1, a, $\boxed{7}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(2n+1)^n}{n!}}_{a_n} x^n$ Hányados kritériummal

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(2n+3)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(2n+1)^n} = \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^n \cdot \frac{2n+3}{n+1} = \quad (2)$$

$$= \frac{\overbrace{\left(1+\frac{3/2}{n}\right)^n}^{\to e^{3/2}}}{\underbrace{\left(1+\frac{1/2}{n}\right)^n}_{\to e^{1/2}}} \cdot \underbrace{\frac{2n+3}{n+1}}_{\to 2} \quad (2) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{e^{3/2}}{e^{1/2}} \cdot 2 = 2e \quad (2)$$

$$\Longrightarrow R = \frac{1}{2e} \quad (1)$$

b, $\boxed{7}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(-5)^n}{\sqrt[3]{n}}}_{a_{2n}} (x-4)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(-5)^n}{\sqrt[3]{n}}}_{b_n} y^n$, $y=(x-4)^2$ Gyökkritériummal

$$\sqrt[n]{|b_n|} = \frac{5}{\sqrt[n]{n^{1/3}}} \longrightarrow 5 \Longrightarrow R_y = \frac{1}{5} \quad (3) \Longrightarrow R_x = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad (2)$$

Végpontok: $x = 4 \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$ esetén a sor

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^n}{\sqrt[3]{n}} \left(\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$$ konvergens, mert Leibniz típusú (2)

Tehát a konv. tartomány $KT = [4-\sqrt{5}, 4+\sqrt{5}]$

2, a, $x_0 = 3$

$\boxed{6}$ $$f(x) = e^{5x-2} = e^{5(x-3)+13} = e^{13}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{n!}(x-3)^n, \quad (5) \quad R = \infty \quad (1)$$

$\boxed{6}$ b, $$g(x) = \frac{1}{3+2x} = \frac{1}{2(x-3)+9} = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{-2}{9}\right)(x-3)} = \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-2}{9}\right)^n (x-3)^n \quad (5)$$

ha $\left|\frac{-2}{9}(x-3)\right| < 1$, azaz $|x-3| < \frac{9}{2} = R$ (1)

3, a,

$\boxed{8}$ $$f(x)=\frac{1}{\sqrt[5]{3+8x^3}}=\left(3+8x^3\right)^{-1/5}=3^{-1/5}\cdot\left(1+\frac{8}{3}x^3\right)^{-1/5}=$$

$$=3^{-1/5}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/5}{n}\left(\frac{8}{3}\right)^n x^{3n}$$ 6, ha $\left|\frac{8}{3}x^3\right|<1$, tehát

$|x|<\sqrt[3]{\frac{3}{8}}=R$ 2

b, $f^{(9)}(0)=9!\cdot a_9=9!\cdot 3^{-1/5}\binom{-1/5}{3}\left(\frac{8}{3}\right)^3=$ 4

$\boxed{6}$ x^9 együtthatója $\quad = 9!\cdot 3^{-1/5}\dfrac{(-1/5)\cdot(-6/5)(-11/5)}{3!}\left(\dfrac{8}{3}\right)^3$

$3n=9,\ n=3$

$f^{(10)}=0$, mert x^{10} nem szerepel a Taylor sorban. 2

4, $\boxed{7}$ $$\sum_{n=2}^{\infty}\underbrace{\frac{(-1)^n}{(2n)!}4^n}_{a_n}=\underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}2^{2n}\right)}_{\cos 2}\underbrace{-1+\frac{1}{2}\cdot 4^1}_{-(a_0+a_1)}=$$ 5

$$=\cos 2-1+2=\cos 2+1$$ 2

5, a, Trigonometrikus átalakítással:

6 $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$

$\Rightarrow \sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta)+\frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta)$, tehát

$f(x)=\sin(2x)\cos(3x)=\frac{1}{2}\sin(5x)+\frac{1}{2}\sin(-x)=$

$$=-\frac{1}{2}\sin(x)+\frac{1}{2}\sin(5x)$$ (Véges trig. pol.)

5/b, Dirichlet-tétel

(5) Ha f 2π-szerint periodikus (1), és a $[0, 2\pi]$ intervallum felosztható véges sok (1) diszjunkt I_n intervallum uniójára úgy, hogy az I_n intervallumokon f monoton (1), és az I_n intervallumok végpontjaiban létezik f jobb- és baloldali határértéke (1), akkor

$$\phi(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \quad (1) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

ahol ϕ az f Fourier-sorának összege.

6,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3 - y^2}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

$\boxed{5}$ a, Mivel f polinomok hányadosa, és a nevező $(x,y) \neq (0,0)$ esetén nem 0, ezért f folytonos az origón kívül. (2)

Az origóban f határértéke:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0+} \frac{2\rho^3\cos^3\varphi - \rho^2\sin^2\varphi}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0+} \underbrace{2\rho\cos^3\varphi}_{\to 0} - \sin^2\varphi$$

$= -\sin^2\varphi$ függ φ-től, tehát $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, tehát f nem folytonos az origóban. (3)

b, Ha $(x,y) \neq (0,0)$

$\boxed{12}$

$$f'_x(x,y) = \frac{6x^2(x^2+y^2) - (2x^3-y^2)2x}{(x^2+y^2)^2} \quad (3)$$

$$f'_y(x,y) = \frac{-2y(x^2+y^2) - (2x^3-y^2)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} \quad (3)$$

Ha $(x,y)=(0,0)$, a definícióval dolgozunk:

$$f'_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(f(h,0)-f(0,0)\right)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{2h^3}{h^2}-0\right)=\underline{\underline{2}} \quad (3)$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(f(0,h)-f(0,0)\right)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{-h^2}{h^2}-0\right)=\nexists \quad (3)$$

c, Ha $(x,y)\neq(0,0)$, akkor $\exists$ grad $f(x,y)$, mert ekkor $\exists\, \varepsilon>0$ hogy

(3) f'_x, f'_y folytonos (x,y) ε sugarú környezetében.

Az origóban nem létezik grad f, mert itt $\nexists\, f'_y$.

—o—

7, $f(x,y)=\sqrt{2x^2+y^4}$; $P=(-1,2)$

$\boxed{7}$ a, Általában: $f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)=z-f(x_0,y_0)$

$$f(-1,2)=\sqrt{2+16}=\sqrt{18} \ (1), \quad f'_x(-1,2)=\left.\frac{4x}{2\sqrt{2x^2+y^4}}\right|_{(-1,2)}=\frac{-2}{\sqrt{18}} \ (2)$$

$$f'_y(-1,2)=\left.\frac{4y^3}{2\sqrt{2x^2+y^4}}\right|_{(-1,2)}=\frac{16}{\sqrt{18}} \ (2)$$

Érintősík: (2)

$$\underline{\underline{\frac{-2}{\sqrt{18}}(x+1)+\frac{16}{\sqrt{18}}(y-2)=z-\sqrt{18}}}$$

(3) b, $\frac{df}{d\underline{e}}=\underline{e}\cdot\operatorname{grad} f=0$ ha $\underline{e}\perp \operatorname{grad} f(P)=\begin{bmatrix}-2/\sqrt{18}\\ 16/\sqrt{18}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 8\end{bmatrix}\cdot\frac{2}{\sqrt{18}}$

$$\underline{e}=\pm\begin{bmatrix}8\\ 1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{64+1}}=\frac{\pm 1}{\sqrt{65}}\begin{bmatrix}8\\ 1\end{bmatrix}$$

—o—

8, $\cancel{f(x,y)=g(x^2e^{3x+y})}$; $\cancel{f'_x=g'(x^2e^{3x+y})\cdot(2xe^{3x+y}}$

8, $f(x,y) = g(x^2 e^{3x+y})$

$\boxed{12}$

$$f'_x(x,y) = g'(x^2 e^{3x+y}) \cdot (2x e^{3x+y} + 3x^2 e^{3x+y}) =$$

$$= (2x+3x^2) e^{3x+y} \, g'(x^2 e^{3x+y}) \quad 3$$

$$f'_y(x,y) = x^2 e^{3x+y} \, g'(x^2 e^{3x+y}) \quad 3$$

$$f''_{xx}(x,y) = (2+6x) e^{3x+y} \, g'(x^2 e^{3x+y}) +$$

$$+ 3(2x+3x^2) e^{3x+y} \, g'(x^2 e^{3x+y}) +$$

$$+ ((2x+3x^2) e^{3x+y})^2 g''(x^2 e^{3x+y}). \quad 2$$

$$f''_{yy}(x,y) = x^2 e^{3x+y} \, g'(x^2 e^{3x+y}) + (x^2 e^{3x+y})^2 g''(x^2 e^{3x+y}) \quad 2$$

$$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = (2x e^{3x+y} + 3x^2 e^{3x+y}) g'(x^2 e^{3x+y}) +$$

$$+ x^2 e^{3x+y} g''(x^2 e^{3x+y}) \cdot (2x+3x^2) e^{3x+y} \quad 2$$