

**BME**



BUDAPESTI MŰSZAKI  
MATEMATIKA  
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI  
INTÉZET  
EGYETEM



# Haladó lineáris algebra

BMETE90MX54 (FELSŐBB MATEMATIKA VILLAMOSMÉRNÖKÖKNEK)



## Diagonalizálhatóság

SAJÁTÉRTÉK, SAJÁTALTÉR, KVADRATIKUS ALAKOK, SPEKTRÁLTÉTEL



## Wettl Ferenc

ALGEBRA TANSZÉK



Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér

Ortogonalis és unitér diagonalizálás

Kvadratikus formák

# Ismeretek, képességek, célok

- Sajátérték, sajátaltér, sajátfelbontás, spektrálfelbontás, algebrai és geometriai multiplicitás fogalma és kiszámítása „tankönyvi” módszerrel, Gershgorin-körök, domináns sajátérték, domináns főátlójú mátrix, hatványmódszer.
- Speciális mátrixok sajátértékei, mátrix hatványainak sajátértékei, Cayley–Hamilton-tétel.
- A hasonlóságra invariáns újabb tulajdonságok, feltételek a diagonalizálhatóságra, és az ortogonális (unitér) diagonalizálhatóságra, Schur-felbontás.
- Kvadratikus formák, főtengety-transzformáció, definitiség, főminorok, kongruencia, Sylvester-féle tehetetlenségi törvény.
- Pozitív szemidefinit és definit mátrixok faktorizációi, Cholesky-felbontás.

# Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér

---

## Miért szeretjük a diagonális mátrixokat?

- „úgy” számolunk velük, mint a számokkal: összeadás, kivonás, szorzás, osztás (ha nincs a nevező főátlójában 0), hatványozás:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} / \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 27 \end{bmatrix}.$$

- tetszőleges  $p$  polinomra  $p \left( \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} p(2) & 0 \\ 0 & p(3) \end{bmatrix}$ .
- a standard egységvektorokat a saját konstansszorosukba viszik, így könnyen „látjuk” a mátrixleképezés hatását:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

## Jó bázis választása

- P** Tükrözzük a 3-dimenziós tér vektorait a tér egy megadott síkjára! Válasszunk e lineáris leképezés leírásához egy megfelelő bázist, majd írjuk fel a tükrözés e bázisra vonatkozó mátrixát!
- M** A sík egy bázisa  $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ , a rá merőleges altér egy bázisa  $\{\mathbf{c}\}$ .  
A  $T$  leképezés hatása e vektorokon:  $T\mathbf{a} = \mathbf{a}$ ,  $T\mathbf{b} = \mathbf{b}$  és  $T\mathbf{c} = -\mathbf{c}$ .  
Az  $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$  bázisban  $T$  mátrixa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

E bázisban egy tetszőleges  $(x, y, z)$  vektor tükörképe  $(x, y, -z)$ .

# Lineáris transzformációk sajátvektorai

- D**  $L: \mathcal{V}_{\mathbb{F}}$  vektortér,  $L: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  lineáris transzformáció. Amh az  $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  vektor az  $L$  trafó **sajátvektora**, ha  $L\mathbf{x} \parallel \mathbf{x}$ , azaz ha van olyan  $\lambda \in \mathbb{F}$  szám, melyre  $L\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ .  
Az ilyen  $\lambda$  számot az  $L$  lineáris transzformáció **sajátértékének**, a  $(\lambda, \mathbf{x})$  párt **sajátpárnak** nevezzük.
- m** Ha  $\mathbf{x}$  sajátvektor, akkor minden  $c\mathbf{x}$  ( $c \neq 0$ ) is:

$$L(c\mathbf{x}) = cL\mathbf{x} = c\lambda\mathbf{x} = \lambda(c\mathbf{x}),$$

azaz  $L(c\mathbf{x}) = \lambda(c\mathbf{x})$ .

- Á** **A sajátvektorok alterei:** Ha az  $L$  lin.trafónak  $\lambda$  egy sajátértéke, akkor a  $\lambda$ -hoz tartozó sajátvektorok a nullvektorral együtt alteret alkotnak, mely megegyezik a  $\text{Ker}(L - \lambda I)$  altérrel.

- B**  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  sv. vagy  $\mathbf{x} = \mathbf{0} \iff L\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \iff L\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = \mathbf{0} \iff (L - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \iff \mathbf{x} \in \text{Ker}(L - \lambda I)$ .



- D** Az  $L$  lin.trafó  $\lambda$  sajátértékhez tartozó sajátvektorai és a  $\mathbf{0}$  alkotta alteret a  $\lambda$  **s.é.-hez tartozó sajátaltérnek** nevezzük.
- P**
1.  $L! \mathcal{V}_{\mathbb{F}}$  vektortér,  $I$  az identikus leképezés. Ekkor a tetszőleges  $c \in \mathbb{F}$  számra a  $cI$  leképezésnek a  $\mathcal{V}$  tér minden nemnulla vektora a  $c$  számhoz tartozó sajátvektora.
  2.  $L! \mathcal{V}_{\mathbb{R}}$  a valósok halmazán akárhányszor diffható valós függvények tere és  $D : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}; f \mapsto f'$ .  $D$  sajátvektora  $e^{\lambda x}$ , ami épp a  $\lambda$  sajátértékhez tartozik, mert  $(e^{\lambda x})' = \lambda e^{\lambda x}$ .
  3. A sík  $\alpha \neq k\pi$  szöggel való elforgatásának nincs sajátvektora.
- F** Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér?
1. a sík vektorainak tükrözése egy egyenesre;  $(1, -1)$
  2. a sík vektorainak merőleges vetítése egy egyenesre;  $(1, 0)$
  3. a tér vektorainak forgatása egyenes körül  $\alpha \neq k\pi$  szöggel;  $(1)$
  4. a tér vektorainak merőleges vetítése egy síkra;  $(1, 1, 0)$
  5. a tér vektorainak tükrözése egy síkra.  $(1, 1, -1)$

## Mátrixleképezés sajátértéke, sajátvektora, sajátaltere

- D**  $\mathbb{F}$  test. Amh a  $\lambda \in \mathbb{F}$  szám az  $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$  mátrix **sajátértéke**, ha létezik olyan  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  vektor, melyre  $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ .  
Az ilyen  $\mathbf{x}$  vektorokat az  $\mathbf{A}$  mátrix  $\lambda$  sajátértékhez tartozó **sajátvektorainak**, az általuk a  $\mathbf{0}$  vektorral alkotott alteret az  $\mathbf{A}$  **sajátalterének**, a  $(\lambda, \mathbf{x})$  párokat az  $\mathbf{A}$  **sajátpárjainak** nevezzük.  
 $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$  bal sajátvektor, ha  $\mathbf{y}^T \mathbf{A} = \lambda \mathbf{y}^T$ , azaz ha  $\mathbf{y}$  az  $\mathbf{A}^T$  sajátvektora.
- P**  $(-1, (2, 1))$  és  $(2, (1, 2))$  egy-egy saját párja a  $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$  mátrixnak, míg  $(-1, (2, -1))$  és  $(2, (1, -2))$  egy-egy bal saját párja, mert

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

## Hogyan találjuk meg a sajátértékeket?

- Á  $\lambda$  pontosan akkor sajátértéke  $\mathbf{A}$ -nak, ha  $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ .
- B  $\lambda$  sajátérték, ha  $\exists \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  sv.  $\iff \exists \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \iff \exists \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \mathbf{A}\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = \mathbf{0} \iff (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$  hom. lin. egyenlet-rsz-nek van nemtrivi megoldása  $\iff \mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \neq \{\mathbf{0}\} \iff \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ .
- D  $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ . A  $\chi(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$  polinomot az  $\mathbf{A}$  mátrixhoz tartozó **karakterisztikus polinomnak** nevezik.
- A  $\chi(\lambda) = 0$  egyenletet az  $\mathbf{A}$  mátrix **karakterisztikus egyenletének** nevezzük.
- m Néhol a kar. pol.  $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$ , ami mindig 1-főegyütthatójú, de a konstans tag nem mindig a determináns.

# Karakterisztikus polinom felírása

**P** Határozzuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

mátrixok karakterisztikus polinomját!

**M** Minden  $2 \times 2$ -es mátrixra:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc \\ &= \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) \\ &= \lambda^2 - \text{trace}(\mathbf{A})\lambda + \det \mathbf{A}. \end{aligned}$$

nyom, determináns!

## Karakterisztikus polinom felírása (folyt)

$$\det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & a & b \\ 0 & 1 - \lambda & c \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^3.$$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{C} - \lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} a - \lambda & b & c \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= (a - \lambda)\lambda^2 + c + b\lambda \\ &= -\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c. \end{aligned}$$

## Háromszögmátrixok sajátértékei

**T** A háromszögmátrixok és így a diagonális mátrixok sajátértékei megegyeznek a főátló elemeivel.

**B** A háromszögmátrix  $\rightsquigarrow \mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$  is  $\rightsquigarrow$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda) = 0,$$

aminek a gyökei  $a_{ii}$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Így ezek az  $\mathbf{A}$  sajátértékei.

# Determináns, nyom és a sajátértékek

**T** Ha az  $n$ -edrendű  $\mathbf{A}$  mátrix sajátértékei  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , akkor

$$\det(\mathbf{A}) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$$

$$\text{trace}(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$$

A determináns a konstans tag, a nyom a  $(-\lambda)^{n-1}$  együtthatója a karakterisztikus polinomban.

**B\*** A karakterisztikus polinom gyöktényezős alakja:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \dots (\lambda_n - \lambda)$$

$\lambda = 0$  behelyettesítése után kapjuk, hogy  $\det(\mathbf{A}) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$ .

- $(-\lambda)^{n-1}$  szorzat a determináns kiegészítő determinánsainak összegére bontása alapján csak az  $(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda)$  szorzatból kapható, onnan pedig az épp  $\sum_i a_{ii} = \text{trace}(\mathbf{A})$ .

# Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér

---

Sajátaltér



# Sajátértékek és sajátvektorok meghatározása

m Tankönyvi módszer:

1.  $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$  gyökeinek meghatározása (sajátértékek)
2.  $\forall \lambda: \mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$  bázisának meghatározása (a nulltér nemzérus vektorai a sajátvektorok)

P

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- M
1. felső háromszögmátrix:  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$
  2.  $\lambda = 0$ :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{matrix} \rightsquigarrow t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ :

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow 2x_1 - x_2 - x_3 = 0$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} (s+t)/2 \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Tehát a két sajátaltér  $\text{span}((1, 0, 0))$  és  $\text{span}((1/2, 1, 0), (1/2, 0, 1))$ .

## Karakterisztikus polinom és a racionálisgyök-tétel

$$\text{P } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{M } |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1 - \lambda & 2 \\ 3 & 3 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 4\lambda^2 + 11\lambda + 6$$

- **Racionálisgyök-tétel:** ha  $\frac{p}{q}$  ( $p$  és  $q$  rel. prímek) gyöke az  $a_n\lambda^n + \dots + a_0$  polinomnak, akkor  $p \mid a_0$ ,  $q \mid a_n$ .
- itt lehetséges rac. gyökök:  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ :
- $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$  és  $\lambda_3 = 6$ .

$$- \lambda_1 = \lambda_2 = -1: \mathbf{A} + \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightsquigarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0 \rightsquigarrow \begin{bmatrix} -s - t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$- \lambda_3 = 6: \mathbf{A} - 6\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 2 & -5 & 2 \\ 3 & 3 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{l} x_1 - \frac{2}{3}x_3 = 0 \\ x_2 - \frac{2}{3}x_3 = 0. \end{array} \rightsquigarrow \left( \begin{array}{l} x_3 = 3t \text{ paramé-} \\ \text{terválasztással} \end{array} \right) \begin{bmatrix} 2t \\ 2t \\ 3t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

$$- \text{A sajátalterek: } \text{span} \left( \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right), \text{span} \left( \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right).$$

## $2 \times 2$ -es mátrixok sajátvektorainak szemléltetése

P Határozzuk meg a következő mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}.$$

M

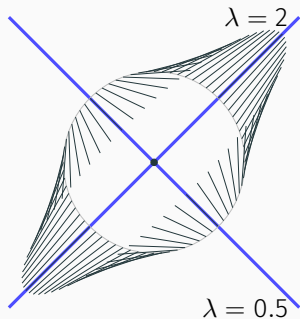
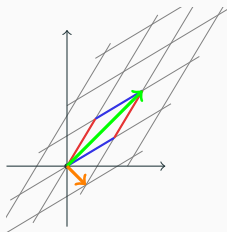
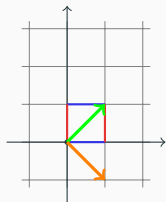
$$|\mathbf{D} - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} -\frac{3}{4} - \lambda & \frac{5}{4} \\ -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

$$\lambda_1 = i: \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} - i & \frac{5}{4} \\ -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} - i \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_2 = -i: \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} + i & \frac{5}{4} \\ -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} + i \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

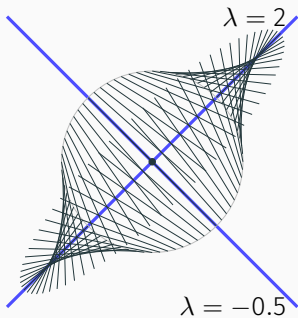
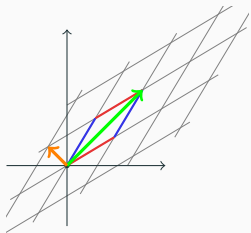
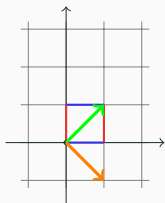
$$- \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}$$

$$\chi_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^2 - \frac{5}{2}\lambda + 1, \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}, \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$



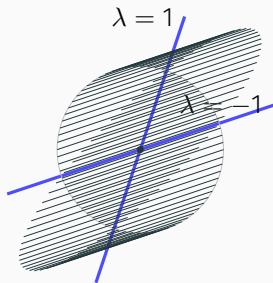
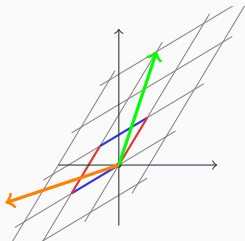
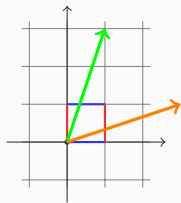
$$- \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$\chi_{\mathbf{B}}(\lambda) = \lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda - 1, \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2}, \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$



$$- \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}$$

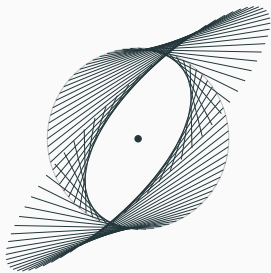
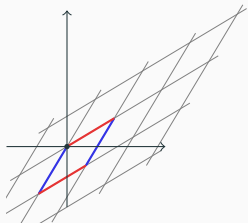
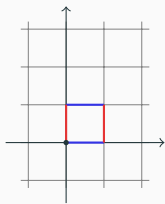
$$\chi_{\mathbf{C}}(\lambda) = \lambda^2 - 1, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$





$$- \mathbf{D} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}.$$

$$\chi_{\mathbf{D}}(\lambda) = \lambda^2 + 1, \quad \lambda_1 = i, \quad \lambda_2 = -i, \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i \\ 1 \end{bmatrix}.$$



# Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér

---

Komplex és többszörös sajátértékek

## A karakterisztikus egyenlet komplex gyökei

- P** A forgatómátrix sajátértékei, sajátvektorai:  $\mathbb{L}!$   $c = \cos \alpha$ ,  $s = \sin \alpha$ ,  $\alpha \neq k\pi$ , azaz  $s \neq 0$ . Határozzuk meg az

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$$

forgatómátrix sajátértékeit és sajátvektorait!

- M** A karakterisztikus egyenlet

$$\begin{vmatrix} c - \lambda & -s \\ s & c - \lambda \end{vmatrix} = (c - \lambda)^2 + s^2 = \lambda^2 - 2c\lambda + 1$$

$$\rightsquigarrow \lambda = \frac{2c \pm \sqrt{4c^2 - 4}}{2} = c \pm is = \cos \alpha \pm i \sin \alpha = e^{\pm i\alpha}$$

-  $\lambda = c + is$  :

$$\mathbf{F} - (c + is)\mathbf{I} = \begin{bmatrix} c - c - is & -s \\ s & c - c - is \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -is & -s \\ s & -is \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightsquigarrow x - iy = 0 \rightsquigarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} it \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

-  $\lambda = c - is$  :

$$\mathbf{F} - (c - is)\mathbf{I} = \begin{bmatrix} c - c + is & -s \\ s & c - c + is \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} is & -s \\ s & is \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightsquigarrow x + iy = 0 \rightsquigarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -it \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$$

## Többszörös gyökök: algebrai és a geometriai multiplicitás

D a  $\lambda$  sajátérték **algebrai multiplicitása**  $m_a(\lambda) =$  „a  $\lambda$  multiplicitása a karakterisztikus polinomban”.

D a  $\lambda$  **geometriai multiplicitása**  $m_g(\lambda) =$  „a  $\lambda$  sajátértékhez tartozó sajátaltér dimenziója”.

P 
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

M  $(4 - \lambda)^3$ , a 4 algebrai multiplicitása 3.

$$\mathbf{A} - 4\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A  $\lambda = 4$  sajátérték geometriai multiplicitása tehát 1.

T  $\forall \lambda$  sajátértékre:  $1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$ .

## Többszörös gyökök: algebrai és a geometriai multiplicitás

$$\mathbf{P} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, (1 - \lambda)^2(2 - \lambda)^2, \text{ gyökei } 1 \text{ és } 2$$

$$\lambda = 1: \mathbf{B} - \lambda \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$m_g(1) = m_a(1) = 2$$

$$\lambda = 2: \mathbf{B} - \lambda \mathbf{I} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$m_g(2) = 1, m_a(2) = 2$$

Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér

---

Mátrixhatványok és speciális mátrixok

## Sajátértékek és a mátrix hatványai

T Az  $\mathbf{A}$  pontosan akkor invertálható, ha a 0 nem sajátértéke.

B  $\det(\mathbf{A} - 0\mathbf{I}) \neq 0 \iff \det(\mathbf{A}) \neq 0 \iff \mathbf{A}$  invertálható

T Ha  $(\lambda, \mathbf{x})$  az  $\mathbf{A}$ -hoz tartozó saját pár, akkor bármely egész  $n$  esetén  $(\lambda^n, \mathbf{x})$  az  $\mathbf{A}^n$ -hez tartozó saját pár, ha  $\lambda^n$  és  $\mathbf{A}^n$  is értelmezve van.

B  $n = 0, n = 1$ : trivi,  $n > 2$ :

$$\mathbf{A}^k \mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^{k-1} \mathbf{x}) = \mathbf{A}(\lambda^{k-1} \mathbf{x}) = \lambda^{k-1}(\mathbf{A} \mathbf{x}) = \lambda^{k-1}(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^k \mathbf{x}.$$

invertálható:  $\mathbf{A} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$ , amiből  $\frac{1}{\lambda} \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{x}$ , azaz  $\lambda^{-1} \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{x}$ .

negatív kitevő:  $\mathbf{A}^k \mathbf{x} = \lambda^k \mathbf{x}$ , amiből  $\lambda^{-k} \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-k} \mathbf{x}$ .



## T **Mátrix hatványainak hatása**

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $(\lambda_1, \mathbf{x}_1), \dots, (\lambda_k, \mathbf{x}_k)$  sajátpárok. Ha  $\mathbf{v} = c_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{x}_2 + \dots + c_k \mathbf{x}_k$ , akkor bármely egész  $m$  esetén

$$\mathbf{A}^m \mathbf{v} = c_1 \lambda_1^m \mathbf{x}_1 + c_2 \lambda_2^m \mathbf{x}_2 + \dots + c_k \lambda_k^m \mathbf{x}_k.$$

$$\text{B } \mathbf{A}^m \mathbf{v} = \mathbf{A}^m \left( \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{x}_i \right) = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{A}^m \mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^k c_i \lambda_i^m \mathbf{x}_i$$

## T Speciális valós mátrixok

- ha  $\mathbf{A}$  szimmetrikus, akkor minden sajátértéke valós,
- ha  $\mathbf{A}$  ferdén szimm., akkor minden s.ért.-e imaginárius,
- ha  $\mathbf{A}$  ortogonális, akkor minden s.é. absz. értéke 1,
- $\mathbf{A}$  pontosan akkor nilpotens, ha minden sajátértéke 0, azaz karakterisztikus polinomja  $\lambda^n$ .

## T Speciális komplex mátrixok sajátértékei

Ha az  $n$ -edrendű komplex  $\mathbf{A}$  mátrix

- önadjungált, akkor minden sajátértéke valós,
- ferdén önadjungált, akkor minden sajátértéke imaginárius,
- unitér, akkor minden sajátértékének 1 az abszolút értéke.

- B** Legyen  $(\lambda, \mathbf{x})$  egy  $\mathbf{A}$ -hoz tartozó sajátpár.  $\mathbf{x}^H \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{x}^H \lambda \mathbf{x} = \lambda \|\mathbf{x}\|^2$ .  
Vegyük mindkét oldal adjungáltját  $\mathbf{x}^H \mathbf{A}^H \mathbf{x} = \bar{\lambda} \|\mathbf{x}\|^2$ . L!  $\lambda = a + ib$ .
- Ha  $\mathbf{A}$  szimmetrikus ( $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ ), akkor  $\lambda = \bar{\lambda}$ , azaz  $a + ib = a - ib$ .
  - Ha  $\mathbf{A}$  ferdén szimmetrikus, azaz  $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$ , akkor  $a + ib = -a + ib$ .
  - $\mathbf{A}$  ortogonális: bármely  $\mathbf{x}$ -re  $\|\mathbf{A}\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ . Ha  $\mathbf{x}$  sajátvektor, akkor  $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{A}\mathbf{x}\| = \|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\|$
  - Ha  $\mathbf{A}^k = \mathbf{O}$ , akkor  $\lambda^k$  sajátértéke  $\mathbf{A}^k = \mathbf{O}$ -nak, így  $\mathbf{A}$ -nak is minden sajátértéke 0. Megfordítás: a Cayley–Hamilton-tételből!

Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér

---

Diagonalizálhatóság

**T** Ha  $A \sim B$ , akkor  $A$  és  $B$  karakterisztikus polinomja, sajátértékei, azok algebrai és geometriai multiplicitásai megegyeznek.

**B**  $A = C^{-1}BC$ :

$$\begin{aligned}A - \lambda I &= C^{-1}BC - \lambda C^{-1}IC \\&= C^{-1}(BC - \lambda IC) \\&= C^{-1}(B - \lambda I)C,\end{aligned}$$

Hasonló mátrixoknak pedig determinánsuk és nullterük dimenziója is azonos.

**K** Lineáris transzformáció karakterisztikus polinomja definiálható.

**D**  $L! \mathcal{V}_{\mathbb{F}}$  véges dimenziós vektortér, az  $L : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  lineáris transzformáció karakterisztikus polinomja = bármely bázisban felírt mátrixának karakterisztikus polinomjával.

# Diagonalizálhatóság

D Az  $\mathbf{A}$  mátrix (az  $L$  lineáris transzformáció) diagonalizálható, ha van olyan bázis, melyben mátrixa diagonális. ( $\mathbf{A}$  esetén ez azt jelenti, hogy hasonló egy diagonális mátrixhoz:  $\Lambda = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$ .)

T **A diagonalizálhatóság szükséges és elégséges feltétele**

Az  $\mathbf{A}$  mátrix (az  $L$  lineáris transzformáció) **diagonalizálható**  
 $\iff$  van  $n$  lineárisan független sajátvektora.

B  $\Lambda = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C} \iff \mathbf{C}\Lambda = \mathbf{A}\mathbf{C}$

$$[\mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{x}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = \mathbf{A}[\mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{x}_n]$$

és e két mátrix  $i$ -edik oszlopa  $\lambda_i \mathbf{x}_i = \mathbf{A}\mathbf{x}_i$ .

# Bal sajátvektorok és a sajátfelbontás diadikus alakja

D **Mátrix sajátfelbontása:**  $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}\mathbf{C}^{-1}$  ( $\mathbf{C}$  oszlopai a sajátvektorok,  $\mathbf{\Lambda}$  diagonális elemei a hozzájuk tartozó sajátértékek)

m  $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det((\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^T) = \det(\mathbf{A}^T - \lambda\mathbf{I}) \rightsquigarrow$  a bal és jobb sajátértékek azonosak

m  $\mathbf{\Lambda}\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A} \rightsquigarrow \mathbf{C}^{-1}$  sorvektorai  $\mathbf{A}$  bal sajátvektorai

D **Sajátfelbontás diadikus alakja:**

$$\begin{aligned}\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}\mathbf{C}^{-1} &= [\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \dots \ \mathbf{x}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1^T \\ \mathbf{y}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{y}_n^T \end{bmatrix} \\ &= \lambda_1 \mathbf{x}_1 \mathbf{y}_1^T + \lambda_2 \mathbf{x}_2 \mathbf{y}_2^T + \dots + \lambda_n \mathbf{x}_n \mathbf{y}_n^T\end{aligned}$$

# Diagonalizálható mátrix polinomja, Cayley–Hamilton-tétel

T Legyen  $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}\mathbf{C}^{-1}$ , ahol  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ , és  $p(x)$  egy tetszőleges polinom. Ekkor

$$p(\mathbf{A}) = \mathbf{C} \begin{bmatrix} p(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p(\lambda_n) \end{bmatrix} \mathbf{C}^{-1}.$$

B A mátrix diagonalizálható  $\rightsquigarrow \mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}\mathbf{C}^{-1} \rightsquigarrow$

$\mathbf{A}^2 = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{\Lambda}\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}^2\mathbf{C}^{-1}$ ...tetszőleges nemnegatív  $k$  egészre

$\mathbf{A}^k = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}^k\mathbf{C}^{-1} \rightsquigarrow$  bármely  $p(x)$  polinomra  $p(\mathbf{A}) = \mathbf{C}p(\mathbf{\Lambda})\mathbf{C}^{-1}$ .

T **Cayley–Hamilton-tétel:** Ha  $\mathbf{A}$  egy tetszőleges négyzetes mátrix, melynek karakterisztikus polinomja  $\chi_{\mathbf{A}}$ , akkor  $\chi_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$ .

m Ha  $\mathbf{A}$  diagonalizálható, akkor trivi, ui. ha  $\chi_{\mathbf{A}}$  az  $\mathbf{A}$  karakterisztikus polinomja,  $\lambda$  egy sajátértéke, akkor  $\chi_{\mathbf{A}}(\lambda) = 0$ .



## Különböző sajátértékek sajátalterei

**T** Ha  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  különböző sajátértékek, akkor a hozzájuk tartozó  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$  sajátvektorok lineárisan függetlenek.

**B\*** TFH összefüggők, és  $\mathbf{x}_i$  a legkisebb indexű, mely csak a kisebb indexűektől függ:  $\mathbf{x}_i = c_1\mathbf{x}_1 + \dots + c_{i-1}\mathbf{x}_{i-1}$ , de az  $i$ -nél kisebb indexűek lineárisan függetlenek.

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \mathbf{A}(c_1\mathbf{x}_1 + \dots + c_{i-1}\mathbf{x}_{i-1}) = c_1\mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \dots + c_{i-1}\mathbf{A}\mathbf{x}_{i-1},$$

$$\lambda_i\mathbf{x}_i = c_1\lambda_1\mathbf{x}_1 + \dots + c_{i-1}\lambda_{i-1}\mathbf{x}_{i-1}.$$

Másrészt:  $\lambda_i\mathbf{x}_i = c_1\lambda_i\mathbf{x}_1 + \dots + c_{i-1}\lambda_i\mathbf{x}_{i-1}$ .

Kivonva:  $\mathbf{0} = c_1(\lambda_i - \lambda_1)\mathbf{x}_1 + \dots + c_{i-1}(\lambda_i - \lambda_{i-1})\mathbf{x}_{i-1}$ ,

Mivel az  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}$  vektorok lineárisan függetlenek,

$c_1 = \dots = c_{i-1} = 0$ ,  $\mathbf{x}_i = \mathbf{0}$ , ellentmondás.

**K** **A diag.-hatóság egy elégséges feltétele:** Ha az  $n$ -edrendű  $\mathbf{A}$  mátrixnak  $n$  darab különböző sajátértéke van, akkor diag.-ható.

# Sajátértékek multiplicitása és a diagonalizálhatóság

**K** A különböző sajátalterek bázisainak uniója lineárisan független vektorokból áll.

**T** **Diagonalizálhatóság szükséges és elégséges feltétele**

Egy  $n$ -edrendű valós vagy komplex négyzetes mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha a sajátértékeihez tartozó geometriai multiplicitások összege  $n$ .

**K** Egy  $\mathbb{F}$  test fölötti  $n$ -edrendű mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha az  $\mathbb{F}^n$  tér előáll sajátaltéréinek direkt összegeként.

**P** melyik esetben lesz a tér sajátalterek direkt összege?

- vetítés egyenesre, síkra, altérre, hipersíkra,
- tükrözés egyenesre, síkra, hipersíkra,
- forgatás egy egyenes körül a térben (nem diag.-ható).

m Blokkosításból:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda_2 \mathbf{I} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \lambda_k \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [\mathbf{X}_1 \quad \mathbf{X}_2 \quad \dots \quad \mathbf{X}_k], \quad \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1^T \\ \mathbf{Y}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_k^T \end{bmatrix}.$$

Az  $\mathbf{A} = \mathbf{C}\Lambda\mathbf{C}^{-1}$  felbontás:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = \mathbf{C}\Lambda\mathbf{C}^{-1} &= [\mathbf{X}_1 \quad \mathbf{X}_2 \quad \dots \quad \mathbf{X}_k] \begin{bmatrix} \lambda_1 \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda_2 \mathbf{I} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \lambda_k \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1^T \\ \mathbf{Y}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_k^T \end{bmatrix} \\ &= \lambda_1 \mathbf{X}_1 \mathbf{Y}_1^T + \lambda_2 \mathbf{X}_2 \mathbf{Y}_2^T + \dots + \lambda_k \mathbf{X}_k \mathbf{Y}_k^T \\ &= \lambda_1 \mathbf{P}_1 + \lambda_2 \mathbf{P}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{P}_k, \end{aligned}$$

ahol  $\mathbf{P}_i = \mathbf{X}_i \mathbf{Y}_i^T$  a  $\lambda_i$  sajátértékhez tartozó mátrix, melyre:

## T Diagonalizálható mátrixok spektrálfelbontása

A  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$  spektrumú  $\mathbf{A}$  mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha felírható

$$\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{P}_1 + \lambda_2 \mathbf{P}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{P}_k$$

alakban, ahol

- $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \dots + \mathbf{P}_k = \mathbf{I}$ ,
- $\mathbf{P}_i \mathbf{P}_j = \mathbf{O}$ , ha  $i \neq j$ ,
- $\mathbf{P}_i$  az  $\mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})$  sajátaltérre vetít  $\mathcal{O}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})$  mentén.

D **A spektruma** a  $\sigma(\mathbf{A}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$  halmaz.

B (részlet)  $\mathbf{C}\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{I}$  ( $\mathbf{P}_i = \mathbf{X}_i \mathbf{Y}_i^T$ )  $\rightsquigarrow \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \dots + \mathbf{P}_k = \mathbf{I}$ .

$\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C} = \mathbf{I} \rightsquigarrow \mathbf{Y}_i^T \mathbf{X}_i = \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{Y}_i^T \mathbf{X}_j = \mathbf{O}$  ( $i \neq j$ )  $\rightsquigarrow \mathbf{P}_i \mathbf{P}_j = \mathbf{X}_i \mathbf{Y}_i^T \mathbf{X}_j \mathbf{Y}_j^T = \mathbf{O}$ .

$\mathbf{P}_i^2 = \mathbf{X}_i (\mathbf{Y}_i^T \mathbf{X}_i) \mathbf{Y}_i^T = \mathbf{X}_i \mathbf{Y}_i^T = \mathbf{P}_i$ , azaz  $\mathbf{P}_i$  vetítés.

# Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér

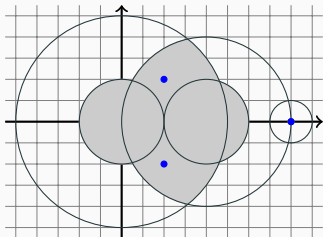
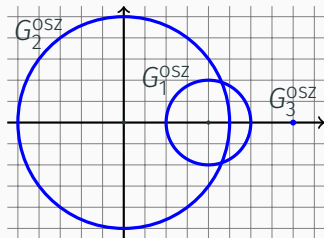
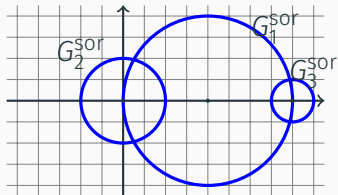
---

A sajátérték kiszámítása

- D **Gersgorin-körök:** Az  $n \times n$ -es valós vagy komplex  $\mathbf{A}$  mátrix Gersgorin-körein az  $a_{ii}$  középpő, és  $r_i^{\text{SOR}}$  sugarú  $G_i^{\text{SOR}}$ , illetve  $r_i^{\text{OSZ}}$  sugarú  $G_i^{\text{OSZ}}$  köröket értjük ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), ahol

$$r_i^{\text{SOR}} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad r_i^{\text{OSZ}} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ji}|. \quad (1)$$

P Az  $A = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$  mátrix Gersgorin körei:



T  $\mathbf{A}$  valós vagy komplex  $n \times n$ -es mátrix.

- $\sigma(\mathbf{A}) \subseteq \bigcup_i G_i^{\text{SOR}}, \sigma(\mathbf{A}) \subseteq \bigcup_i G_i^{\text{OSZ}}, \sigma(\mathbf{A}) \subseteq (\bigcup_i G_i^{\text{SOR}} \cap \bigcup_i G_i^{\text{OSZ}})$ ,
- Ha a  $G_i^{\text{SOR}}$  körök egy  $k$ -elemű részhalmaza diszjunkt a maradék  $n - k$  kör mindegyikétől, akkor uniójuk multiplicitással számolva pontosan  $k$  sajátértéket tartalmaz.

$\mathbf{B}^*$   $(\lambda, \mathbf{x})$  saját pár,  $\max_j |x_j| = 1$ , tehát  $|x_j| \leq 1$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ).

$\lambda = \lambda x_i = [\lambda \mathbf{x}]_i = [\mathbf{A} \mathbf{x}]_i = \sum_j a_{ij} x_j$ , így  $\lambda - a_{ii} = \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j$ , tehát

$$|\lambda - a_{ii}| = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| |x_j| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| = r_i^{\text{SOR}}.$$

$\mathbf{B}(r) = r\mathbf{A} + (1 - r) \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$ , így

$\mathbf{B}(0) = \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$ ,  $\mathbf{B}(1) = \mathbf{A}$ . Változzék  $r$  folyamatosan 0-tól 1-ig.



**K** Minden **soroként (oszloponként) domináns főátlójú** valós vagy komplex mátrix invertálható. ( $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$  vagy

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ji}|$$

**B** Gersgorin-körei nem tartalmazzák az origót.

**P** A következő mátrixok biztosan invertálhatóak:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & n & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & n \end{bmatrix}_{n \times n}$$

D Egy sajátérték **szigorúan domináns**, ha egyszeres multiplicitású, és abszolút értékben nagyobb az összes többinél. (**szigorúan domináns sajátvektor, sajátaltér, sajátpár**)

m  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , ha  $\lambda_1$  szig. dom. s.é., azaz  $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_m|$ , akkor  $\lambda_1$  valós, egyébként  $\overline{\lambda_1}$  is sajátérték lenne.

Legyen  $\mathbf{v} = c_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{x}_2 + \dots + c_m \mathbf{x}_m$ ,  $k > 0$  egész:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^k \mathbf{v} &= c_1 \mathbf{A}^k \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{A}^k \mathbf{x}_2 + \dots + c_m \mathbf{A}^k \mathbf{x}_m \\ &= c_1 \lambda_1^k \mathbf{x}_1 + c_2 \lambda_2^k \mathbf{x}_2 + \dots + c_m \lambda_m^k \mathbf{x}_m. \end{aligned}$$

Ekkor  $\lambda_1^k$ -val való osztás után  $k \rightarrow \infty$  esetén

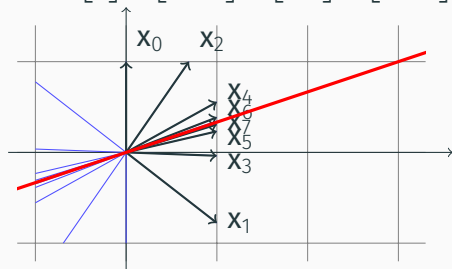
$$\frac{1}{\lambda_1^k} \mathbf{A}^k \mathbf{v} = c_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k \mathbf{x}_2 + \dots + c_m \left( \frac{\lambda_m}{\lambda_1} \right)^k \mathbf{x}_m \rightarrow c_1 \mathbf{x}_1,$$

Tehát ha  $c_1 \neq 0$ , akkor  $\mathbf{A}^k \mathbf{x}$  iránya tart a domináns sajátvektor irányához.

**T Hatványmódszer:** Ha  $\lambda_1$  az  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrix szigorúan domináns sajátértéke, akkor létezik olyan  $\mathbf{x}_0$  vektor, hogy az  $\mathbf{x}_k = \mathbf{A}^k \mathbf{x}_0$  vektorok által kifeszített alterek sorozata a domináns sajátaltérhez konvergál, míg  $\frac{\mathbf{x}_k^T \mathbf{A} \mathbf{x}_k}{\mathbf{x}_k^T \mathbf{x}_k} \rightarrow \lambda$  (**Rayleigh hányadosok**).

**P** Legyen  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.7 & 0.9 \\ 0.9 & -0.7 \end{bmatrix}$ .

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7
$\mathbf{A}^k \mathbf{x}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.9 \\ -0.7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.9 \\ 1.3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2.7 \\ -0.1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4.5 \\ 2.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9.9 \\ 2.3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 18.9 \\ 7.3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 38.7 \\ 11.9 \end{bmatrix}$



# Ortogonalis és unitér diagonalizálás

---

# Valós mátrixok ortogonális diagonalizálása

**D** Az  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrix **ortogonálisan diagonalizálható**, ha van olyan  $\mathcal{Q}$  ortonormált bázis, melyben diagonális alakú, másként fogalmazva ha találunk egy ortogonális  $\mathbf{Q}$  és egy diagonális  $\Lambda$  mátrixot, hogy  $\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} = \Lambda$  (a két megfogalmazás közti kapcsolat:  $\mathbf{Q}$  a  $\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{Q}$  áttérés mátrixa).

!  $L : \mathcal{V}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathcal{V}_{\mathbb{R}}$  lineáris transzformáció, ahol  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}$  végesdimenziós valós euklideszi tér. Az  $L$  **lineáris transzformáció ortogonálisan diagonalizálható**, ha van olyan  $\mathcal{Q}$  ortonormált bázis, melyben mátrixa diagonális alakú.

**Á** Valós szimmetrikus mátrix bármely két különböző sajátaltere merőleges egymásra.

**B**  $(\lambda, \mathbf{x})$  és  $(\mu, \mathbf{y})$  két saját pár,  $\lambda \neq \mu$

$$\lambda(\mathbf{x}^T \mathbf{y}) = (\lambda \mathbf{x})^T \mathbf{y} = (\mathbf{A} \mathbf{x})^T \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mu \mathbf{y} = \mu(\mathbf{x}^T \mathbf{y}).$$

## T Valós spektráltétel (ort. diag-hatóság szüks. és elégs. felt.)

A valós  $\mathbf{A}$  mátrix pontosan akkor diagonalizálható ortogonálisan, ha szimmetrikus.

$$\text{B } (\Rightarrow) \mathbf{A}^T = (\mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^T)^T = (\mathbf{Q}^T)^T \mathbf{\Lambda}^T \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^T = \mathbf{A}.$$

( $\Leftarrow$ ) teljes indukció,  $n = 1$  OK.

$\mathbf{A}$  szimmetrikus, így minden sajátértéke valós.  $(\lambda, \mathbf{u}_1)$  egy saját pár,  $\mathbf{u}_1$ -et kiegészítjük ONB-sá:  $\mathbf{Q}_0 = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \dots \ \mathbf{u}_n]$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_0^T \mathbf{A} \mathbf{Q}_0 &= \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \mathbf{u}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^T \end{bmatrix} \mathbf{A} [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \dots \ \mathbf{u}_n] = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \mathbf{u}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^T \end{bmatrix} [\mathbf{A}\mathbf{u}_1 \ \mathbf{A}\mathbf{u}_2 \ \dots \ \mathbf{A}\mathbf{u}_n] \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \mathbf{u}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^T \end{bmatrix} [\lambda \mathbf{u}_1 \ \mathbf{A}\mathbf{u}_2 \ \dots \ \mathbf{A}\mathbf{u}_n] = \begin{bmatrix} \lambda & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{B}, \end{aligned}$$

- $\mathbf{B}^T = (\mathbf{Q}_0^T \mathbf{A} \mathbf{Q}_0)^T = \mathbf{Q}_0^T \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_0 = \mathbf{Q}_0^T \mathbf{A} \mathbf{Q}_0 = \mathbf{B}$ ,  $\rightsquigarrow \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix}$  és  $\mathbf{A}_1$  szimm.
- $\mathbf{B} \sim \mathbf{A} \rightsquigarrow$  sajátértékeik megegyeznek  $\rightsquigarrow \mathbf{A}_1$  minden sajátértéke  $\mathbf{A}$ -nak is sajátértéke  $\rightsquigarrow$  (teljes indukció miatt)  $\mathbf{A}_1 = \mathbf{Q}_1 \mathbf{\Lambda}_1 \mathbf{Q}_1^T$ .
- $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0 \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix}$  ortogonális

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} &= \left( \mathbf{Q}_0 \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} \right)^T \mathbf{A} \left( \mathbf{Q}_0 \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix}^T \mathbf{Q}_0^T \mathbf{A} \mathbf{Q}_0 \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1^T \mathbf{A}_1 \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Lambda}_1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

## T Valós Schur-felbontás

Minden valós négyzetes  $A$  mátrix, melynek **összes sajátértéke valós**, ortogonálisan hasonló egy  $T$  felső háromszögmátrixhoz:  $\exists Q$  ortogonális:  $A = QTQ^T$ .

B Mint az előbb:

$$Q_0^T A Q_0 = \begin{bmatrix} \lambda & v^T \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} = B.$$

Indukció:  $A_1 = Q_1 T_1 Q_1^T$

$$\begin{aligned} Q^T A Q &= \left( Q_0 \begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & Q_1 \end{bmatrix} \right)^T A \left( Q_0 \begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & Q_1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & Q_1 \end{bmatrix}^T Q_0^T A Q_0 \begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & Q_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & Q_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & v^T \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & Q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & v^T Q_1 \\ 0 & Q_1^T A_1 Q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & v^T Q_1 \\ 0 & T_1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$



**P** Diagonalizálható-e az alábbi mátrix? Adjuk meg egy Schur-felbontását!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 13 & -16 \\ 9 & -11 \end{bmatrix}$$

**M** Karakterisztikus polinom:  $(x - 1)^2$

- sajátérték:  $\lambda_{1,2} = 1$ , sajátaltér:  $\text{span}((4, 3))$ .

- ONB:  $\{(4/5, 3/5), (-3/5, 4/5)\}$ ,  $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$

- Innen  $\mathbf{T} = \mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & -25 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

- A Schurr-felbontás:  $\mathbf{A} = \mathbf{Q} \mathbf{T} \mathbf{Q}^T$

**D Felső Hessenberg-mátrix:** a subdiagonális alatt minden elem nulla.

$$\mathbf{P} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

**T** Minden valós négyzetes  $\mathbf{A}$  mátrix, ortogonálisan hasonló egy  $\mathbf{H}$  felső Hessenberg-mátrixhoz, azaz van olyan  $\mathbf{Q}$  ortogonális mátrix, hogy  $\mathbf{A} = \mathbf{QHQ}^T$ .

# Mátrixok unitér diagonalizálása

- D **A unitéren diagonalizálható**, ha van olyan  $\mathbf{U}$  unitér és  $\Lambda$  diagonális mátrix, melyre  $\mathbf{U}^H \mathbf{A} \mathbf{U} = \Lambda$  (illetve  $\mathbf{A} = \mathbf{U} \Lambda \mathbf{U}^H$ ).
- D Az  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  **normális**, ha  $\mathbf{A}^H \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^H$ .

T **Unitér diag-hatóság szüks. és elégs. feltétele**

Az  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  mátrix pontosan akkor diagonalizálható unitéren, ha normális.

T **Komplex Schur-felbontás**

Minden komplex négyzetes  $\mathbf{A}$  mátrix unitéren hasonló egy  $\mathbf{T}$  felső háromszögmátrixhoz:  $\exists \mathbf{U}$  unitér:  $\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{T} \mathbf{U}^H$ .

$B^*$  Unitér diag-hatóság szüks. és elégs. feltétel

-  $(\Rightarrow) \mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^H$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^H\mathbf{A} &= (\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^H)^H(\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^H) = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^H\mathbf{U}^H\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^H = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^H\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^H \\ &= \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{\Lambda}^H\mathbf{U}^H = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^H\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^H\mathbf{U}^H = (\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^H)(\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^H)^H = \mathbf{A}\mathbf{A}^H. \end{aligned}$$

-  $(\Leftarrow)$  Schur:  $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{T}\mathbf{U}^H$ . Ha  $\mathbf{A}$  normális,  $\mathbf{T}$  is:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^H\mathbf{T} &= (\mathbf{U}^H\mathbf{A}\mathbf{U})^H(\mathbf{U}^H\mathbf{A}\mathbf{U}) = \mathbf{U}^H\mathbf{A}^H\mathbf{U}\mathbf{U}^H\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{U}^H\mathbf{A}^H\mathbf{A}\mathbf{U} \\ &= \mathbf{U}^H\mathbf{A}\mathbf{A}^H\mathbf{U} = \mathbf{U}^H\mathbf{A}\mathbf{U}\mathbf{U}^H\mathbf{A}^H\mathbf{U} = (\mathbf{U}^H\mathbf{A}\mathbf{U})(\mathbf{U}^H\mathbf{A}\mathbf{U})^H = \mathbf{T}\mathbf{T}^H. \end{aligned}$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t_{nn} \end{bmatrix} : \text{ezért } [\mathbf{T}^H\mathbf{T}]_{11} = \|t_{11}\|^2,$$

$[\mathbf{T}\mathbf{T}^H]_{11} = \|t_{11}\|^2 + \|t_{12}\|^2 + \dots + \|t_{1n}\|^2$ , amiből  $t_{12} = \dots = t_{1n} = 0$ .

Hasonlóan a  $[\mathbf{T}^H\mathbf{T}]_{22}$  és a  $[\mathbf{T}\mathbf{T}^H]_{22}$  elemekből  $t_{23} = \dots = t_{2n} = 0$ ,

stb. Tehát  $\mathbf{T}$  diagonális.

# Kvadrátikus formák

---

# Kvadratikus formák

---

Multi- és bilineáris függvények

# Multilineáris függvények

**D** Legyen  $\mathcal{V}$  egy  $\mathbb{F}$  test fölötti vektortér. Az  $m : \mathcal{V}^n \rightarrow \mathbb{F}$  **multilineáris** függvény, ha minden változójában lineáris a többi rögzítése mellett.  $n = 2$  esetén **bilineárisnak** nev. Tehát a  $b : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{F}$  függvény **bilineáris**, ha bármely  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$  és  $c \in \mathbb{F}$  esetén

$$\begin{aligned} b(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= b(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + b(\mathbf{v}, \mathbf{w}), & b(c\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= c b(\mathbf{v}, \mathbf{w}), \\ b(\mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) &= b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{u}, \mathbf{w}), & b(\mathbf{v}, c\mathbf{w}) &= c b(\mathbf{v}, \mathbf{w}), \end{aligned}$$

- P**
1. Az  $n$ -edrendű determináns a sorvektorainak multilineáris függvénye, mivel minden sorában homogén és additív. A  $2 \times 2$ -es  $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - x_2y_1$  determináns így bilineáris, ahol  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ .
  2. a skaláris szorzás  $\mathbb{R}^n$ -ben bilineáris:  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ ,
  3.  $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y}$  bilineáris, ahol  $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ .

## Szeszkvilineáris (komplex bilineáris) függvény

D Legyen  $\mathcal{V}$  egy  $\mathbb{C}$  fölötti vektortér. A  $b : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}$  függvényt **komplex bilineáris függvénynek** vagy **szeszkvilineáris függvénynek** nevezzük, ha bármely  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$  és  $c \in \mathbb{C}$  esetén

$$\begin{aligned} b(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= b(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + b(\mathbf{v}, \mathbf{w}), & b(c\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \bar{c} b(\mathbf{v}, \mathbf{w}), \\ b(\mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) &= b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{u}, \mathbf{w}), & b(\mathbf{v}, c\mathbf{w}) &= c b(\mathbf{v}, \mathbf{w}), \end{aligned}$$

azaz  $b$  „konjugált lineáris” az első változóban, a 2. rögzítése mellett és lineáris a 2. változóban, az első rögzítése mellett.

- P
1.  $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^H \mathbf{B} \mathbf{y}$ , ahol  $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,
  2. skaláris szorzás  $\mathbb{C}^n$ -ben:  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^H \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i$ ,



## Bilineáris függvény mátrixa – Gram-mátrix

- D** Legyen a  $\mathcal{V}_{\mathbb{F}}$  vektortér egy bázisa  $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n\}$ . A  $b : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{F}$  (komplex) bilineáris függvény  $\mathcal{C}$  bázisra vonatkozó **mátrixán**, vagy **Gram-mátrixán** azt a **B** mátrixot értjük, melyre  $[\mathbf{B}]_{ij} = b(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j)$ .
- P** Mi az  $\mathbb{R}^2$ -beli skaláris szorzás – mint bilineáris függvény – mátrixa a standard és a  $\mathcal{C} = \{(1, 1), (2, -1)\}$  bázisokra nézve!
- M**  $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \rightsquigarrow b(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij} \rightsquigarrow$  a Gram-mátrix **I**.
- A  $\mathcal{C}$  bázisra vonatkozóan  $\mathbf{B} = [b(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j)]_{ij} = [\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{c}_j]_{ij} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ .
- F** Mi a  $2 \times 2$ -es determináns – mint sorvektorainak bilineáris függvénye – mátrixa a fenti bázisokban.
- M**  $d(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_i^T \\ \mathbf{e}_j^T \end{vmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ , ill.  $b(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j) = \begin{vmatrix} \mathbf{c}_i^T \\ \mathbf{c}_j^T \end{vmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ .

# Bilineáris függvények mátrixai

**T** Legyen  $\mathcal{V}$  egy  $\mathbb{F}$  fölötti vektortér,  $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n\}$  egy bázisa, egy  $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$  vektor  $\mathcal{C}$  bázisra vonatkozó koordinátás alakját jelölje  $\mathbf{x}_{\mathcal{C}}$ . Ha  $\mathbf{B}$  a  $b : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{F}$  bilineáris függvény mátrixa a  $\mathcal{C}$  bázisra vonatkozóan, akkor  $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}_{\mathcal{C}}^T \mathbf{B} \mathbf{y}_{\mathcal{C}}$  (szeszkvilineáris:  $\mathbf{x}_{\mathcal{C}}^H \mathbf{B} \mathbf{y}_{\mathcal{C}}$ ).

**P** A  $2 \times 2$ -es det:  $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_2 - x_2 y_1 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

**K** A  $b : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{F}$  bilineáris függvényhez annak  $\mathcal{C}$  bázisra vonatkozó Gram-mátrixát rendelő  $b \rightarrow \mathbf{B}$  leképezés bijekció a bilineáris függvények és az  $\mathbb{F}^{n \times n}$  között, ahol

$$b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}_{\mathcal{C}}^T \mathbf{B} \mathbf{y}_{\mathcal{C}}.$$

(szeszkvilineáris függvényekre is, ahol  $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}_{\mathcal{C}}^H \mathbf{B} \mathbf{y}_{\mathcal{C}}$ ).

# Bilineáris függvény mátrixa báziscsere után

Á Legyen  $\mathbf{M}$  a  $\mathcal{B}$ -ről  $\mathcal{C}$ -re való áttérés mátrixa, azaz  $\mathbf{x}_{\mathcal{C}} = \mathbf{M}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} \mathbf{x}_{\mathcal{B}}$ ,  
 $\mathbf{y}_{\mathcal{C}} = \mathbf{M}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} \mathbf{y}_{\mathcal{B}}$ . Ekkor

$$b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}_{\mathcal{C}}^{\top} \mathbf{B} \mathbf{y}_{\mathcal{C}} = \mathbf{x}_{\mathcal{B}}^{\top} \mathbf{M}^{\top} \mathbf{B} \mathbf{M} \mathbf{y}_{\mathcal{B}}$$

D Azt mondjuk, hogy  $\mathbf{A}$  és  $\mathbf{B}$  **kongruensek**, jelölése  $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$ , ha van olyan invertálható  $\mathbf{M}$  mátrix, hogy  $\mathbf{A} = \mathbf{M}^{\top} \mathbf{B} \mathbf{M}$ .

Á  $\mathbf{A} \cong \mathbf{B} \iff$  van olyan bilineáris függvény, melynek a két mátrix a Gram-mátrixa két bázisban.

m Míg a lineáris leképezés mátrixa báziscsere esetén hasonló mátrixra változik, addig bilineáris függvény mátrixa egy vele kongruensre.

m Komplex bilineáris függvény esetén  $\mathbf{A} = \mathbf{M}^{\text{H}} \mathbf{B} \mathbf{M}$ .

# Kvadratikus formák

---

A kvadratikus forma és a főtengetytétel

## Homogén másodfokú polinomok = kvadratikus alakok

- P** Homogén másodfokú polinom mátrixszorzatos alakja: Írjuk fel az  $x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 5x_1x_2 - 3x_2x_1 + 5x_1x_3 - x_3x_1$  kifejezést mátrixszorzatos alakban szimmetrikus mátrixszal!
- M** A vegyes tagokat először összevonva, majd két egyenlő együtthatójú részre bontva

$$\begin{aligned} & x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 8x_1x_2 + 4x_1x_3 \\ &= x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_1 + 2x_1x_3 + 2x_3x_1 \\ &= x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_1 + 2x_2^2 + 0x_2x_3 + 2x_3x_1 + 0x_3x_2 + 2x_3^2 \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

- D**  $!$   $b$  egy  $\mathbb{F}$  fölötti bilineáris függvény. A  $q(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x}, \mathbf{x})$  függvényt kvadratikus alaknak vagy kvadratikus formának nevezzük.

## Kvadrátikus alak $\Sigma$ -jelöléssel

$$\begin{aligned} q: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}; \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n a_{i1}x_i & \sum_{i=1}^n a_{i2}x_i & \dots & \sum_{i=1}^n a_{in}x_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n a_{i1}x_i x_1 + \sum_{i=1}^n a_{i2}x_i x_2 + \dots + \sum_{i=1}^n a_{in}x_i x_n \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_i x_j. \end{aligned}$$

# Valós és komplex kvadratikus alak

m A **valós kvadratikus alak (kvadratikus forma)** tehát egy

$$q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}; \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$$

függvény, ahol  $\mathbf{A}$  szimmetrikus mátrix.

m komplexekre érdekesebb lehet a következő:

D **Komplex kvadratikus alak**  $q : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}; \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}^H \mathbf{A} \mathbf{x}$

T Komplex kvadratikus alaknál különböző négyzetes mátrixok különböző alakot adnak, és egy ilyen alak pontosan akkor valós értékű, ha  $\mathbf{A}$  önadjungált.

B Az utolsó állításhoz:  $(\mathbf{x}^H \mathbf{A} \mathbf{x})^H = \mathbf{x}^H \mathbf{A}^H \mathbf{x} = \mathbf{x}^H \mathbf{A} \mathbf{x}$ , és csak a valós számok egyeznek meg saját konjugáltjukkal.

m Valós esetben a kvadratikus alakok és a szimmetrikus mátrixok közt van bijekció, komplex esetben a komplex kvadratikus alakok és a mátrixok között.

## Áttérés más bázisra

**Á** Másik bázisra való áttéréskor a  $b(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  bilineáris függvény  $\mathbf{B}$  mátrixa  $\mathbf{M}^T \mathbf{B} \mathbf{M}$ -re változik, így ez igaz a belőle képzett  $q(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x}, \mathbf{x})$  kvadratikus alakra is:  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{C}}$ ,  $\mathbf{x}_{\mathcal{E}} = \mathbf{M}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{C}} \mathbf{x}_{\mathcal{C}}$ , így  $\mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{x} = (\mathbf{M} \mathbf{x}_{\mathcal{C}})^T \mathbf{B} (\mathbf{M} \mathbf{x}_{\mathcal{C}}) = \mathbf{x}_{\mathcal{C}}^T (\mathbf{M}^T \mathbf{B} \mathbf{M}) \mathbf{x}_{\mathcal{C}}$ .

**P** Írjuk fel a  $q(x, y) = x^2 - 6xy + y^2$  kvadratikus alakot a  $\mathcal{C} = \{(2, 1), (3, 1)\}$  bázisban!

**M**  $q(x, y) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{M}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\rightsquigarrow$

$$\mathbf{M}^T \mathbf{A} \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -8 \\ -8 & -8 \end{bmatrix}$$

Tehát a kvadratikus alak a  $\mathcal{C}$  bázisban

$$\begin{bmatrix} \xi & \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & -8 \\ -8 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = -7\xi^2 - 16\xi\eta - 8\eta^2.$$



## T Főtengelytétel – főtengely-transzformáció

A egy  $n$ -edrendű valós szimmetrikus mátrix,  $\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} = \Lambda$  ortogonális diagonalizálása. Az  $\mathbf{x} = \mathbf{Q} \mathbf{y}$  helyettesítés az  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$  kvadratikus formát az  $\mathbf{y}^T \Lambda \mathbf{y}$  kvadratikus formába transzformálja (ez a főtengely-transzformáció), mely kifejtve csak négyzetes tagokat tartalmaz, azaz

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}^T \Lambda \mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

ahol  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  az  $\mathbf{A}$  mátrix sajátértékei. Választható  $\mathbf{Q}$  úgy, hogy  $\det(\mathbf{Q}) = 1$  legyen.

B  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = (\mathbf{Q} \mathbf{x})^T \mathbf{A} \mathbf{Q} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} \mathbf{x} = \mathbf{y}^T \Lambda \mathbf{y}$

D A csak négyzetes tagokat tartalmazó alakot **kanonikus alaknak** is nevezik.

# Főtengely-transzformáció

**P** Határozzuk meg a  $q(x, y) = 4xy$  kvadratikus forma kanonikus alakját főtengely-transzformációval és azt az ortonormált bázist, melyben ilyen alakú.

**M** A mátrixszorzat-alak:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

A mátrix  $(\lambda, \mathbf{x})$  sajátpárjai egységnyi sajátvektorokkal:

$(2, \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)), (-2, \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)) \rightsquigarrow$  a kanonikus alak  $2\xi^2 - 2\eta^2$ .

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = -1,$$

így jobbsodrású lesz a bázist, ha pl. a második vektor

-1-szeresét vesszük:  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ .

# Főtengely-transzformáció

- P** Adjunk meg egy olyan jobbsodrású ortonormált bázist, melyben a

$$q(x, y, z) = -4x^2 + 12xz + 2y^2 + 12yz + 9z^2$$

kvadratikus alak csak négyzetes tagokból áll és adjuk meg ezt az alakját.

- M** A kvadratikus alak mátrixa

$$q(x, y, z) = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 6 \\ 6 & 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 6 \\ 6 & 6 & 9 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -6 \\ 3 & -6 & -2 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 2 \\ -6 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

- $\xi$ -,  $\eta$ -,  $\zeta$ -val jelölve az új változókat  $q(\xi, \eta, \zeta) = 14\xi^2 - 7\zeta^2$ .

# Főtengely-transzformáció

- Mivel

$$\det(\mathbf{Q}) = \frac{1}{7} \begin{vmatrix} 2 & 3 & -6 \\ 3 & -6 & -2 \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -1,$$

ezért például a  $\mathbf{Q}$  harmadik oszlopának  $-1$ -szeresével jobbsodrású lesz:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2/7 \\ 3/7 \\ 6/7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3/7 \\ -6/7 \\ 2/7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6/7 \\ 2/7 \\ -3/7 \end{bmatrix} \right\}.$$

# Kvadratikus formák

---

Szignatúra/tehetetlenség/inercia

## D **Mátrix tehetetlensége, inerciája, szignatúrája**

Tegyük fel, hogy a valós szimmetrikus  $\mathbf{A}$  mátrix kongruens a diagonális  $\mathbf{D}$  mátrixszal. Jelölje  $\mathbf{D}$  főátlóbeli elemei közül  $n_+$  a pozitív előjelűek,  $n_-$  a negatív előjelűek és  $n_0$  a zérus értékűek számát. Az  $\mathbf{A}$  mátrix **tehetetlenségén**, **inerciáján** vagy **szignatúráján** az  $(n_+, n_-, n_0)$  hármast értjük.

- P  $q(x, y) = 4xy$  kanonikus alakja  $2\xi^2 - 2\eta^2$ , tehetetlensége  $(1, 1, 0)$ .  
 $q(x, y, z) = -4x^2 + 12xz + 2y^2 + 12yz + 9z^2$  kanonikus alakja  
 $q(\xi, \eta, \zeta) = 14\xi^2 - 7\zeta^2$ , tehetetlensége  $(1, 1, 1)$ .

## T **Sylvester-féle tehetetlenségi tétel**

Két valós szimmetrikus mátrix pontosan akkor kongruens, ha azonos a tehetetlenségük.

# Diagonalizálás szimultán sor-oszlopműveletekkel

- A szimmetrikus  $\mathbf{A}$  mátrixot elemi sorműveletekkel hozzuk felső háromszög alakra úgy, hogy minden sorművelettel azonos oszlopműveletet is végezzünk el utána, és csak főátlóbeli elemmel elimináljunk.

Á E szimultán sor-oszlopműveletek szimmetrikus mátrixot szimmetrikusba visznek.

- E műveletek felírhatók elemi mátrixokkal való szorzással is. Ha  $\mathbf{E}$  elemi mátrix, akkor  $\mathbf{EA}$  az  $\mathbf{A}$  sorain ugyanazt a műveletet végzi, mint  $\mathbf{AE}^T$  az  $\mathbf{A}$  oszlopain (ugyanis  $(\mathbf{EA})^T = \mathbf{A}^T \mathbf{E}^T = \mathbf{AE}^T$ ).
- $k$  ilyen műveletpár után a következőt kapjuk:

$$\mathbf{E}_k \dots \mathbf{E}_2 \mathbf{E}_1 \mathbf{A} \mathbf{E}_1^T \mathbf{E}_2^T \dots \mathbf{E}_k^T = \mathbf{M}^T \mathbf{A} \mathbf{M} = \mathbf{D} \cong \mathbf{A}.$$

- $\mathbf{D} = \mathbf{M}^T \mathbf{A} \mathbf{M}$  szimmetrikus felsőháromszög-mátrix  $\rightsquigarrow$  diagonális.
- Semmi nem garantálja, hogy az  $\mathbf{M}$  mátrix ortogonális, így a diagonális alak nem biztos, hogy a sajátértékeket tartalmazza.

**P** Küszöböljük ki a vegyes tagokat az  $2xy + 2xz + 2yz$  kvadratikus alakban.

**M** A kvadratikus alak mátrixa és a sor- és oszlopműveletek:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_1+S_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{O_1+O_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{\substack{S_2-\frac{1}{2}S_1 \\ S_3-S_1}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{O_2-\frac{1}{2}O_1 \\ O_3-O_1}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \mathbf{D}$$

$$\rightsquigarrow 2\xi^2 - \frac{1}{2}\eta^2 - 2\zeta^2.$$

**m** **B** sajátértékei  $2, -1, -1$ , így főtengely-transzformációval a  $2\xi^2 - \eta^2 - \zeta^2$  alakot kapjuk.



# Kvadratikus formák

---

Kvadratikus alak jellege/definitisége

## D **Definittség: a kvadratikus alak, illetve mátrix jellege**

Legyen  $\mathbf{A}$  valós szimmetrikus vagy komplex önadjungált mátrix. Azt mondjuk, hogy az  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$  valós (illetve az  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^H \mathbf{A} \mathbf{x}$  komplex) **kvadratikus forma**, illetve hogy az  $\mathbf{A}$  szimmetrikus (önadjungált) mátrix

- **pozitív definit (pd)**, ha  $f(\mathbf{x}) > 0$ ,
- **pozitív szemidefinit (psd)**, ha  $f(\mathbf{x}) \geq 0$ ,
- **negatív definit (nd)**, ha  $f(\mathbf{x}) < 0$ ,
- **negatív szemidefinit (nsd)**, ha  $f(\mathbf{x}) \leq 0$

bármely  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  vektor esetén, és azt mondjuk, hogy  $f$

- **indefinit (ind)**, ha pozitív és negatív értékeket is fölvesz.

J pd:  $\mathbf{A} \succ 0$ , psd:  $\mathbf{A} \succeq 0$  ( $\mathbf{A} \succcurlyeq 0$ ), nd:  $\mathbf{A} \prec 0$ , nsd:  $\mathbf{A} \preceq 0$  ( $\mathbf{A} \preccurlyeq 0$ )

## Példák definit és indefinit kvadratikus alakokra

**P**  $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ ,  $g(x, y) = x^2 - 2y^2$ ,  $h(x, y) = -x^2 - 2y^2$ ,  
 $k(x, y, z) = x^2 + 2y^2$

**M**  $f$  pozitív definit, hisz az  $(x, y) \neq (0, 0)$  esetén értéke mindig pozitív,  $g$  indefinit,  $h$  negatív definit, és  $k$  pozitív szemidefinit, hisz értéke  $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$  esetén is lehet 0 (ha  $x = y = 0$ , de  $z \neq 0$ )

- szignatúráik:  $(2, 0, 0)$ ,  $(1, 1, 0)$ ,  $(0, 2, 0)$ ,  $(2, 0, 1)$

**P**  $I$  pozitív definit, ugyanis  $\mathbf{x}^T I \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2 > 0$ , ha  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ .

**P** Ha  $\mathbf{A}$  negatív (szemi)definit, akkor  $-\mathbf{A}$  pozitív (szemi)definit.

**P** Ha  $\mathbf{A} = [a]$ , azaz  $\mathbf{A}$   $1 \times 1$ -es, akkor  $\mathbf{A}$  pontosan akkor pozitív definit, ha  $a > 0$ . (Tehát a pozitív definittség a pozitivitás, a pozitív szemidefinittség a nemnegativitás kiterjesztésének tekinthető.)

## További példák definit és indefinit kvadratikus alakokra

- T** Tetszőleges  $\mathbf{A}$  valós mátrix esetén  $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$  pozitív szemidefinit, és pontosan akkor pozitív definit, ha  $\mathbf{A}$  teljes oszloprangú.
- B**  $\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = (\mathbf{A}\mathbf{x})^T(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|^2 \geq 0$ .
- $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$  ( $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ )  $\iff$   $\mathbf{A}$  oszlopvektorai lineárisan összefüggők  $\rightsquigarrow$   $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$  pozitív definit  $\iff$   $\mathbf{A}$  teljes oszloprangú
- P** Osztályozzuk a szimmetr.  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$  mátrixokat kongruencia szerint!
- M** A kongruenciaosztályok száma 10, mert a 3-at ennyiféleképp lehet három nemnegatív szám összegére bontani. Az osztályok egyikében csak a nullmátrix van, a többi osztályozható definititásuk szerint, nevezetesen

pd	(3, 0, 0)	nd	(0, 3, 0)	ind	(1, 1, 1)	<b>O</b>	(0, 0, 3)
psd	(2, 0, 1)	nsd	(0, 2, 1)		(2, 1, 0)		
	(1, 0, 2)		(0, 1, 2)		(1, 2, 0)		

- T A valós szimmetrikus, illetve a komplex önadjungált  $\mathbf{A}$  mátrix (ill. az  $\mathbf{x}^H \mathbf{A} \mathbf{x}$  kvadratikus forma) pontosan akkor
- pozitív defínit, ha  $\mathbf{A}$  minden sajátértéke pozitív;
  - pozitív szemidefínit, ha  $\mathbf{A}$  minden sajátértéke nemnegatív;
  - negatív defínit, ha  $\mathbf{A}$  minden sajátértéke negatív;
  - negatív szemidefínit, ha  $\mathbf{A}$  minden sajátértéke nempozitív;
  - indefínit, ha  $\mathbf{A}$ -nak van pozitív és negatív sajátértéke is.

- D** Válasszuk ki egy négyzetes mátrix néhány sorát, és ugyanannyiadik sorszámú oszlopát, a többi sort és oszlopot hagyjuk el. Az így kapott négyzetes részmátrix determinánsát a mátrix **főminorának (principal minor)** nevezzük. Ha az első  $k$  sort és az első  $k$  oszlopot választjuk ki,  $k$ -adrendű vagy  $k$ -edik **vezető főminorról (leading principal minor)**, vagy **(bal felső) sarokaldeterminánsról** beszélünk.
- T** **Definit mátrixok (vezető) főminorai:** A valós szimmetrikus  $\mathbf{A}$  mátrix (az  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$  kvadratikus forma) pontosan akkor
- pd, ha  $\mathbf{A}$  minden főminora pozitív;
  - pszd, ha  $\mathbf{A}$  minden főminora nemnegatív;
  - pd, ha  $\mathbf{A}$  minden vezető főminora pozitív (+ + ...);
  - nd, ha  $\mathbf{A}$  minden páratlan rendű vezető főminora negatív, páros rendű vezető főminora pozitív (− + − + ...)

**P** Határozzuk meg az alábbi mátrixok jellegét!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

**M** 1. mo: Az **A** mátrix sajátértékei 1, 1 és 4  $\rightsquigarrow$  pozitív definit.

2. mo: a vezető főminorok: 2, 3, 4  $\rightsquigarrow$  pozitív definit.

- 1. mo: **B** sajátértékei  $-1, -1$  és  $2$   $\rightsquigarrow$  indefinit ( $(-1, 1, 0)$ -ban  $-2$ ,  $(1, 1, 0)$ -ban  $2$ )
- 2. mo: a vezető főminorok:  $0, -1, 2$  (a 2-dik negatív)  $\rightsquigarrow$  indefinit
- **C** sajátértékei  $-3, -3$  és  $0$ ,  $\rightsquigarrow$  negatív szemidef. ( $(1, 1, 1)$ -ben  $0$ )
- **D**-nek van  $1 \times 1$ -es pozitív és negatív főminora is  $\rightsquigarrow$  indefinit ( $(1, 0, 0)$ -ban  $2$ ,  $(0, 1, 0)$ -ban  $-2$ )

# Kvadratikus formák

---

(Szemi)definit mátrixok faktorizációja



# Pozitív szemidefinit mátrixok faktorizációja

**T**  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  szimmetrikus. A köv. ekvivalensek:

1.  $\mathbf{A}$  pozitív szemidefinit,
2.  $\exists$  pozitív szemidefinit  $\mathbf{B}$ , hogy  $\mathbf{A} = \mathbf{B}^2$ .
3.  $\exists \mathbf{C}$  mátrix, hogy  $\mathbf{A} = \mathbf{C}^T \mathbf{C}$ .

$\mathbf{A}$   $\mathbf{B}$  mátrix egyértelmű, vagyis egy pozitív szemidefinit mátrixnak egyetlen négyzetgyöke van a pozitív szemidefinit mátrixok közt.

- B** (1.  $\Rightarrow$  2.)  $\mathbf{A}$  szimmetrikus  $\rightsquigarrow \mathbf{A} = \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}^T$   $\mathbf{A}$  pozitív szemidefinit  $\rightsquigarrow \forall i: \lambda_i \geq 0 \rightsquigarrow \mathbf{\Lambda}$  főátlóbeli elemeiből négyzetgyök vonható  $\rightsquigarrow \mathbf{A} = \mathbf{Q} (\mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}}) \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}} \mathbf{Q}^T = \mathbf{B} \mathbf{B}$ , ahol  $\mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}} = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ .
- (2.  $\Rightarrow$  3.)  $\mathbf{C} = \mathbf{B}$  vagy  $\mathbf{C} = \mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}} \mathbf{Q}^T$  megfelel ( $\mathbf{A} = \mathbf{Q} (\mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}})^T \mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}} \mathbf{Q}^T = \mathbf{C}^T \mathbf{C}$ ).
  - (3.  $\Rightarrow$  1.) korábban láttuk
  - $\mathbf{B}$  egyértelműségének igazolása technikai.

**P** Van-e olyan **B** és **C** mátrix, melyre  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{bmatrix} = \mathbf{B}^2 = \mathbf{C}^T \mathbf{C}$ ?

**M** Sajátértékek: 25, 0, a sajátvektorok mátrixa  $\mathbf{Q} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ , így a sajátfelbontás:

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}^T = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{\Lambda}^{1/2} \mathbf{Q}^T = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda}^{1/2} \mathbf{Q}^T = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{C} = \mathbf{B}$  is jó.

T L!  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  szimmetrikus. A következők ekvivalensek:

1.  $\mathbf{A}$  pozitív definit,
2. az  $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$  LU-felbontásban  $\mathbf{U}$  minden főátlóbeli eleme pozitív,
3. van olyan valós  $\mathbf{R}$  felsőháromszög-mátrix, melynek minden főátlóbeli eleme pozitív, és  $\mathbf{A} = \mathbf{R}^T \mathbf{R}$ .
4. van olyan invertálható valós  $\mathbf{C}$  mátrix, hogy  $\mathbf{A} = \mathbf{C}^T \mathbf{C}$ ,

A 3. pont szerinti  $\mathbf{R}$  egyértelmű!

D Az  $\mathbf{A} = \mathbf{R}^T \mathbf{R}$  felbontást az  $\mathbf{A}$  mátrix **Cholesky-felbontásának** nevezzük.

P Adjuk meg az **A** mátrix Cholesky-felbontását, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

B **A** mátrix pozitív definit ( $\chi_{\mathbf{A}}(x) = -x^3 + 8x^2 - 12x + 4$ ) Az LU-felbontás

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$\text{diag}(1, 4, 1) = \text{diag}(1, 2, 1) \text{diag}(1, 2, 1)$  és az  $\mathbf{R} = \text{diag}(1, 2, 1)\mathbf{L}^T \rightsquigarrow$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$