle kritérium szerint a Fourier-sor egyenletesen konvergens R-n.

Definíció: Fourier-sor komplex alakja

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\cdot e^{jk\cdot x}\rightarrow$$ komplex függvény Fourier-sora

Definíció: 2l periodikus függvény Fourier-sora

$f(x+2l)=f(x)\quad \forall x\in\mathbb{R}\quad l>0$ f integrálható [0,2l]-n

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right)+b_k\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)\right]$$

$$a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right)dx$$

$$b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)dx$$

22. **Többváltozós függvény**

Definíció: $\mathbb{R}^n=\{\underline{x}=(x_1,\ldots,x_n): x_i\in\mathbb{R}\}$

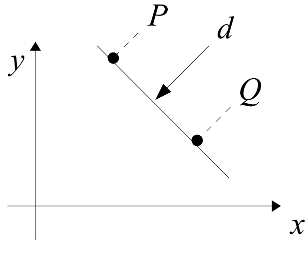
$$\underline{x}+\underline{y} \quad ; \quad \lambda\underline{x} \quad ; \quad (\underline{x},\underline{y})=\sum_{i=1}^{n} x_i\cdot y_i \quad ; \quad \|\underline{x}\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

$\underline{x}$: vektor, $\underline{x}$:pont $P\sim\underline{x}$ $Q\sim\underline{y}$; $d(x,y)=d(P,Q)=\|\underline{x}-\underline{y}\|$

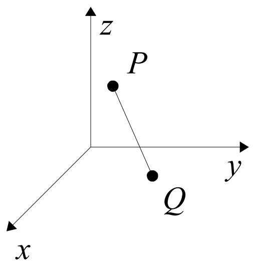
n=1,2,3 $\rightarrow$ geometriai jelentése

n=1:

n=2

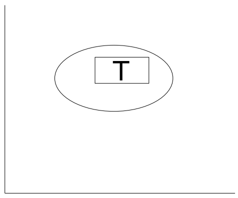


n=3



Tartomány

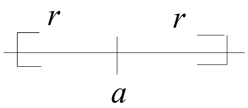
$T\subseteq\mathbb{R}^n$



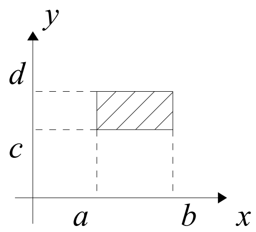
n-dimenziós tégla

$$\{\underline{x}=(x_{1,}\ldots,x_n): a_i\le x_i\le b_i \quad i=1,\ldots,n \quad x_i\in\mathbb{R}\}$$

n=1



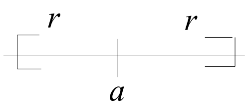
n=2



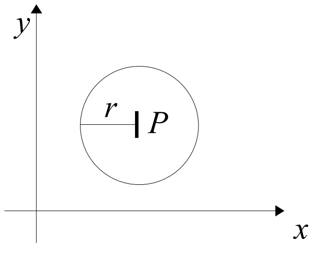
n-dimenziós golyó

$$\{\underline{x}=(x_{1,}\ldots,x_n): \|\underline{x}-\underline{a}\|\le r\}$$

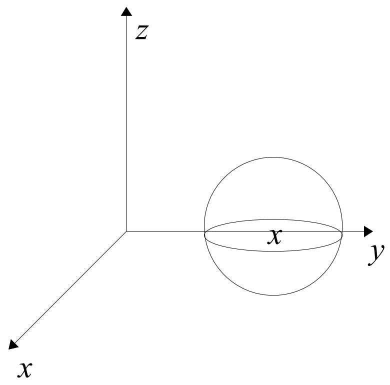
n=1



n=2



n=3

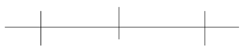


Definíció: Környezet:

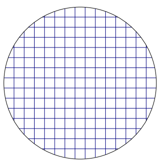
$\varepsilon > 0$; $P = \underline{a}$

$\{\underline{x} = Q : d(P,Q) < \varepsilon\} = \{\underline{x} : \|\underline{x} - \underline{a}\| < \varepsilon\}$

n=1

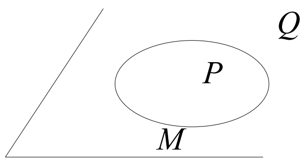


n=2 nyílt körlemez



Definíció: Belső pont

$T \subseteq \mathbb{R}^n$



P: T belsőpontja, ha $\exists\ K_\varepsilon(P) \subset T$

Definíció: Külső pont

Q T külső pontja, ha $\exists\ K_\varepsilon(Q) : K_\varepsilon(Q) \cap T = 0$

Definíció: Határpont: M T határpontja, ha $\forall\ \varepsilon > 0$ -ra $K_\varepsilon(M)$ van belső és külső pont.

Definíció: Nyílt tartomány

T nyílt tartomány, ha $\forall$ pontja belső pont

Pl.: $(x-1)^2 + (y-1)^2 < 1 \rightarrow$ körvonal $\not\subset T$

Definíció:Zárt tartomány

T zárt tartomány, ha komplementere $\mathbb{R}^n \setminus T$

Pl.: $k = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ $\overline{k} = \mathbb{R}^2 \setminus k$

$T^0 \rightarrow T$ belső pontjainak halmaza

front T $\rightarrow$ határpontok halmaza

T lezártja $[T] \to T^0 \cup front\, T$

<u>Definíció</u>: <u>Korlátos tartomány</u>

$T \subseteq \mathbb{R}^n$,ha $\exists\ K_r(P) \supseteq T$

<u>Definíció</u>: <u>Pontsorozat konvergenciája</u>

$\underline{x_k} = P_k \subset \mathbb{R}^n (k=0,1,\ldots)$; $\underline{a} = P \subset \mathbb{R}^n$

$\underline{x_k} \to \underline{a} (k \to \infty)$ $\lim\limits_{k\to\infty} \underline{K_k} = \underline{a}$, $\lim\limits_{k\to\infty} P_k = P$, ha $d(P_k, P) \to 0\ (k \to \infty)$

vagyis $\|\underline{x_k} - \underline{a}\| \to 0\ (k \to \infty)$

n=1 számsorozat határértéke

<u>Tétel</u>:

$\underline{x_k} = (x_{1k}, x_{2k}, \ldots, x_{nk})$; $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$

$$\lim_{k\to\infty} \underline{x_k} = \leftarrow\rightarrow \quad \begin{matrix} x_{1k} \to a_1 \\ \vdots \\ x_{nk} \to a_n \end{matrix} \quad k \to \infty$$

$\underline{x_k} \to \underline{a} : \|\underline{x_k} - \underline{a}\| \to 0$, $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_{ik} - a_i)^2} \to 0 \leftarrow\rightarrow x_{ik} \to a_i\ (k \to \infty, i=1,\ldots,n)$

<u>Definíció</u>: <u>Torlódási pont</u>

$D \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$ $\underline{a}$ D-nek torlódási pontja, ha $\exists\ \underline{a_n} \subset D\ (n=1,2,\ldots)$ $\underline{a_n} \to \underline{a}$ $\underline{K}$

$\forall$ belső pont torlódási pont + határpontok is, külső pontok nem

<u>Definíció</u>: <u>n-változós valós függvények</u>

$D \subseteq \mathbb{R}^n$; $f: D \to \mathbb{R}^n$; $f(x) \equiv x \to f(x) \in \mathbb{R}$; $\forall\ \underline{x} \in D$ vektorhoz hozzárendelünk egy valós számot. D értelmezési tartomány, f($\underline{x}$) skalárvektor függvény, f(p) pontfüggvény, $f(x_1, \ldots, x_n)$ többváltozós valós függvény

Grafikonja: $f(x_1, \ldots, x_n) = f(\underline{x}),\ \underline{x} \in D$

$G = \{(f(\underline{x}), x_1, \ldots, x_n) \cdot \underline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in D\}$

<u>Definíció</u>: <u>Összetett függvény</u>

n=2 $f(x, y)$; $x = X(u, v)$, $y = Y(u, v)$, ahol $u, v \in D_{u,v}$ $f(x(u,v), y(u,v))$

n=3 $f(x, y, z)$; $x = x(u, v, t)$, $y = y(u, v, t)$, $z = z(u, v, t)$ ahol $u, v, t \in D$ $f(x(u,v,t), y(u,v,t), z(u,v,t))$

<u>Definíció</u>: <u>Határértékszámítás</u>

f $D \to \mathbb{R}$ $D \subseteq \mathbb{R}^n$ $\underline{a} \in D^T$ (torlódási pont) $A \in \mathbb{R}$, vagy $\pm\infty$

$\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{a}} [f(\underline{x})] = A$,ha $\forall\ \underline{x_k} \to \underline{a}$ $(\underline{x_k} \in D, \underline{x_k} \neq \underline{a}) \to f(\underline{x_k}) \to A$ $(k \to \infty)$

<u>Tétel</u>: <u>Műveletek</u>

1. $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{a}} [\lambda \cdot f(\underline{x})] = \lambda \cdot \lim\limits_{\underline{x}\to\underline{a}} f(\underline{x})$
2. $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{a}} [f(\underline{x}) \pm g(\underline{x})] = \lim\limits_{\underline{x}\to\underline{a}} f(\underline{x}) \pm \lim\limits_{\underline{x}\to\underline{a}} g(\underline{x})$
3. $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{a}} [f(\underline{x}) \cdot g(\underline{x})] = \lim\limits_{\underline{x}\to\underline{a}} f(\underline{x}) \cdot \lim\limits_{\underline{x}\to\underline{a}} g(\underline{x})$
4. $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{a}} \dfrac{f(\underline{x})}{g(\underline{x})} = \dfrac{\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{a}} f(\underline{x})}{\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{a}} g(\underline{x})}$, ha $g(\underline{x}) \to 0 \to \lim\limits_{\underline{x}\to\underline{a}} g(\underline{x}) \neq 0$

Definíció: Folytonosság

$f(\underline{x})$, $\underline{x}\in D\subseteq \mathbb{R}^n$, $\underline{a}\in D$ folytonos $\underline{a}$ -ban, ha $\lim_{\underline{x}\to\underline{a}} f(\underline{x})=f(\underline{a})$

Tétel: Tulajdonságok $f(\underline{x})$ és $g(\underline{x})$ folytonos $\underline{a}$ -ban, akkor

1. $f\pm g$
2. $\lambda\cdot f(\underline{x})$
3. $f(\underline{x})\cdot g(\underline{x})$
4. $\dfrac{f(\underline{x})}{g(\underline{x})}$ $g(\underline{x})\neq 0$ $\rightarrow$ függvények is folytonosak

Tétel:

$f(x,y)$, $x=x(u,v)=\varphi(u,v)$, $y=y(u,v)=\psi(u,v)$

Ha φ és ψ folytonosak $(u_{0,}v_0)$ -ban és $f(x,y)$ folytonos $(\varphi(u_{0,}v_0),\psi(u_{0,}v_0))$ pontban, akkor $g(u,v)$ folytonos $(u_{0,}v_0)$ -ban

Definíció: Végtelen pont

$\underline{a}\in\mathbb{R}^n$ (véges pont), $\underline{b}=(b_{1,}\ldots,b_n)$ $\exists$ $k: b_k=\pm\infty$

$\lim_{\underline{x}\to\underline{b}} f(\underline{x})=A$; példa $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\dfrac{1}{x^2+y^2}=\lim_{x_n\to 0}\lim_{y_n\to 0}\dfrac{1}{x_n^2+y_n^2}=\dfrac{1}{0+\infty}=0$

Tétel: Korlátos, zárt tartományon folytonos függvények tulajdonságai

Ha $f(\underline{x})$ egy D korlátos, zárt tartományon folytonos, akkor

a) korlátos: $|f(\underline{x})|\leq K$ $\underline{x}\in D$, $K\in\mathbb{R}$

b) felvesz maximum és minimum értéket: $\exists\ \underline{x_0}$ $f(\underline{x})\leq f(\underline{x_0})$ $\forall\ \underline{x}\in D$ -re
$\exists\ \underline{x_1}$ $f(\underline{x})\geq f(\underline{x_1})$ $\forall\ \underline{x}\in D$ -re

23. Parciális deriválás

Definíció: $f(\underline{x})$ $D\rightarrow\mathbb{R}$ $(D\subseteq\mathbb{R}^n)$, $\underline{a}\in D\cup D^T$, $\underline{a}=(a_{1,}\ldots,a_{k-1},a_k,a_{k+1},\ldots,a_n)$

$D_k=\{x\in\mathbb{R}:(a_{1,}\ldots,a_{k-1},a_k,a_{k+1},\ldots,a_n)\in D\}$

$f_k(\underline{x})=f(a_{1,}\ldots,a_{k-1},a_k,a_{k+1},\ldots,a_n)$, $x\in D_k$

$f_k(x)$: csak egyváltozós függvény x változó

$\dfrac{d\,f_k(x)}{dx}\rightarrow\lim_{h\to 0}\dfrac{f_k(a_k+h)-f(a_k)}{h}=f_k'(a_k)$

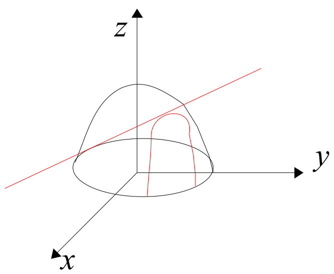
Ha $\exists$ $f_k'(a_k)\rightarrow f(\underline{x})$ x_k változó szerint parciálisan differenciálható $\underline{a}$ -ban:

$f_k'(a_k)=\left.\dfrac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_k}\right|_{\underline{a}}=\dfrac{\partial f(\underline{a})}{\partial x_k}$

$\left.\dfrac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_k}\right|_{x=a}=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a_{1,}\ldots,a_k+h,\ldots,a_n)-f(a_{1,}\ldots,a_k,\ldots,a_n)}{h}$

Definíció: A lim-es kifejezés számlálója a parciális differencia x_k szerint.

Geometriai jelentése



Definíció: Totálisan differencálhatóság

Ha $\exists \left.\frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_k}\right|_{\underline{x}=\underline{a}}$

Definíció: Totális differencia

$f(\underline{x})$, $\underline{a}$, $\underline{h}=(h_{1,}\ldots,h_n)$

$\Delta=f(\underline{a}+\underline{h})-f(\underline{a})=f(a_1+h_{1,}\ldots,a_n+h_n)-f(a_{1,}\ldots,a_n)$

Értelmezés: Totálisan differenciálhatóság

Ha $\exists \left.\frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_k}\right|_{\underline{x}=\underline{a}}$

Definíció: Totális differencia

$f(\underline{x})$, $\underline{a}$, $\underline{h}=(h_{1,}\ldots,h_n)$

$\Delta=f(\underline{a}+\underline{h})-f(\underline{a})=f(a_1+h,\ldots,a_n+h_n)-f(a_{1,}\ldots,a_n)$

Értelmezés: Totálisan differenciálhatóság

$f(\underline{a}+\underline{h})-f(\underline{a})=A_1\cdot h_1+\ldots+A_n\cdot h_n+\varepsilon_1(\underline{h})\cdot h_1+\ldots+\varepsilon_n(\underline{h})\cdot h_n$, ahol $A_{1,}\ldots,A_n$ konstansok; $\varepsilon_1(\underline{h}),\ldots,\varepsilon_n(\underline{h})$ kicsik:

$\lim_{\underline{h}\to\underline{0}}\varepsilon_k(\underline{h})=0 \quad k=1,\ldots,n\to f(\underline{x})$ $\underline{a}$ -ban totálisan differenciálható

$\sum_{k=1}^{n}A_k\cdot h_k=df(\underline{a},\underline{b})$ differenciál

Tétel:

Ha $f(\underline{x})$ totálisan differenciálható $\underline{a}$ -ban, akkor parciálisan differenciálható $\forall$ szerint $\underline{a}$ pontban.

Bizonyítás: $\underline{h}=(0,\ldots,h,\ldots,0)$

$$\frac{\Delta}{h}=\frac{f(a_{1,}\ldots,a_k+h,\ldots,a_n)-f(a_{1,}\ldots,a_n)}{h}=A_k+\underbrace{\varepsilon_k(\underline{h})}_{\to 0}\to A_k=\left.\frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_k}\right|_{x=a}$$

Tétel:

Ha $f(\underline{x})$ $\underline{a}$ pont környezetében parciálisan differenciálható $\forall$ változó szerint és $\left.\frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_k}\right|_{\underline{x}=\underline{a}}$ $(k=1,\ldots,n)$ differenciálhányadosok folytonosak, akkor $f(\underline{x})$ függvény $\underline{a}$ pontban differenciálható

Tétel:

Ha $f(\underline{x})$ totálisan differenciálható $\underline{a}$ -ban $\to f(\underline{x})$ folytonos $\underline{a}$ -ban

Bizonyítás: Totálisan differenciálhatóság definíciója alapján

Tétel: Függvény közelítése differenciállal

$f(\underline{x})$ $\underline{a}$ -ban totálisan differenciálható

$$f(\underline{x})\simeq f(\underline{a})+d\,f(\underline{a},\underline{h})$$

$$f(\underline{x})=f(\underline{a})+\sum_{k=1}^{n}A_k\cdot h_k+\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k(\underline{h})\cdot h_k}_{\to 0}$$

Definíció: Magasabb rendű deriváltak

k-adrendű parciális derivált

$f(\underline{x})=f(x_{1,}\dots,x_n)$, $K(\underline{a})$ -ben $\exists$

$$\frac{f^{(k)}(\underline{x})}{\partial x_{mk}\cdot\partial x_{mk-1}\cdot\ldots\cdot\partial x_{m1}}=\frac{\partial}{\partial x_{mk}}\left(\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_{m2}}\left(\frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_{m1}}\right)\right)\cdots\right)$$

ahol $m_1+\ldots+m_k=k$

Tétel: Vegyes parciális derivált sorrendtől való függetlensége

$f: D\to\mathbb{R}$ $D\subseteq\mathbb{R}^n$, $\underline{a}$ -ban $\exists$ összes -kadrendű parciális deriváltja és ezek a vegyes parciális deriváltak folytonosak $\underline{a}$ -ban, akkor a sorrendjük független.

Definíció: Összetett függvény parciális deriváltjai

$\frac{d\,f(g(t))}{dt}=f'(g(t))\cdot g'(t)\to$ egyváltozós függvény

$g(\underline{t})=f(\underline{\varphi}(\underline{t}))$, $\underline{t}=(t_{1,}\dots,t_m)$, $\underline{\varphi_k}=(\varphi_{1,}\dots,\varphi_n)\to$ f n változós $\varphi_{1,}\dots,\varphi_m$ m változós

Lánc-szabály

$$\left.\frac{\partial g(\underline{t})}{\partial t_i}\right|_{\underline{t}=\underline{u}}=\left.\frac{\partial f(\underline{\varphi}(\underline{t}))}{\partial t_i}\right|_{\underline{t}=\underline{u}}=\sum_{k=1}^{n}\left.\frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_k}\right|_{\underline{x}=\underline{\varphi}(\underline{u})}=\cdots$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left[\left.\frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_k}\right|_{\underline{x}=\underline{\varphi}(\underline{u})}\cdot\left.\frac{\partial\varphi_k(\underline{t})}{\varphi\,t_i}\right|_{\underline{t}=\underline{u}}\right]$$

ahol $\varphi_k(\underline{t})$ totálisan differenciálható $\underline{u}=(u_{1,}\dots,u_m)$ -ban $f(\underline{x})$ differenciálható $\underline{a}=(\varphi_1(\underline{u}),\dots,\varphi_n(\underline{u}))$ -ban $\to g(\underline{t})$ totálisan differenciálható $\underline{u}$ -ban és a képlet fennáll.

24. Kétváltozós függvény Taylor-polinomja

Egyváltozós függvényes esetén

$f(x)$ (n+1)-szer differenciálható $K(x_0)$ -ban

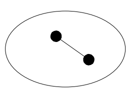
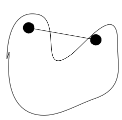
$T_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ és $f(x)\sim T_n(x)$

maradéktag: $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ és $f(x)=T_n(x)+R_n(x)$

$|f(x)-T_n(x)|\le|R_n(x)|\le\ldots$ ezt kell becsülni

Definíció: Konvex tartomány

$\mathbb{R}^2$ -ben. T tartomány konvex, ha T bármely 2 pontját összekötött szakasz is T-ben van.


konvex

konkáv

$\mathbb{R}^n$ -ben $\underline{a}\neq\underline{b}$; $\underline{a},\underline{b}\in\mathbb{R}^n$; $T\subseteq\mathbb{R}^n$; $\underline{s}=\{\underline{a}+t(\underline{b}-\underline{a}):t\in[0,1]\}$

T konvex, ha bármely $\underline{a}$, $\underline{b}\in T$ -re igaz, hogy az őket összekötött s szakasz is eleme T-nek.

Tétel: Lagrange-féle középérték-tétel

$D\subseteq\mathbb{R}^n$ konvex tartomány, $f: D\to\mathbb{R}$ totálisan differenciálható D-ben, akkor

$\forall\, \underline{a}\in D$, $\underline{h}=(h_1,\dots,h_n)$: $\underline{a}+\underline{h}\in D$ $\exists$ $0<\vartheta<1$, hogy

$$f(\underline{a}+\underline{h})-f(\underline{a})=\sum_{i=1}^{n} f_{xi}{}'(\underline{a}+\vartheta\cdot\underline{h})\cdot h_i=df(\underline{a}+\vartheta\cdot\underline{h},\underline{h})$$

Bizonyítás:

$$\begin{matrix}\varphi_1(t)=a_1+t\cdot h_1\\ \vdots\\ \varphi_n(t)=a_n+t\cdot h_n\end{matrix}\quad\rightarrow\quad \begin{matrix}F(t)=f(\underline{a}+t\cdot\underline{h})=f(\underline{\varphi}(t))\quad t\in\mathbb{R}\\ F'(t)=\dfrac{d}{dt}f(\underline{\varphi}(t)) =_{\text{Lánc-szabály}} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_{x_i}{}'(\underline{a}+t\cdot\underline{h})\cdot\underline{h_i}\end{matrix}$$

F(t)-re alkalmazzuk a Lagrange középérték tétel egyváltozós alakját

$$f(\underline{a}+\underline{h})-f(\underline{a})=F(1)-F(0)=F'(\vartheta)=\sum_{i=1}^{n} f_{x_i}{}'(\underline{a}+\vartheta\cdot\underline{h})\cdot h_i$$

Definíció: Magasabb rendű differenciál

$d\,f(\underline{a},\underline{h})=\sum_{i=1}^{n} f_{x_i}{}'(\underline{a})\cdot h_i$, ha f totálisan differenciálható. Ha $f(\underline{x})$ $K(\underline{a})$ környezetében totálisan differenciálható, akkor $df(\underline{x},\underline{h})$ $x\in K(\underline{a})$ rögzített $\underline{h}$ esetén $\underline{x}$ -nak függvénye. Ha $\exists$ $df(\underline{x},\underline{h})$ $\underline{x}$ függvényének differenciálja $\underline{x}$ -ban $\underline{h}$ növekménnyel, akkor

$$d^2f(\underline{x},\underline{h})=d(d(f(\underline{x},\underline{h})))\dots d^n f(\underline{x},\underline{h})=d(d^{n-1}f(\underline{x},\underline{h}))=d^n f(\underline{x},\underline{h})=d(d^{n-1}f(\underline{x},\underline{h}))$$

$H\subseteq\mathbb{R}^n$ $\quad D_H^k=\{f(\underline{x})\text{k-szor totálisan differenciálható D-ben}\}$

$\exists$ $d^k(f(\underline{x},\underline{h}))$ $\forall\,\underline{x}\in D$

Példa: $n\geq1$, $k=2\rightarrow$ $\quad d\,f(\underline{x},\underline{h})=\sum_{i=1}^{n} f_{x_i}{}'(\underline{x})\cdot h_i$

$$d(d\,f(\underline{x},\underline{h}))=\sum_{i=1}^{n} h_i\cdot d(f_{x_i}{}'(\underline{x})\cdot h_i)=\sum_{i=1}^{n} h_i\sum_{k=1}^{n} f_{x_ix_k}{}''(\underline{x})\cdot h_k=\underline{\underline{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f_{x_ix_k}{}''(\underline{x})\cdot h_i\cdot h_k}}$$

Tétel: Taylor-formula

$D\subseteq\mathbb{R}^n$ konvex tartomány $f\in D_D^{k+1}\rightarrow\underline{a},\underline{h}(\underline{a}\in D\,\text{és}\,\underline{a}+\underline{h}\in D)$

$$f(\underline{a}+\underline{h})=f(\underline{a})+\frac{d\,f(\underline{a},\underline{h})}{1!}+\frac{d^2f(\underline{a},\underline{h})}{2!}+\dots+\frac{d^k f(\underline{a},\underline{h})}{k!}+R_n(\underline{a},\underline{h})$$, ahol

$$R_n(\underline{a},\underline{h})=\frac{d^{(k+1)}f(\underline{a}+\vartheta\,\underline{h})}{(k+1)!}$$ valamely $0<\vartheta<1$

$T_n(\underline{a},\underline{h})$: f függvény $\underline{a}$ körüli n-dik Taylor-polinomja, R_n a maradéktag Lagrange-féle alakja. $f(\underline{a},\underline{h})\approx T_n\rightarrow|f(\underline{a}+\underline{h})-T_n|\leq|R_n(\underline{a},\underline{h})|$

2-változós eset $P(x_0,y_0)$ körül.

$$T_0=f(x_0,y_0)$$

$$T_1=T_0+[f_x{}'(x_0,y_0)]\cdot(x-x_0)+[f_y{}'(x_0,y_0)]\cdot(y-y_0)$$

$$T_2=T_1+\frac{1}{2}\left[f_{xx}{}''(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)^2+2\cdot f_{xy}{}''(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)(y-y_0)+f_{yy}{}''(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)^2\right]$$

25. Érintősík definíciója és egyenlete

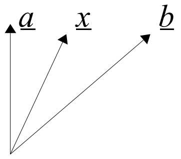
Definíció: Iránymenti derivált:

Egyenes szakasz $\mathbb{R}^n$ -ben $\underline{a}\neq\underline{b}$ $\in\mathbb{R}^n$, $s=\{\underline{x}\in\mathbb{R}^n:\underline{x}=\underline{a}+(\underline{b}-\underline{a})\cdot t\}$ $t\in[0,1]$

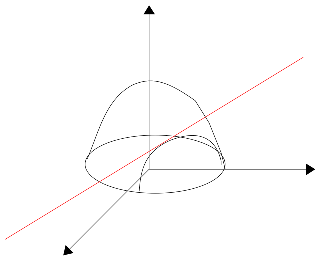
$f:D\rightarrow\mathbb{R}$ $\quad D\subseteq\mathbb{R}^n$; $\underline{a},\underline{b}\in D$; $s\ \left.\frac{\partial f}{\partial s}\right|_{\underline{a}}=\lim_{\underline{x}\rightarrow\underline{a}}\lim_{\underline{x}\in s}\frac{f(\underline{x})-f(\underline{a})}{d(\underline{x},\underline{a})}$, ahol

$d(\underline{x},\underline{a})=\|\underline{x}-\underline{a}\|\rightarrow$ f függvény $\underline{a}$ -beli s irányú iránymenti deriváltja a fenti képlet.

Pl n=2



Geometriai jelentés



Tétel: $f(\underline{x})$; $\underline{x} \in K(\underline{a})$ és $\underline{a}$ -ban totálisan differenciálható, $\underline{a} \neq \underline{b} \in K(\underline{a})$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial s}\right|_{\underline{a}} = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}'(\underline{a}) \cdot \frac{v_i}{\|\underline{v}\|}$$, ahol $\underline{v} = \underline{b} - \underline{a} = (v_1, \ldots, v_n)$

Bizonyítás: $$\frac{f(\underline{x}) - f(\underline{a})}{d(\underline{x}, \underline{a})} = \left[\sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\underline{a}) \cdot t \cdot v_i + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \cdot t \cdot v_i}_{\to 0} \right] \cdot \frac{1}{t \cdot \|\underline{v}\|}$$

$$\underline{x} = (\underline{b} - \underline{a}) \cdot t + \underline{a}$$
$$\underline{x} - \underline{a} = \underline{v} \cdot t \to d(\underline{x}, \underline{a}) = t \cdot \|\underline{v}\|$$

Definíció: Gradiens

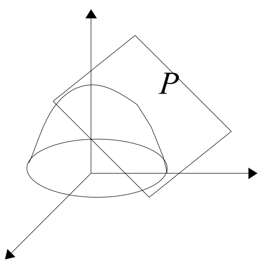
$f(\underline{x})$ totálisan differenciálható $\underline{a}$ -ban $grad\, f(\underline{a}) = \left(\frac{\partial f(\underline{a})}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(\underline{a})}{\partial x_n} \right)$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial s}\right|_{\underline{a}} = \left(grad\, f(\underline{a}), \frac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|} \right) = f_s'(\underline{a})$$

Tétel

Ha $f(\underline{x})$ $\underline{a}$ -ban totálisan differenciálható $\to \exists \left.\frac{\partial f}{\partial s}\right|_{\underline{a}}$ $\forall s$ iránymenti derivált.

Geometriai jelentés



$\underline{x} = (x, y)$ Ha $f(\underline{x})$ totálisan differenciálható $\underline{a} = (a, b)$ $\underline{a}$ -ban és $\exists (\underline{a}, f(\underline{a}))$ $\underline{x} = (x, y) \to$ P-ben vett érintősíkja. Minden érintőegyenes érintősíkban van.

$$f(\underline{x}) \approx f_x'(\underline{a}) \cdot h_1 + f_y'(\underline{a}) \cdot h_2 + f(\underline{a}) \;;$$
$$h = (h_1, h_2) = \underline{x} - \underline{a} = (x - a, y - b)$$
$$\underline{f(x, y) \approx f(a, b) + f_x'(a, b) \cdot (x - a) + f_y'(a, b) \cdot (y - b)}$$

Definíció: Többváltozós függvények implicit alakja

$$u = f(\underline{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$$

Implicit: $g(u, \underline{x}) = 0 \to g(u, x_1, \ldots, x_n) = 0 \to$ g n+1 változós függvény

Tétel: Explicit függvény létezése implicit függvényből

$0=g(u,x)$; $u\in J=(\alpha,\beta)$; $\underline{x}=(x_1,\dots,x_n)\in J\subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt tartomány

Ha $g'u(u,x)\neq 0$ $(u,\underline{x})\in I\times J=G\rightarrow\forall\,\underline{x}\in J\leftarrow\rightarrow\exists u=f(\underline{x}):g(f(\underline{x}),\underline{x})=0$

azaz $\exists$ u-nak $\underline{x}$ szerinti explicit függvénye.

Definíció: Implicit függvény folytonossága

$g(u,\underline{x})=0$ $g_u'(u,\underline{x})\neq 0$ $(u,\underline{x})\in G=I\times J$

$g(u,\underline{x})$ n+1 változós függvény folytonos G-ben $\rightarrow u=f(\underline{x})$ is folytonos J-ben

Definíció: Implicit függvény differenciálhatósága

$g(u,\underline{x})$; $g_u'(u,\underline{x})$; $(u,\underline{x})\in G=I\times J$

1. Ha $\underline{a}\in J$, g totálisan differenciálható $(f(\underline{a}),\underline{a})$ -ban $\rightarrow u=f(\underline{x})$ totálisan differenciálható $\underline{a}$ -ban $\frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_i}=\frac{-g\,x_i'\,f(\underline{a},\underline{a})}{g_u'(f(\underline{a}),\underline{a})}$
2. Ha $\underline{x}\in J$ pontban $g(u,\underline{x})$ r-szer totálisan differenciálható $(f(\underline{x}),\underline{x})$ -ban akkor $u=f(\underline{x})$ is r-szer totálisan differenciálható $\underline{x}$ -ban

Érintősík

$g(x,y,z)=0$; $g'_z(x,y,z)\neq 0$; $K(x_0,y_0,z_0)\equiv P(x_0,y_0,z_0)$ környezete

Ha $g(x,y,z)$ totálisan differenciálható P-ben, akkor $z=f(x,y)$ totálisan differenciálható (x_0,y_0) -ban, akkor $\exists$ P-ben vett érintősík.

$\underline{n}=(g_x'^{(P)},g_y'^{(P)},g_z'^{(P)})=(A,B,C)$ $\underline{n}(\underline{r}-\underline{r_0})=0$

$Ax+By+Cz-(A\cdot x_0+B\cdot y_0+C\cdot z_0)=0$

26. Lokális és globális szélsőérték számítás

Definíció: Lokális szélsőérték

$f:D\rightarrow\mathbb{R}$ $D\subseteq\mathbb{R}^n$; $\underline{a}\in D$ $\underline{a}$ -ban lokális szélsőérték van, ha $\exists$ $K(\underline{a})$

$f(\underline{x})\leq f(\underline{a})$ $\forall\,\underline{x}\in K(\underline{a})\cap D$ lokális maximum

$f(\underline{x})\geq f(\underline{a})$ $\forall\,\underline{x}\in K(\underline{a})\cap D$ lokális minimum

Tétel: Szélsőérték létezésének szükséges és elégséges feltétele

Ha $f(\underline{x})$ az $\underline{a}\in D\cap D^T$ (pl $\underline{a}$ belső pont) $\underline{a}$ -ban van lokális szélsőérték, továbbá $\exists$ $f_{x_i}'(\underline{a})$ $(i=1,\dots,n)\rightarrow f_{x_i}'(\underline{a})=0$ $(i=1,\dots,n)$

Bizonyítás: $\underline{a}(a_1,\dots,a_n)$ -ban lokális szélsőérték

$f_k(x)=f(a_1,\dots,a_{k-1},a_k,a_{k+1},\dots,a_n)$ $\exists$ lokális szélsőérték $x=a_k$ a_k -ban

$\rightarrow\frac{d}{dx}f_k(x)_{x=a_k}=\frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_k}\Big|_{\underline{x}=\underline{a}}$

Tétel: Lokális szélsőérték létezésének elegendő feltétele

$f\in D_k^2\rightarrow$ f 2-szer totálisan differenciálható $\underline{a}$ pont környezetében.

$f_{x_k}'(\underline{a})=0$ $(k=1,\dots,n)$ $grad\,f(\underline{a})=0$, akkor $d^2f(\underline{a},\underline{h})$ indefinit $\underline{a}$ ban, akkor nem létezik lokális szélsőérték, ha pozitív definit, akkor $\underline{a}$ -ban lokális maximum van, ha semi definit, akkor nem tudjuk, másképp kell meghatározni.

Bizonyítás:

Taylor-formula szerint pl b) eset pozitív definit

$f(\underline{a}+\underline{h})-f(\underline{a})=d\,f(\underline{a},\underline{h})+\frac{1}{2}d^2f(\underline{a}+\vartheta\underline{h})$

$\frac{1}{2}d^2f(\underline{a}+\vartheta\,\underline{h})>0$ pozitív definit, $f(\underline{a})<f(\underline{a}+\underline{h})$

Tétel: Kétváltozós függvények lokális szélsőértéke

$f(x,y)$ 2-szer totálisan differenciálható $\underline{a}=(a,b)$ környezetében

$f_x'(\underline{a})=f_y'(\underline{a})=0$. Legyen $A=\begin{pmatrix} f_{xx}''(\underline{a}) & f_{xy}''(\underline{a}) \\ f_{yx}''(\underline{a}) & f_{yy}''(\underline{a}) \end{pmatrix}$ ha det(A)<0

akkor nincs lokális szélsőérték $\underline{a}$ -ban, ha det(A)>0, akkor $f_{xx}''(\underline{a})>0$ akkor $\underline{a}$ -ban lokális minimum, ha $f_{xx}''(\underline{a})<0$ $\underline{a}$ -ban lokális maximum.

Ha det(A)=0, akkor másképp kell eldönteni, hogy $\underline{a}$ -ban mi van.

Bizonyítás: $d^2 f(\underline{a},\underline{h})=\sum\sum f_{x_i x_k}(\underline{a})\cdot h_i\cdot h_k$ $\underline{h}=(h_i,h_k)$, akkor kvadratikus alakja

$A=\begin{pmatrix} f_{xx}''(\underline{a}) & f_{xy}''(\underline{a}) \\ f_{yx}''(\underline{a}) & f_{yy}''(\underline{a}) \end{pmatrix}$ $\lambda_{1,}\lambda_2$ sajátértékei A-nak

$\lambda_1\cdot\lambda_2=det(A)$ .Ha $det(A)<0$ λ_1 és λ_2 ellentétes előjelű $\rightarrow$ indefinit

Ha $det(A)>0\rightarrow\lambda_1$ és λ_2 azonos $\rightarrow\exists$ lokális szélsőérték.

$\lambda_1+\lambda_2=f_{xx}''(\underline{a})+f_{yy}''(\underline{a})$ $\lambda_1\cdot\lambda_2=f_{xx}''\cdot f_{yy}''-(f_{xy}'')^2$

$\rightarrow f_{xx}''(\underline{a})>0\rightarrow f_{yy}''(\underline{a})>0\rightarrow\lambda_1+\lambda_2>0$ $\lambda_1>0$ $\lambda_2>0$

$\rightarrow f_{xx}''(\underline{a})<0\rightarrow f_{yy}''(\underline{a})<0\rightarrow\lambda_1+\lambda_2<0$ $\lambda_1<0$ $\lambda_2<0$

Definíció: Globális szélsőérték

$f(x,y)$, $(x,y)\in D\subseteq\mathbb{R}^2$ D korlátor és zárt

Ha $f(x,y)$ folytonos D-n, akkor Weierstrass II. tétele miatt $\exists Max(f(x,y))=M$, $(x,y)\in D$ illetve $min\, f(x,y)=m$, $(x,y)\in D$

1. lépés D belső pontjaiban lokális szélsőértékek meghatározása (m_k, M_k)
2. lépés D határa zárt görbe $G: y=\varphi(x)$ V : $\begin{matrix} x=r\cdot\cos t \\ y=r\cdot\sin t \end{matrix}$ $\rightarrow$ polár-rendszerben
   $\begin{matrix} max\, f(x,y) \\ y=\varphi(x) \end{matrix}$ $\begin{matrix} min\, f(x,y) \\ y=\varphi(x) \end{matrix}$ $\rightarrow$ feltételes szélsőértékek $y=\varphi(x)$ feltétellel.
   $g(x)=f(x,\varphi(x))\rightarrow M=max\, g(x), m=min\, g(x)$
3. lépés $\begin{matrix} m^*=min(m_{1,}\ldots,m_k,m) \\ M^*=max(M_{1,}\ldots,M_k,M) \end{matrix}$

27. Többváltozós Jordan-féle mérték. Többváltozós függvények integrálja

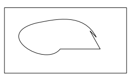
Definíció: Ponthalmaz Jordan-mértéke

Téglatest: $T=\{\underline{x}=(x_{1,}\ldots,x_n): a_i\le x_i\le b_i \;\; i=1,\ldots,n\}$

$T=[a_{1,}b_1]\times[a_{2,}b_2]\times\ldots\times[a_n,b_n]$; $t(T)=\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$

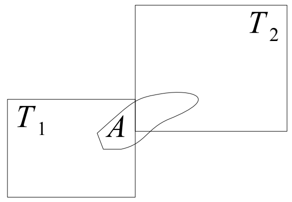
$H\subseteq\mathbb{R}^n$, $H^0\equiv H$ belső pontjainak halmaza, H korlátos

H korlátos: befedhető egy téglatesttel



$A\subset\mathbb{R}^n$ korlátos $\exists T: A\subseteq T$

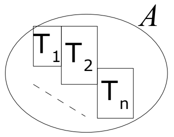
Lefedési módszer: $T_{1,}\ldots,T_n$ $\begin{matrix} \rightarrow A\subseteq\bigcup_{i=1}^{n} T_i \\ \rightarrow T_i^0\cap T_j^0=0 \;\; (i,j=1,\ldots,n) \end{matrix}$



$$K(A)=inf\sum_{i=1}^{n} t(T_i)$$

$$A\subseteq\bigcup_{i=1}^{n} T_i$$

Halmaz belső mértéke



$$T_i\subseteq A \quad (i=1,\dots,n)$$

$$T_i^0\cap T_j^0=0 \quad (i,j=1,\dots,n) \qquad \bigcup_{i=1}^{n} T_i\subseteq A \qquad b(A)=\sup\sum_{i=1}^{n} t(T_i)$$

$$A\supseteq\bigcup_{i=1}^{n} T_i$$

Ha nem létezik egyetlen téglatest sem, amely benne van A-ban, akkor b(A)=0

Mérhető halmaz

Ha K(A)=b(A)=:t(A) Jordan mértéke a halmaznak

Tétel: Legyen $A\subseteq\mathbb{R}^n$ korlátos. A mérhető $\leftarrow\rightarrow$ ha határa nullmértékű halmaz.

Definíció: Nullmértékű halmaz

$$t(H)=0\leftarrow\rightarrow\forall\varepsilon>0 \ \exists T_1,\dots,T_n$$ A fedés-rendszere $$H\subseteq\bigcup_{i=1}^{n} T_i \ , \ \bigcup_{i=1}^{n} t(T_i)<\varepsilon$$

Tétel: Mérték additív tulajdonsága

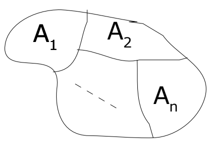
Ha $A_1,\dots,A_m$ mérhetők $\mathbb{R}^n$ -ben, egymásba nem nyílók $(A_i^0\cap A_j^0=0 \ \ \forall i,j$ -re$)$

$\rightarrow A=\bigcup_{i=1}^{m} A_i$ is mérhető $\rightarrow t\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{m} t(A_i)$

Többes integrál

Definíció: Felosztás

A mérhető $\mathbb{R}^n$ -ben



$$A=\bigcup_{i=1}^{n} A_i \qquad A_i^0\cap A_j^0=0 \qquad (i,j=1,\dots,m)$$

$$F_m=\{A_1,\dots,A_m\}$$

Definíció: Halmaz átmérője

$x,y\in A_i$; $d(x,y)\rightarrow\sup_{x,y\in A} d(x,y)=d(A_i)\rightarrow$ halmaz átmérője

$max\, d(A_i)=|F_m|\rightarrow$ felosztás normája $1\leq i\leq m$

$\{F_m\}_{m=1}^{\infty}$ felosztás-sorozat $\rightarrow\forall$ határon finomodó $\rightarrow|F_m|\rightarrow 0 \ \ (m\rightarrow\infty)$

Definíció: Integrálközelítő összeg

$f(\underline{x})=f(x_1,\dots,x_n)$, $\underline{x}\in A$; $F_m=\{A_1,\dots,A_m\}$ finomodó felosztás-sorozat

$\underline{\xi_i}\in A_i \quad (i=1,\dots,n)\to\sigma=b(f,F_m,\underline{\xi_i})=\sum_{i=1}^{n} f(\underline{\xi_i})\cdot t(A_i)$

Definíció: Integrál

Ha $\exists\ I\in\mathbb{R}$,amelyre $I=\lim_{m\to\infty}\sigma(f)$ független F_m -sorozatok $\underline{\xi_i}$ pontok megválasztásától, akkor f integrálható A-n: $I=\int\dots_A\int f(\underline{x})\cdot dx_1\cdot\ldots\cdot dx_n$

Geometriai jelentése

$f(\underline{x})\equiv 1\to\int\dots_A\int f(\underline{x})d\,\underline{x}$ megadja az alaphalmaz mértékét.

Tétel: $A\subset\mathbb{R}^n$ mérhető. Ha A zárt és $f(\underline{x})$ folytonos A-n (tehát korlátos is) és $|f(\underline{x})|\le M$ $\underline{x}\in A$, akkor integrálható $f(\underline{x})$ A-n

Tétel: Integrál tulajdonságai

1. $f\in R(A)$ és $B\subseteq A$ és mérhető, akkor $f\in R(B)$
2. $f\in R(A)$; $A=\bigcup_{i=1}^{n} A_i$; $A_i^0\cap A_j^0=0$; A_i mérhető $\to f\in R(A_i)$ és
   $\int\dots_A\int f=\sum_{i=1}^{n}\int\dots_{A_i}\int f$
3. $f\in R(A)$, $f\in R(B)\to f\in R(A\cup B)$ $\int\dots_{A\cup B}\int f=\int\dots_A\int f+\int\dots_{B\setminus A}\int f$
4. $f_1,f_2,f_3\in R(A)$
   a) $\int\dots_A\int c\cdot f(\underline{x})d\,\underline{x}=c\cdot\int\dots_A\int f(\underline{x})d\,\underline{x}$
   b) $\int\dots_A\int(f_1\pm f_2)=\int\dots_A\int f_1\pm\int\dots_A\int f_2$
   c) $f_1\cdot f_2\in R(A)$
   d) $\frac{f_1}{f_2}\in R(A)$ feltéve $|f_2(\underline{x})|>\delta>0$ $\quad\underline{x}\in A$
5. $f\in R(A)\to|f|\in R(A):|\int\dots_A\int f|\le\int\dots_A\int|f|$
6. $m=\inf_{\underline{x}\in A}(f(\underline{x}))$; $M=¿\,\underline{x}\in A\,f(\underline{x})$; $f\in R(A)\to m\cdot t(A)\le\int\dots_A\int f\le M\cdot t(A)$

28. Kettős integrál kiszámítása

Definíció: $A\in\mathbb{R}^2$, mérhető $f\in R(A)$

$$\int_A\int f(x,y)\,dx\,dy=\int_A\int f(x,y)\,dT \quad ; \quad A=[a,b]\times[c,d]\to\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$$

Tétel: Kiszámítás téglalapon

$A=[a,b]\times[c,d]$; $f(x,y)$ $\quad(x,y)\in A\quad f\in R(A)$

Ha $\exists g(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx$

$$y\in[c,d]\to\int_A\int f(x,y)\,dx\,dy=\int_c^d g(y)\,dy=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy$$

Ha $\exists\int_c^d f(x,y)\,dy$ $\quad\forall\,x\in[a,b]$ -re $\to$ $\int_A\int f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx$

Tétel:

Ha $f(x,y)$ folytonos A-n, akkor $\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$

Következmény: $f(x,y) = g(x) \cdot h(y) \rightarrow$ $g(x)$ integrálható [a,b]-n
$h(y)$ integrálható [c,d]-n

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_a^b \int_c^d g(x) \cdot h(y)\,dy\,dx = \int_a^b \left[g(x) \cdot \left(\int_c^d h(y)\,dy \right) \right] dx$$

$$= \underline{\underline{\int_a^b g(x)\,dx \cdot \int_c^d h(y)\,dy}}$$

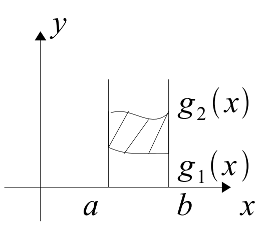
Tétel Kiszámítás normáltartományon

a) $A_x = \{(x,y): a \leq x \leq b$ és $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$
Ha $g_1(x)$ és $g_2(x)$ folytonos [a,b]-n és $f(x,y)$ A_x -n, akkor

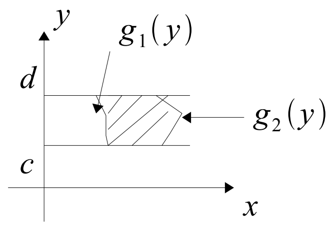
$$\int\int_{A_x} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

b) $A_y = \{(x,y): c \leq y \leq d, g_1(y) \leq x \leq g_2(y)\}$ Ha $g_1(y)$ és $g_2(y)$
folytonos [c,d]-n és $f(x,y)$ A_y -n akkor

$$\int\int_{A^y} f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$



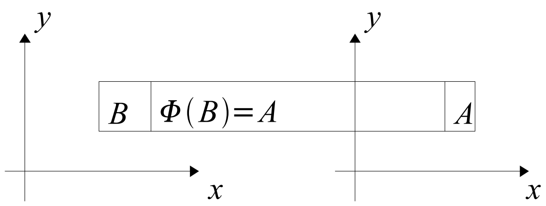
a) részhez



b) részhez

Tétel: Kiszámítás transzformációval

Definíció: Jacobi-determináns



$x = \varphi(u,v)$ $\Phi = (\varphi, \psi)$
$y = \psi(u,v)$ $G \rightarrow (x,y)$ síkba

$\exists$ $\varphi_n, \varphi_v, \varphi_i, \varphi_v$ folytonosak G-n
$\Phi(u,v) \rightarrow (x,y) = (\varphi(u,v), \psi(u,v))$ 1-1 leképezés

$$\Delta(u,v) = \frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \varphi_u(u,v) & \varphi_v(u,v) \\ \psi_u(u,v) & \psi_v(u,v) \end{vmatrix}$$

Tétel: Helyettesítési szabály

$$\int\int_A f(x,y)\,dx\,dy = \int\int_B f(\varphi(u,v), \psi(u,v)) \cdot |\Delta(u,v)|\,du \cdot dv$$

Definíció: Kettős improprius integrál

$$A=\{(x,y): -\infty < x < \infty,\ g_x(x) \le y \le g_2(x)\} \quad ; \quad f(x,y) \in R(A_{ab})$$

$$\int\int_A f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{a\to-\infty}\lim_{b\to\infty}\int\int_{A_{ab}} f(x,y)\,dx\,dy$$

29. Hármas integrál kiszámítása

Definíció: $A \subseteq \mathbb{R}^3$ mérhető

$\int\int\int_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$, $f \in R(A)$, ha $f(x,y,z)=1$

$\int\int\int_A dx\,dy\,dz = t(A) = V$ térfogat.

Tétel: Kiszámítása téglatesten

$$a=[a_1, b_1]\times[a_2, b_2]\times[a_3, b_3]=\{(x,y,z): a_1 \le x \le b_1,\ a_2 \le y \le b_2,\ a_3 \le z \le b_3\}$$

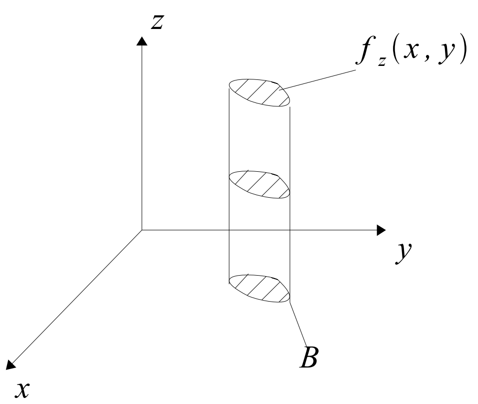
Ha $\exists \int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,dz$ és $\int_{a_2}^{b_2}\left(\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,dz\right)dy$, akkor

$$\int\int\int_A f(x,y,z) = \int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{a_2}^{b_2}\left(\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,dz\right)dy\right)dz$$

Tétel: Ha $f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{a_2}^{b_2}\left(\int_{a_3}^{b_3}\left(\int_{a_1}^{b_1} f(x,y,z)\,dx\right)dy\right)dz$

Tétel: Kiszámítása normáltartományon

a)



$N_{xy}=\{(x,y,z): x,y \in B,\ f_1(x,y) \le z \le f_2(x,y)\}$

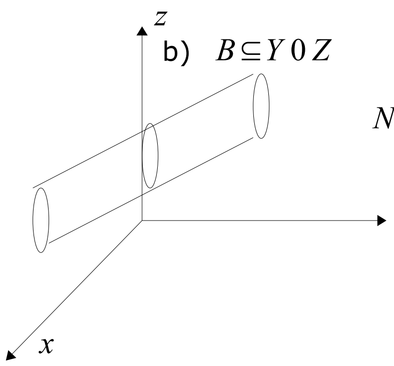
$B \subseteq X0Y$ sík

$f_1(x,y)$; $f_2(x,y)$ folytonos B-n;B korlátos, zárt

Ha

$$f \in R(N_{xy}) \to \int\int\int_{N_{xy}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\int_B \left(\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right)dx\,dy$$

ha $\exists$ belső integrál $\forall (x,y) \in B$ -re. N_{xy} =henger



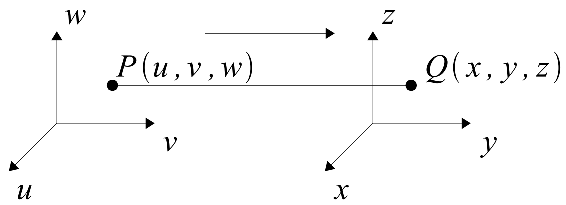
b) $B \subseteq Y0Z$

$$N_{yz}: \quad \int\int\int_{N_{yz}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\int_B \left(\int_{f_1(y,z)}^{f_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx\right)dy\,dz$$

Tétel: Kiszámítása transzformációval

$$\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \qquad \Phi=(\varphi,\psi,\chi)$$

$$x=\varphi(u,v,w)$$
$$y=\psi(u,v,w) \qquad \Phi: P\to Q$$
$$z=\chi(u,v,w)$$



$Q(\varphi(u,v,w),\psi(u,v,w),\chi(u,v,w))$; Φ folytonosan differenciálható G-n, G nyílt tartomány, Φ leképezés 1-1, azaz kölcsönösen egyértelmű.

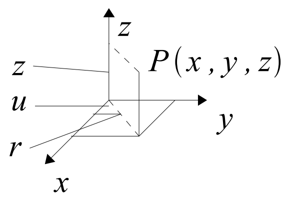
$$\Delta(u,v,w)=\frac{\partial(\varphi,\psi,\chi)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix}\varphi_u' & \varphi_v' & \varphi_w'\\ \psi_u' & \psi_v' & \psi_w'\\ \chi_u' & \chi_v' & \chi_w'\end{vmatrix} \quad \to \text{ Jacobi-determináns}$$

Tétel: $\Phi(\varphi,\psi,\chi): G\to\mathbb{R}^3$,G nyílt Φ folytonosan differenciálható, 1-1 leképezés, B mérhető, $B\subset G$, $\Phi(B)=A$ .Ha $f\in R(A)$, akkor

$$\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iiint_B f(\varphi(u,v,w),\psi(u,v,w),\chi(u,v,w))\cdot|\Delta(u,v,w)|\cdot du\,dv\,dw$$

Henger-koordinátarendszer

$$x=r\cdot\cos\varphi$$
$$y=r\cdot\sin\varphi$$
$$z=z$$

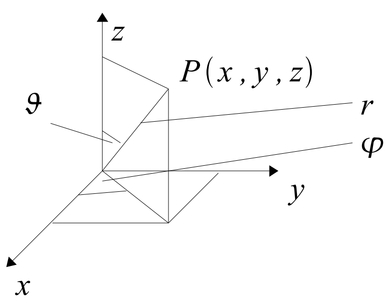


$P\leftarrow\rightarrow(r,\varphi,z)\rightarrow$ P pont henger-koordinátái

Jacobi-determináns:

$$\Delta(r,\varphi,z)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\varphi} & \frac{\partial x}{\partial z}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} & \frac{\partial y}{\partial z}\\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial\varphi} & \frac{\partial z}{\partial z}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\underline{r}$$

Gömb-koordinátarendszer



$$P \longleftrightarrow (r, \varphi, \vartheta) \qquad \begin{aligned} x &= r \sin\vartheta \cos\varphi \\ y &= r \sin\vartheta \sin\varphi \\ z &= r \cos\vartheta \end{aligned}$$

$$\Delta(r,\varphi,\vartheta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & -r\sin\varphi\sin\vartheta & r\cos\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\varphi\sin\vartheta & r\cos\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta & 0 & -r\sin\vartheta \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{\Delta(r,\varphi,\vartheta) = r^2 \sin\vartheta}}$$

Tétel: Többes integrál kiszámítása

n-dimenziós téglatest:

$$T = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_1 \le x_1 \le b_1, \ldots, a_n \le x_n \le b_n\}$$

$$f \in R(T) \quad : \quad \int \ldots \int_T f(\underline{x})\, d\,\underline{x} = \int_{a_n}^{b_n} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(\underline{x})\, d\,x_1 \right) d\,x_2 \right) \ldots d\,x_n$$

30. Hármas integrál geometriai és fizikai jelentése

a) Térfogat

Ha $f \in R(A)$, $f(x,y,z) = 1$, akkor $\iiint_A dx\,dy\,dz = t(A) = V$ térfogat

b) Tömeg

$V \subseteq \mathbb{R}^3$ mérhető $\underline{x} \in V$ pontban vett sűrűség: $\mu(\underline{x}) = \mu(x,y,z)$

V test, $\mu(x,y,z)$ sűrűséggel rendelkezik, tömege:

$m(V) = \iiint_V \mu(x,y,z)\,dV$, ahol $dV = dx\,dy\,dz$

c) Test síkra vonatkozó elsőrendű nyomatéka

I. (y,z) síkra: $\iiint_V x \cdot \mu(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

II. (x,y) síkra: $\iiint_V z \cdot \mu(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

III. (x,z) síkra: $\iiint_V y \cdot \mu(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

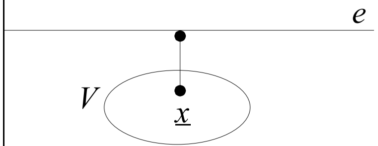
d) Tömegközéppont

$V, \mu(x,y,z)$, $P(x_0, y_0, z_0) \rightarrow$ tömegközéppont

$$x_0 = \frac{\iiint_V x \cdot \mu(x,y,z)\,dV}{m(V)} \quad ; \quad y_0 = \frac{\iiint_V y \cdot \mu(x,y,z)\,dV}{m(V)} \quad ;$$

$$z_0 = \frac{\iiint_V z \cdot \mu(x,y,z)\,dV}{m(V)}$$

e) Másodrendű nyomaték



$$d(\underline{x}, e) = \varrho(\underline{x}) = \varrho(x,y,z)$$

$$\iiint_V \varrho^2(x,y,z) \cdot \mu(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$